ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τρίτη, 19 Ιανουαρίου 2021 11:22 πμ

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-17693 §3.4

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$συν\frac{\pi}{6}, συν\frac{\pi}{4}, συν\frac{17\pi}{10}$ (Μονάδες 12)

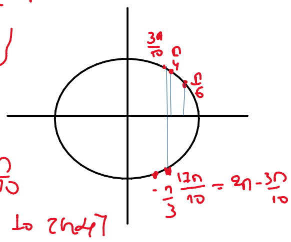
β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

(Μονάδες 13)

$\frac{17\pi}{10} = \frac{20\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = 2\pi - \frac{3\pi}{10}$ {54°} ($\frac{3\cdot 180}{10} = 54$)

Παρατηρώ $συν\frac{17\pi}{10} = συν\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = συν\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = συν\frac{3\pi}{10}$

Άρα $\frac{3\pi}{10} > \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{6}$ στο 1ο τεταρτημόριο



συνx ↓ Επ. $συν\frac{3\pi}{10} < συν\frac{\pi}{4} < συν\frac{\pi}{6} \Rightarrow συν\frac{17\pi}{10} < συν\frac{\pi}{4} < συν\frac{\pi}{6}$

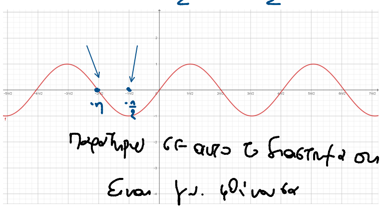
β) $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ νδο $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$; $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$ σχέση;

Τρόπος i

$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -\pi > -x_1 > -x_2 > -\frac{3\pi}{2}$ ή

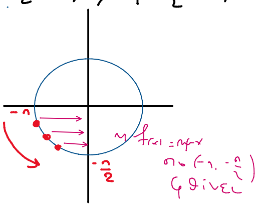
$-\frac{3\pi}{2} < -x_2 < -x_1 < -\pi \overset{+\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x_2 < \frac{\pi}{2} - x_1 < \frac{\pi}{2} - \pi$

$-\pi < \frac{\pi}{2} - x_2 < \frac{\pi}{2} - x_1 < -\frac{\pi}{2}$ Άρα $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) > ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$



Παρατηρώ ότι στο διάστημα αυτό η $f(x) = ημx$ είναι γν. φθίνουσα

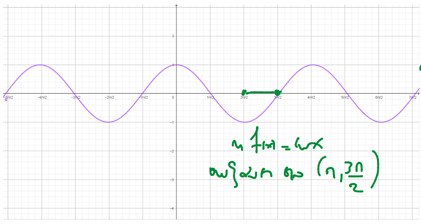
ή



η $f(x) = ημx$ στο $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ φθίνει

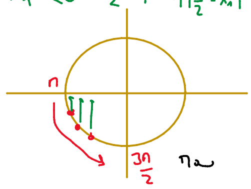
Τρόπος ii $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = συνx_1$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) = συνx_2$

$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow συνx_1 < συνx_2$ ή $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$



η $f(x) = συνx$ αύξουσα στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

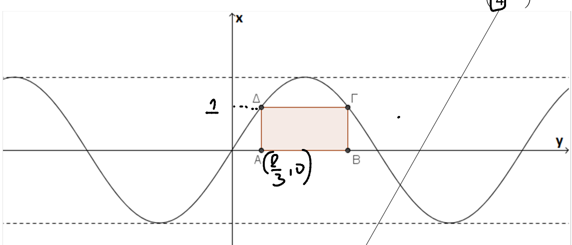
ή



Παρατηρώ ότι η $f(x) = συνx$ αύξουσα στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

13) ΑΣΚΗΣΗ 4-22691 §3.4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2ημ\left(\frac{\pi}{4} x\right)$



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $Α\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 10)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 10)

α) $T = \frac{2\pi}{a}$ $a = \frac{\pi}{4}$ Επ. $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

β) Αφού η τετμημένη του Α είναι $\frac{2}{3}$ όμοια και του Δ

β) Αφού η τετμημένη του Α είναι $\frac{2}{3}$ ομοίως και του Δ. Έτσι, στην f για $x=\frac{2}{3}$: $f(\frac{2}{3}) = 2ημ(\frac{π}{4}\cdot\frac{2}{3})$

$= 2ημ\frac{π}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ άρα $Δ(\frac{2}{3}, 1)$

Το Γ έχει ίδια τεταγμένη με Δ

άρα $f(x)=1 \Leftrightarrow 2ημ(\frac{π}{4}x) = 1 \Leftrightarrow ημ(\frac{π}{4}x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow ημ(\frac{π}{4}x) = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{π}{4}x = 2κπ + \frac{π}{6} \\ \text{ή} \\ \frac{π}{4}x = 2κπ + π - \frac{π}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{π}\cdot κπ + \frac{4}{π}\cdot\frac{π}{6} \\ x = \frac{8}{π}\cdot κπ + \frac{4}{π}\cdot\frac{5π}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8κ + \frac{2}{3} \\ x = 8κ + \frac{10}{3} \end{cases}$ και αφού $T=8$, $κ=0$

άρα $x_1 = \frac{2}{3}$ και $x_2 = \frac{10}{3}$

αντιστοιχεί στο Δ — αντιστοιχεί στο Γ — $Γ(\frac{10}{3}, 1)$

Το Β έχει ίδια τετμημένη με το Γ έτσι $Β(\frac{10}{3}, 0)$.

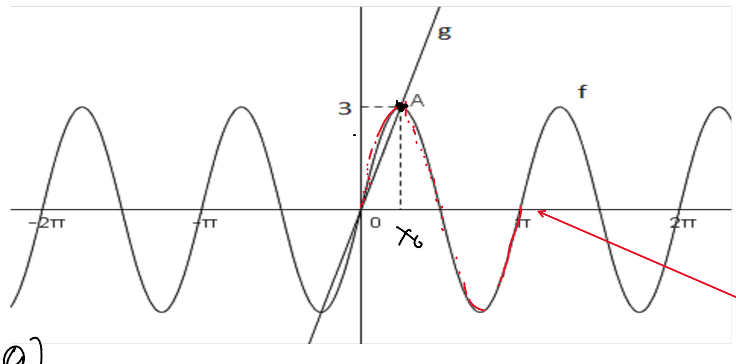
11) ΑΣΚΗΣΗ 4-20921

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = αx + β$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x) = ρημ(ωx)$, όπου $ω > 0$ και $ρ > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το IR. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

α) Να αποδείξετε ότι $ρ = 3$ και $ω = 2$ (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3ημ(2x) - \frac{12x}{π} = 0$ στο διάστημα [0, π]. (Μονάδες 10)



α)

· Η f είναι ημιτονοειδής και έχει περίοδο $T = π \Leftrightarrow \frac{2π}{ω} = π$

$\Leftrightarrow 2π = ωπ \Leftrightarrow ω = 2$

· Το μέγιστο της f είναι το 3 έτσι $ρ = 3$.

άρα $f(x) = 3ημ2x$

β) Έτσι ...

για $f(x)=3\eta\mu 2x$

β) σκέψη: για να βρω τα α, β της g χρειάζομαι 2 σημεία για αυτή. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Ο(0,0) αφού η g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Α η g τέμνει την f στο Α και θα βρούμε τη θέση (x_0) λύνοντας την εξίσωση $f(x)=3 \Leftrightarrow 3\eta\mu 2x=3 \Leftrightarrow$

$\eta\mu 2x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi/2 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$

Έτσι $x_0 = \frac{\pi}{4}$ άρα $A(\frac{\pi}{4}, 3)$. $\quad \kappa = 0$

η $g(x) = \alpha x + \beta$ περνά από $(0,0)$

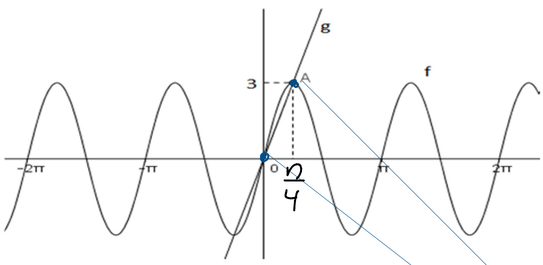
$0 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$

Περνά από $A(\frac{\pi}{4}, 3)$

$3 = \alpha \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{12}{\pi}$

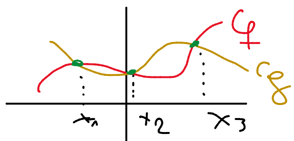
άρα $g(x) = \frac{12}{\pi}x$.

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.
(Μονάδες 10)



Τομή δύο συναρτήσεων

Εικόνα:



αλγεβρικά: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$x = x_1$ ή $x = x_2$ ή $x = x_3$

Ισχύει $3\eta\mu 2x - \frac{12x}{\pi} = 0$

$\Leftrightarrow 3\eta\mu 2x = \frac{12x}{\pi} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{4}$

ΙΤ!

8) ΑΣΚΗΣΗ 4-17841 §3.4

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ και $0 \le t \le 180$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

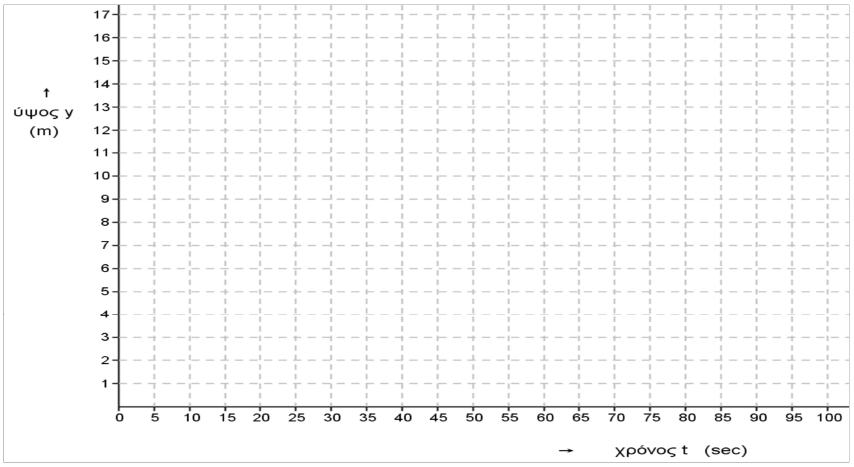
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

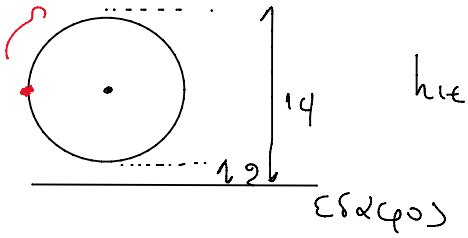
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t) (Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$ (Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



Λύση



$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$

$0 \le t \le 180$

$-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \le 1 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} -6 \le \eta\mu\frac{\pi t}{30} \le 6 \Leftrightarrow$

$8 - 6 \le \eta\mu\frac{\pi t}{30} \le 8 + 6 \Leftrightarrow \underline{2 \le h(x) \le 14}$

• Θέσεις μεγίστου $h(x) = 14 \Leftrightarrow 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 14 \Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 6$

$\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$t = \frac{30}{\pi} \cdot 2\kappa\pi + \frac{30}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 60\kappa + 15$

Ενδοχή κ

$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow 0 \le 60\kappa + 15 \le 180$

$\Leftrightarrow -15 \le 60\kappa \le 165 \Leftrightarrow -\frac{15}{60} \le \kappa \le \frac{165}{60}$

$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow 0 \le 60k+15 \le 180$

$\Leftrightarrow -15 \le 60k \le 165 \Leftrightarrow -\frac{15}{60} \le k \le \frac{165}{60}$

$\{-0,4\}$ $\{2,7\}$

Και άρα $k \in \mathbb{Z}$

Για $k=0$ $k=1$ $k=2$

$t=15$ $t=75$ $t=135$

$k=0,\ k=1,\ k=2$

Δεύτερο ερώτημα

$h(x)=2 \Leftrightarrow 8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)=2 \Leftrightarrow$

$6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)=-6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)=-1$

$\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30}=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\frac{60\pi}{\pi}k-\frac{30}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$t=60k-15.$ $k\in\mathbb{Z}$

Ενώ η

$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow$

$0 \le 60k-15 \le 180 \Leftrightarrow$

$15 \le 60k \le 195 \Leftrightarrow \frac{15}{60} \le k \le \frac{195}{60} \Leftrightarrow$

$0,4 \le k \le 3,2$ $k\in\mathbb{Z}$

Άρα $k=1,\ k=2,\ k=3$

$k=1$ $k=2$ $k=3$

$t=\dots$ $t=\dots$ $t=\dots$