

Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $X_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $X_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται απροσδιόριστες μορφές:

$$(+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (\pm\infty), (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

8. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο.

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{R}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{R}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_v \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$$

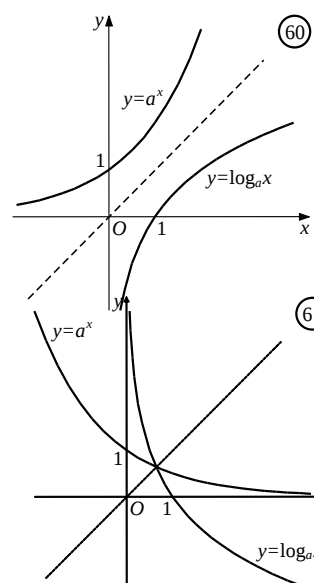
δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

- Αν $a > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \end{array}$$

- Αν $0 < a < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \end{array}$$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο X_0 με την προϋπόθεση ότι: — οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
 - δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή