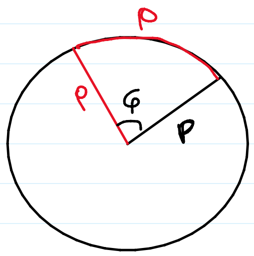
Το ακτίνιο (rad)

radius: ακτίνα

φ: γωνία ενός ακτινίου
όπου θα βαίνει σε τόξο μήκους ρ



Επει οι 360° θα αντιστοιχούν σε μήκος
$2\pi\rho$

Άρα για κύκλο με $\rho=1$

οι $360° \longrightarrow 2\pi$ rad

$180° \longrightarrow \pi$ rad

$90° \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ rad

$45° \longrightarrow \frac{\pi}{4}$ rad

$60° \longrightarrow \frac{\pi}{3}$ rad

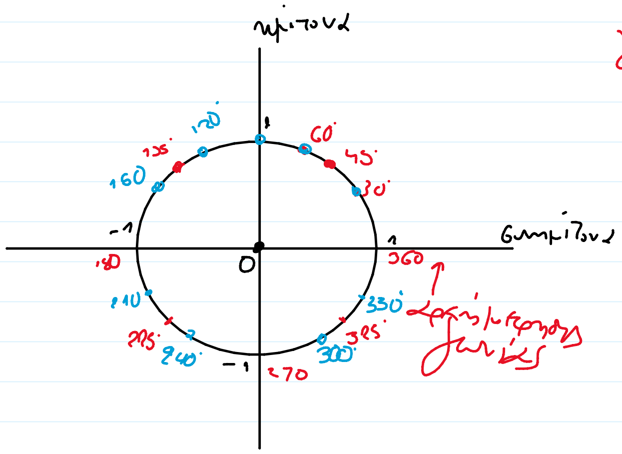
$30° \longrightarrow \frac{\pi}{6}$ rad

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Οι } 180° \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ \mu° \longrightarrow \alpha \text{ (rad)} \\ \hline \alpha = \pi \cdot \frac{\mu}{180} \\ \text{ή} \\ \mu = 180 \cdot \frac{\alpha}{\pi} \end{array}}$$

πχ: αν $\mu=135°$ $\alpha = \pi \cdot \frac{135}{180} = \frac{3}{4}\pi$

αν $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ $\mu = 180 \cdot \frac{\frac{4\pi}{3}}{\pi} = \overset{60}{\cancel{180}} \cdot \frac{4\pi}{\cancel{3\pi}}$
$= 240°$

γνωστές γωνίες: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°

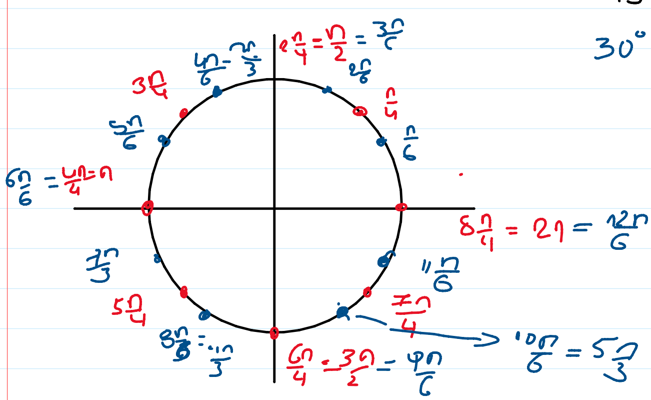


ο κύκλος με ακτίνια

$180° \longrightarrow \pi$

$45° \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$30° \longrightarrow \frac{\pi}{6}$



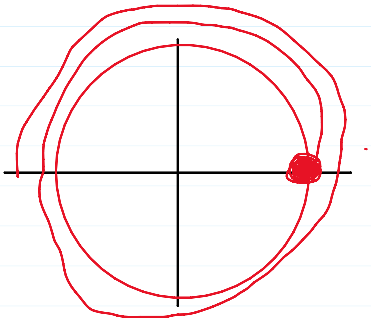
Παιχνίδια με γωνίες και περιστροφές ...

Παιχνίδια με γωνίες και περιστροφές...

Παράδειγμα 1ο.

Να υπολογίσετε τους τριγ. αριθμούς της γωνίας $\frac{13\pi}{6}$

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0



Σπάω το 13 σε 2 μέρη όπου το ένα είναι το κοντινότερο πολλαπλάσιο του διαιρέτη (6) κοντά στο 13 το οποίο θα είναι άρτιο (ζυγό)

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \underbrace{2\pi}_{\text{καλό}} + \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\text{κακό: } \frac{13\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \underbrace{3\pi}_{\text{κακό}} - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$ημ\left(\frac{13\pi}{6}\right) = ημ\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = ημ\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$συν\left(\frac{13\pi}{6}\right) = συν\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = συν\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΜΑΜ!

$$εφ\left(\frac{13\pi}{6}\right) = εφ\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = εφ\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Παράδειγμα 2ο

Υπολογίστε τους τριγ. αριθμούς της $\frac{25\pi}{3}$ ακολουθώ τον κανόνα:

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = 4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$ημ\left(\frac{25\pi}{3}\right) = ημ\left(\cancel{4\cdot 2\pi} + \frac{\pi}{3}\right) = ημ\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν\left(\frac{25\pi}{3}\right) = συν\left(\cancel{4\cdot 2\pi} + \frac{\pi}{3}\right) = συν\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 3ο

Υπολογίστε τους τριγ αριθμούς της $\frac{49\pi}{4}$

$$\frac{49\pi}{4} = \frac{48\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 12\pi + \frac{\pi}{4} = 6\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1

Έτσι,

$$ημ\left(\frac{49\pi}{4}\right) = ημ\left(\cancel{6\cdot 2\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = ημ\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$εφ\left(\frac{49\pi}{4}\right) = εφ\left(6\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = εφ\,\frac{\pi}{4} = 1$$

30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{49\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(6\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

3.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Τετάρτη, 2 Δεκεμβρίου 2020 8:42 πμ

1. $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$

2. $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$

3. $\sigma\varphi\varphi = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$

4. $\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = 1$

(προκύπτει εύκολα)

$\eta\mu\varphi = \dfrac{y}{\rho}$

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{x}{\rho}$

→ διότι $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$

$\sigma\varphi\varphi = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{x}{\rho}}{\frac{y}{\rho}} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$

5. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

Απόδ.: Έχουμε $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$ (δε θέλω ημφ, αλλά εφφ... $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$)

$\xLeftrightarrow{:\sigma\upsilon\nu^2\varphi \neq 0}$ $\dfrac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + 1 = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi^2\varphi + 1 = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\varphi+1} = \sigma\upsilon\nu^2\varphi$

6. $\eta\mu^2\varphi = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\varphi}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}$

Απόδ.: Έχω $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$

Έχω $\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

(με αντικατάσταση) $\eta\mu^2\varphi + \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi = 1 - \dfrac{1}{\underset{+\varepsilon\varphi^2\varphi}{1}+\varepsilon\varphi^2\varphi}$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi = \dfrac{1+\varepsilon\varphi^2\varphi-1}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi} = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\varphi}{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}$

A → B

A/11/ i)

ν.δ.ο

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

Λύση

$$\text{Αριστερό μέλος} = \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}+\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{\overbrace{\eta\mu^2\theta+1^2+2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}^{\text{Ταυτότητα}}}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$=\frac{1+1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{2\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}{\eta\mu\theta\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

A/12/ι

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon\varphi\omega&=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\\ \sigma\varphi\omega&=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\end{aligned}}$$

βοηθούν πολύ όταν έχω σχέση με ημίτονα ημω, συνω

$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$

⇕

Κανένα από τα δύο μην δηλαδή ... δυνατό για πράξεις ... Άρα θα χρησιμοποιήσω και τα δύο / χιαστί συνεπαγωγή

Έτσι: $\varepsilon\varphi\beta\,(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta)=\varepsilon\varphi\alpha\,(\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha)$

$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$

$\Leftrightarrow\ \varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\alpha+\underbrace{\varepsilon\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\beta}_{1}=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+\underbrace{\varepsilon\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\alpha}_{1}\ \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\alpha+1=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1$ που ισχύει.

A/13/ι/64

ν.δ.ο

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$$

από A → B

Σχέση ημ, συν, εφ, σφ γνωρίζω $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

$$\text{Αριστερό μέλος}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=$$

διπλή σύνθετη παράσταση

το σύνθετο κλάσμα

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}+\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=$$

οι παρονομαστές είναι αντίθετοι (αντίθετο πρόσημο)

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{-(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$$

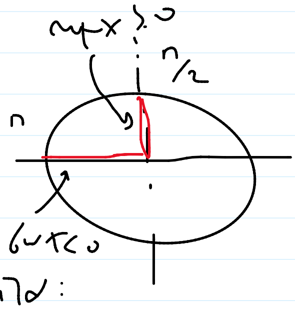
$$= \frac{\cancel{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.$$

Κάντε ασκήσεις Α/11 Α/12 Α/13 σελ 64.

(ό,τι μπορείτε ... λάθος Σα')

Ασκήσεις (σχολικό)

Α/1 $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$



Από βασική τριγ/κή ταυτότητα:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \iff \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\iff \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{25-9}{25} \iff \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25} \iff$$

$\sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{4}{5}$ αφού $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$ Άρα $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Άρα $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -\frac{4}{3}$.

Ασκ. 3 $\quad \varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Άσκ. 5 $\quad εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{3π}{2} < x < 2π$

$εφx = \frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ημx}{συνx} \Rightarrow$

$\boxed{ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot συνx}$ (1)

Ισχύει ότι: $ημ^2x + συν^2x = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

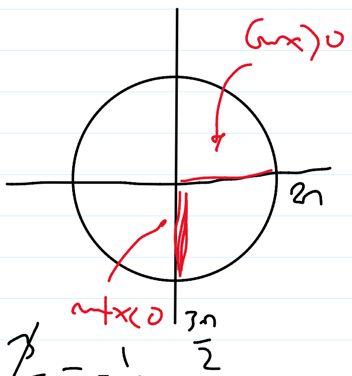
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}συνx\right)^2 + συν^2x = 1 \Rightarrow$

$\frac{3}{9}συν^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot συν^2x + συν^2x = 1$

$\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} συν^2x + 3συν^2x = 3 \Leftrightarrow 4συν^2x = 3 \Leftrightarrow$

$συν^2x = \frac{3}{4} \Rightarrow συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Αφού $\frac{3π}{2} < x < 2π$ $\quad συνx < 0$



και $συνx = +\frac{\sqrt{3}}{2}$

Για (1) $\Rightarrow ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

και $σφx = \frac{1}{εφx} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

Β3. $-\frac{π}{2} < x < \frac{π}{2}$

νδο

$$\sqrt{\frac{1+ημx}{1-ημx}} - \sqrt{\frac{1-ημx}{1+ημx}} = 2εφx$$

Α' μέλος $= \sqrt{\frac{(1+ημx)(1+ημx)}{(1-ημx)(1+ημx)}} - \sqrt{\frac{(1-ημx)(1-ημx)}{(1+ημx)(1-ημx)}}$

Σκέψη:

• Δεν ισχύουν περιορισμοί για x; ωστόσο πράξεις...

• Έχω ρίζες για να υψώσω;

$(\sqrt{\ } - \sqrt{\ })^2 = (2εφx)^2$

$$\ldots (1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x) \ldots (1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x) \ldots$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{1^2-\eta\mu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{1^2-\eta\mu^2 x}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} =$$

$$\left|\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right| - \left|\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right| =$$

$$\frac{|1+\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{|1-\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

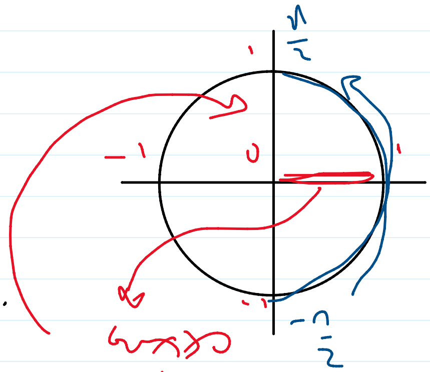
$$\frac{|1+\eta\mu x| - |1-\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

$\sqrt{\ } - 2\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ } + \sqrt{\ }^2$

$(\ ) - 2\sqrt{\ } + (\ ) = (\ )^2$

τετράγωνο

(Στην Α' λυκ.
είχα τα 2Δ
τις ταυτότητες
$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$



$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

Άρα $\quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq 1+\eta\mu x \leq 2$

άρα $|1+\eta\mu x| = 1+\eta\mu x$

Και $\quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \xrightarrow{(-1)} 1 \geq -\eta\mu x \geq -1$

$-1 \leq -\eta\mu x \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \geq 1-\eta\mu x \leq 2$

άρα $\quad |1-\eta\mu x| = 1-\eta\mu x$

άρα $\quad$ Αμέσως $= \dfrac{1+\eta\mu x - 1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$= 2\varepsilon\varphi x.$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Τετάρτη, 9 Δεκεμβρίου 2020 8:21 πμ

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Παλιότερα η γνώση μας για τους τριγ/κους αριθμούς αφορούσε γωνίες οξείες.

Πια, ξέροντας ότι μπορώ να έχω γωνίες όλων των ειδών που στριφογυρίζουν, πηγαίνουν προς τα πίσω (αρνητικές) είναι αμβλείες, μη κυρτές κλπ. χρειαζόμαστε τρόπους υπολογισμού τους γρήγορους και απλούς.

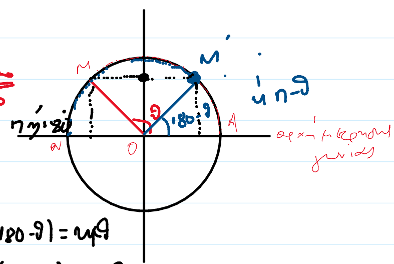
Τι καλύτερο λοιπόν από το να τις συσχετίσουμε με μια γωνία του 1ου τεταρτημορίου μιας και μελετάμε εξαντλητικά τα 4 τελευταία χρόνια!

Για κάθε τεταρτημόριο: η αναγωγή της γωνίας οποιουδήποτε τεταρτημορίου στο 1ο είναι μια μεταφορά της γωνίας αφαιρώντας τη ή προσθέτοντας τη στα άκρα του εν λόγω τεταρτημορίου

Αναγωγή 2ου στο 1ο

για να γυρίσω τη γωνία στο 1ο θα την αφαιρέσω από το 180°

στρίβω το τόξο ΑΜ ώστε η ΟΜ να συμπέσει με την ΟΝ



$ημ(180-θ) = ημθ$

$συν(180-θ) = -συνθ$

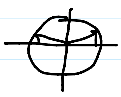
$εφ(180-θ) = -εφθ$

$σφ(180-θ) = -σφθ$

$ημ\underset{2ο}{120°} = ημ(180-60) = ημ60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

πρέπει να το γράψω 180° − κάτι

$συν\left(\frac{5\pi}{6}\right) = συν\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -συν\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



2ο

$\frac{\pi}{6} = 30°$

$\frac{5\pi}{6} = 5 \cdot 30° = 150°$

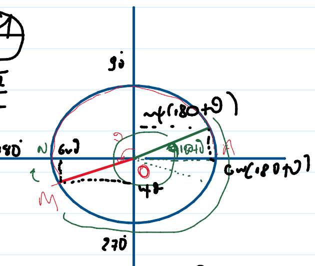
2ο → 1ο $150° = 180° - κάτι = 180 - 30 = \pi - \frac{\pi}{6}$

Αναγωγή 3ου σε 1ο

$\pi + θ, θ$

180+45 → 1ο

$συν(225°) = συν(180+45) = -συν45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$ημ\left(\frac{7\pi}{6}\right) = ημ\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -ημ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} = 30°$ $\frac{7\pi}{6} = 7 \cdot 30 = 210° = 180 + 30$ → $\pi + \frac{\pi}{6}$

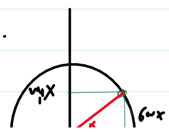
$ημ(180+θ) = -ημθ$

$συν(180+θ) = -συνθ$

$εφ(180+θ) = εφθ$

$σφ(180+θ) = σφθ$

Αντίθετα τόξα $x, -x$:



$ημ(-\frac{\pi}{6}) = -ημ\frac{\pi}{6}$

$ημ(-x) = -ημx$

Αντίθετα τόξα $x, -x$:

$ημ(-\frac{π}{6}) = -ημ\frac{π}{6}$

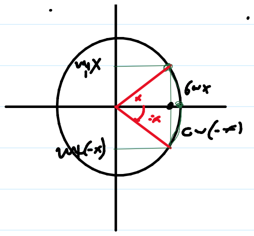
$ημ(-x) = -ημx$

$συν(-x) = συνx$

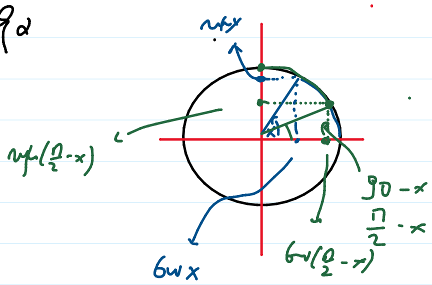
$συν(-\frac{π}{4}) = συν\frac{π}{4}$

$εφ(-x) = -εφx$

$σφ(-x) = -σφx$



Συμπληρωματικά τόξα



$ημ(\frac{π}{2}-x) = συνx$

$συν(\frac{π}{2}-x) = ημx$

$ημ70° = ημ(90°-20°) = συν20°$

$εφ\frac{π}{6} = εφ(\frac{π}{2}-\frac{π}{3}) = σφ\frac{π}{3}$

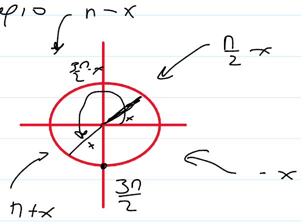
Υπολογίστε $ημ(\frac{3π}{2}-x)$

(αρκεί να γνωρίζω το τεταρτημόριο που δουλεύω...)

3ο τεταρτημόριο

Δουλεύω π+κάτι

Άρα μπορώ $\frac{3π}{2}-x \rightarrow$ π+κάτι

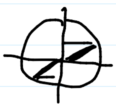


$\frac{3π}{2}-x = π+\frac{π}{2}-x = π+(\frac{π}{2}-x)$

$ημ(\frac{3π}{2}-x) = ημ(π+(\frac{π}{2}-x)) =$ {κάτι

$-ημ(\frac{π}{2}-x) = -συνx$

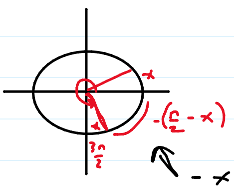
1ο



$σφ(\frac{3π}{2}+x) =$

$\frac{3π}{2}+x = 2π-\frac{π}{2}+x$

$= 2π-(\underbrace{\frac{π}{2}-x}_{κάτι})$

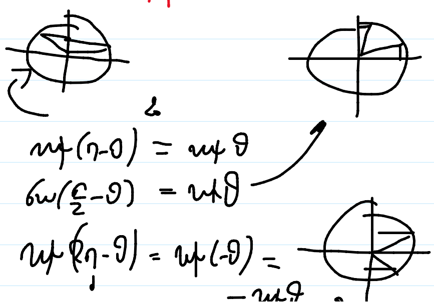


Άρα $σφ(\frac{3π}{2}+x) = σφ(2π-(\frac{π}{2}-x)) = σφ(-\overbrace{(\frac{π}{2}-x)}^{κάτι})$

4ο τεταρτημόριο

$-σφ(\frac{π}{2}-x)$

$-εφx$.



Άσκηση: Υπολογίστε την παράσταση

$$\frac{2\cdot ημ(π-θ)+συν\left(\frac{π}{2}-θ\right)-2\cdot ημ(2π-θ)}{ημ\left(\frac{π}{2}-θ\right)-3\cdot συν(π-θ)+συν(2π-θ)}$$

$ημ(π-θ) = ημθ$

$συν(\frac{π}{2}-θ) = ημθ$

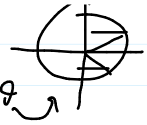
$ημ(2π-θ) = ημ(-θ) = -ημθ$

$ημ\left(\frac{π}{2}-θ\right)-3\cdot συν(π-θ)+συν(2π-θ)$

η παράσταση γίνεται:

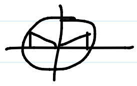
$$\frac{2ημθ+ημθ-2ημθ}{συνθ+3συνθ+συνθ}=\frac{ημθ}{5συνθ}=\frac{1}{5}εφθ$$

$ημ(2π-θ)=ημ(-θ)=-ημθ$
ΜΑΜ

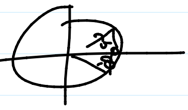


$ημ\left(\frac{π}{2}-θ\right)=συνθ$

$συν(π-θ)=-συνθ$



$συν(2π-θ)=συν(-θ)=συνθ$
ΜΑΜ



Άσκηση φυλλαδίου

$$\frac{συν\left(\frac{π}{2}-α\right)\cdot εφ\left(\frac{9π}{2}+α\right)\cdot ημ\left(\frac{3π}{2}-α\right)\cdot συνα}{ημ\left(\frac{3π}{2}+α\right)\cdot σφ\left(\frac{6π}{2}-α\right)\cdot συν(π-α)\cdot ημα}=-1$$

Βρίσκουμε την αναγωγή κάθε παράγοντα χωριστά στο 1ο τεταρτημόριο

1ο	$\frac{π}{2}-x,\ x$
2ο	$π-x,\ x$
3ο	$π+x,\ x$
4ο	$-x,\ x$

• $συν\left(\frac{π}{2}-α\right)=ημα$

• $εφ\left(\frac{9π}{2}+α\right)$ (δεν καταλήγουμε σε τεταρτημόριο αμέσως:)

$\frac{9π}{2}=\frac{10π}{2}-\frac{π}{2}$

$5π-\frac{π}{2}$

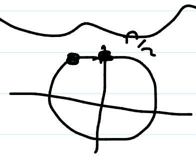
άρτιο όσω ζυγά π

$\frac{9π}{2}=\frac{8π}{2}+\frac{π}{2}=4π+\frac{π}{2}$

άρα $εφ\left(\frac{9π}{2}+α\right)=εφ\left(4π+\frac{π}{2}+α\right)$

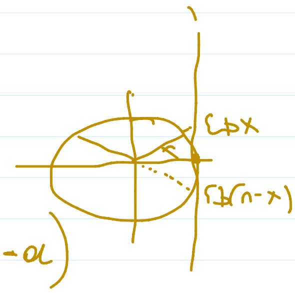
$=εφ\left(\frac{π}{2}+α\right)=$

$εφ\left(π-\frac{π}{2}+α\right)=$

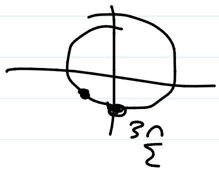


$εφ\left(π-\underbrace{\left(\frac{π}{2}-α\right)}_{x}\right)=-εφ\left(\frac{π}{2}-α\right)$

$=-σφα.$



• $ημ\left(\frac{3π}{2}-α\right)=$



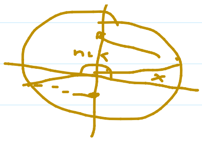
$\frac{3π}{2}=\frac{2π}{2}+\frac{π}{2}-α=$

$π+\underbrace{\left(\frac{π}{2}-α\right)}_{x}$

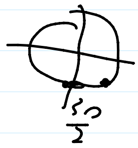
$ημ\left(\frac{3π}{2}-α\right)=ημ\left(π+\left(\frac{π}{2}-α\right)\right)=$

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\eta\mu\left(\pi+\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{x}\right)=$

$=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$



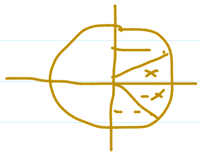
$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$



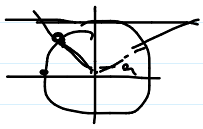
$\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{2}$

Έτσι, $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\eta\mu\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\eta\mu\left(-\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{x}\right)$

$=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$

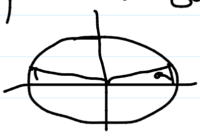


$\sigma\varphi\left(\frac{6\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\varphi\left(2\pi+\pi-\alpha\right)=\sigma\varphi\left(\pi-\alpha\right)=-\sigma\varphi\alpha$



$\frac{6\pi}{2}=3\pi-\alpha=2\pi+\pi-\alpha$

$\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$



Έτσι το 1ο μέλος της ισότητας γίνεται:

$$\frac{\cancel{\eta\mu\alpha}\cdot\cancel{(-\sigma\varphi\alpha)}\cdot\cancel{(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{\cancel{(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}\cdot\cancel{(-\sigma\varphi\alpha)}\cdot\cancel{(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}\cdot\cancel{\eta\mu\alpha}}=-1.$$

Άσκηση B|3|71

1. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=5$ (1) υπολογίστε

την τιμή της παράστασης $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$.

Παρατήρηση 1: $\underset{60^\circ}{\frac{\pi}{3}}+\underset{30^\circ}{\frac{\pi}{6}}=\underset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$

υψώνω την (1) στο τετράγωνο

$\left\{(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2\right\}$

$\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)^2=5^2\iff\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+2\underbrace{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}_{?}=25$

Είναι: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-x\right)=$

{Για να το)

Είναι: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

$\overset{1^o}{=}$ τρ. $\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

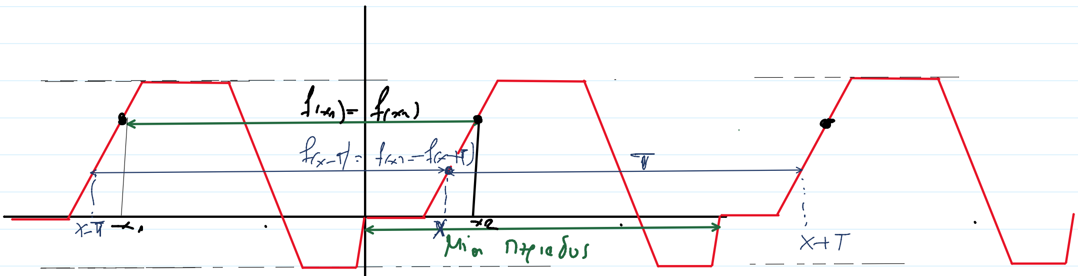
(Αλλά: ίσα να το υπολογίσει...)

Έτσι το $2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 2\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 2$

άρα $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 25-2 = 23.$

Περιοδικές συναρτήσεις.

Τετάρτη, 16 Δεκεμβρίου 2020 8:22 πμ



Αν υπάρχει η δυνατότητα ένα μαθηματικό μοτίβο να επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά – είναι τα ίδια διαστήματα (επί του x) έχουμε τις ίδιες τιμές στο y τότε λέμε ότι η συνάρτηση που εκφράζει το μοτίβο είναι περιοδική.

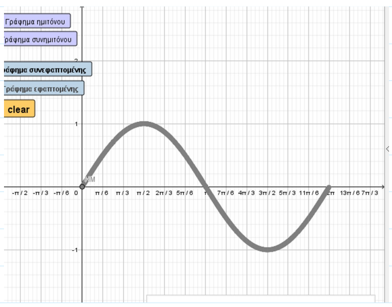
Μια συνάρτηση θα λέγεται περιοδική σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού όταν υπάρχει αριθμός $T > 0$ ώστε

$x-T \in \Delta$, $x+T \in \Delta$ με $x \in \Delta$,

$f(x-T) = f(x) = f(x+T)$, Η περίοδος της f συμβολίζεται με T

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ $\quad T = 2\pi$

	$0T$	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	$4T/4$
	$0\cdot 2\pi$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{3 2\pi}{4}$	$\frac{4\, 2\pi}{4}$
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0	1	0	-1	0



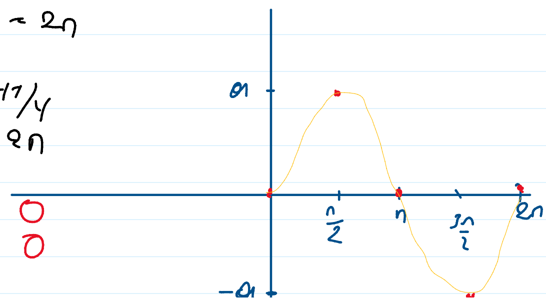
Αλλάζω το πλάτος:

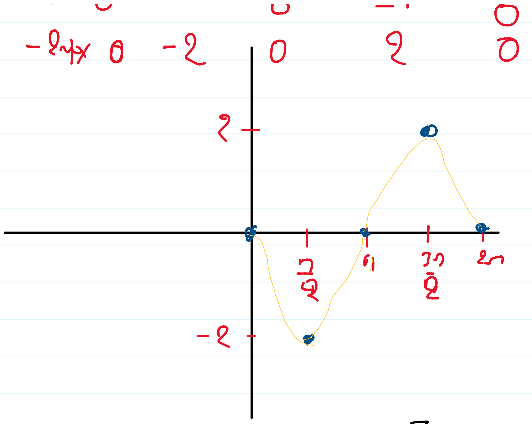
$f(x) = \alpha\, \eta\mu x$ $\quad T = 2\pi$

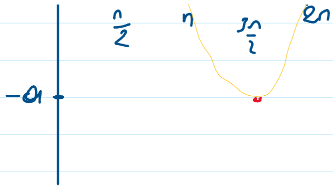
	$0T$	$T/4$	$2T/4$	$3T/4$	$4T/4$
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\theta$	0	1	0	-1	0
$\alpha\,\eta\mu\theta$	0	α	0	$-\alpha$	0

Πχ $f(x) = -2\,\eta\mu x$ $\quad T = 2\pi$

	$0T$	$T/4$	$2T/4$	$3T/4$	$4T/4$
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$-2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0





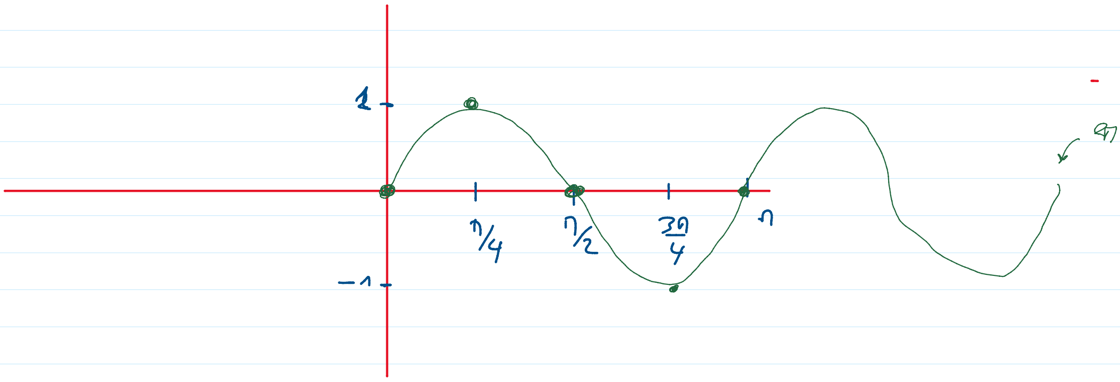


Ζωγραφίστε την $f(x) = \eta\mu 2x$

Έτσι η περίοδος $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

η περίοδος αλλάζει και ο πολλαπλασιασμός του x την επηρεάζει ως εξής $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ (όσο $\alpha \uparrow$ η $T \downarrow$)

	0T	T/4	2T/4	3T/4	4T/4
	$0\cdot\pi$	$\frac{1}{4}\cdot\pi$	$\frac{2}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{4}{4}\pi$
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\eta\mu\theta$	0	1	0	−1	0



Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i)
Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

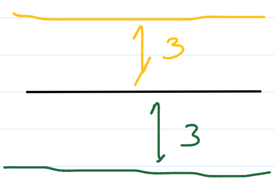
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

i) Έχουμε πως $-1 \le \eta\mu x \le 1$ άρα

$-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le 1 \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} -3 \le 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le 3$

f_{min} f_{max}

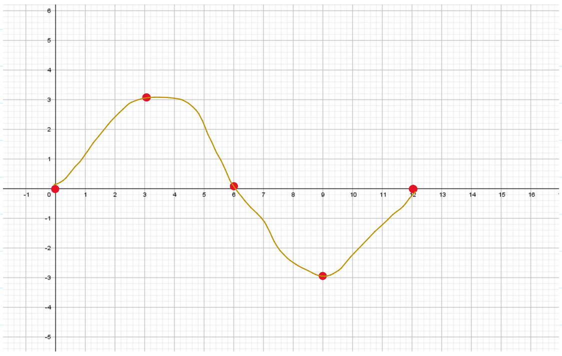
άρα $f_{max} - f_{min} = 3-(-3) = 6$



ii) περίοδος $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12\ (h)$

	0T	T/4	T/2	3T/4	4T/4
t	0	3	6	9	12
ημt	0	1	0	−1	0
3ημt	0	3	0	−3	0



Σχολικό άσκηση 6.

Να μελετήσετε την $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

και την $g(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x$ στην περίοδο της

1ης

Εύρεση περιόδων

• f: $T_f = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ $(\alpha = \frac{1}{2})$

• g: $T_g = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi$ $(\alpha = \frac{3}{2})$

Ακρότατα

f: $-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} \le 1 \xrightarrow{\cdot 2} -2 \le 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} \le 2$

f_{min} f_{max}.

g: $-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x \le 1 \xrightarrow{\cdot(-2)} 2 \geq -2\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x \geq -2 \mapsto$

$-2 \le -2\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x \le 2$

g_{min} g_{max}.

Πινακες Τιμων εως 4π

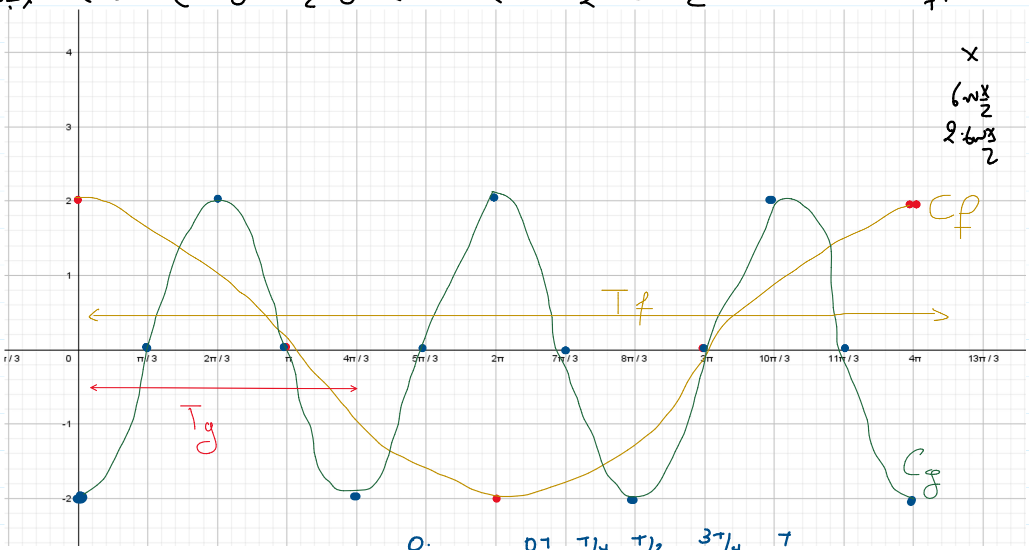
f:

	0T	T/4	T/2	3T/4	T
x	0	π	2π	3π	4π
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2

g:

	0T	T/4	T/2	3T/4	T								
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{3}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$-2\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x$	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2

ισαπέχουσι π/3



f:

	0T	T/4	T/2	3T/4	T
x	0	π	2π	3π	4π
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2

g:

	0T	T/4	T/2	3T/4	T								
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{3}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$-2\sigma\upsilon\nu\frac{3}{2}x$	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2

ισαπέχουσι π/3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6\cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right)$ και $0 \le t \le 180$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 1)

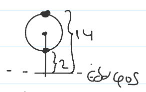
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t) (Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$ (Μονάδες 4)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



$h(t) = 8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$

$0 \le t \le 180$

α. $-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \le 1$

$-6 \le 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \le 6$

$2 \le 8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \le 14$

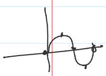
$2 \le h(t) \le 14$

β. Η διάμετρος της ρόδας

$\delta = 14-2 = 12$

άρα η ακτίνα $\rho = 6$

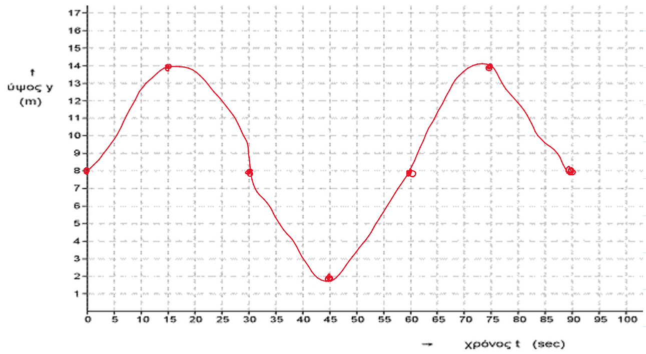
γ) $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=\frac{\pi}{30}$ $\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}}=60$ sec (1 περιστροφή)



Άρα στα 180 sec έκαναν 3 γύρους

δ)

t	0	15	30	45	60	75	90
$\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	0	1	0	-1	0	1	0
$6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	0	6	0	-6	0	6	0
$h(t)=8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	8	14	8	2	8	14	8



5) ΑΣΚΗΣΗ 2-17693 §3.4

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$ (Μονάδες 12)

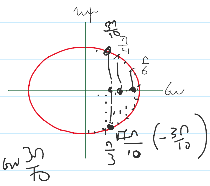
β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$ (Μονάδες 13)

$\frac{17\pi}{10}=\frac{20\pi}{10}-\frac{3\pi}{10}=$

$2\pi-\frac{3\pi}{10}=-\frac{3\pi}{10}$

$\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi-\frac{3\pi}{10}\right)=$

$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{10}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}$



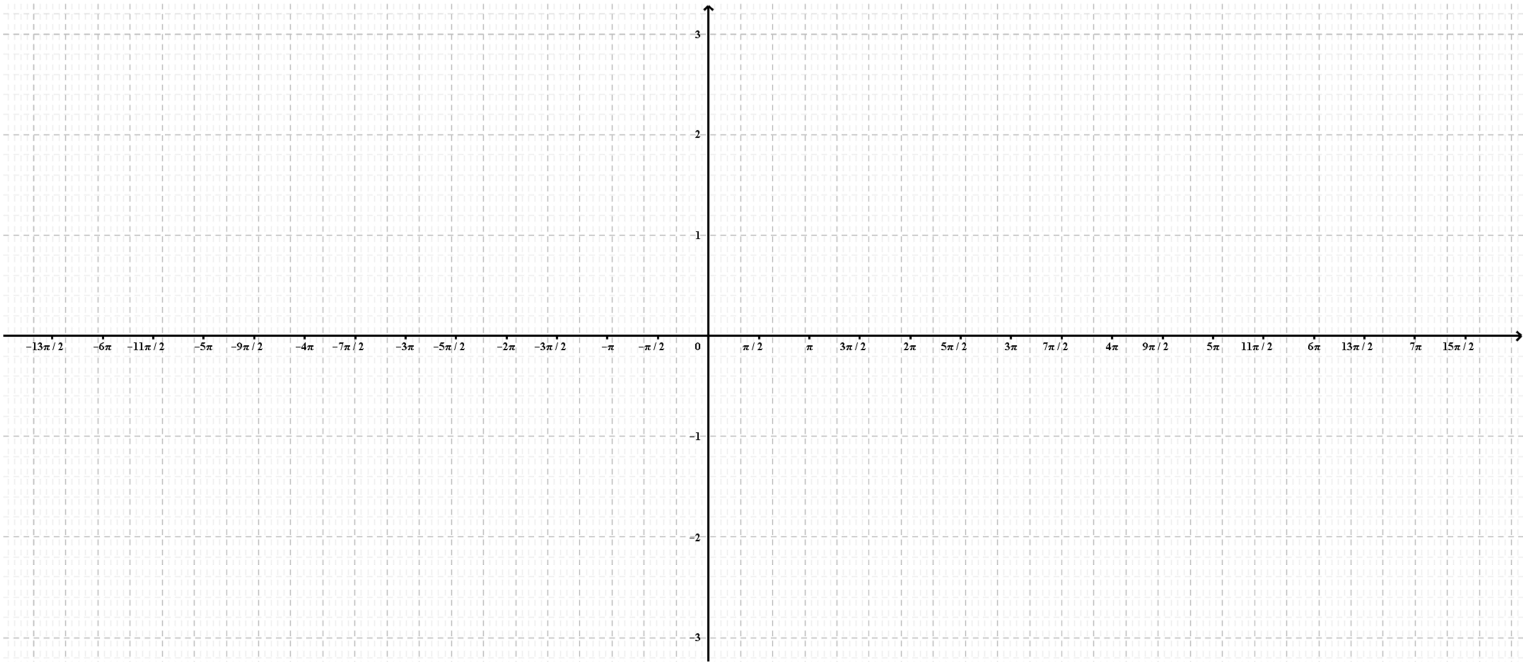
$\frac{3\pi}{10}>\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{6}$ συνx ↓

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{10}\right)<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{10}\right)<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$

AXIS

Δευτέρα, 21 Δεκεμβρίου 2020   11:49 πμ



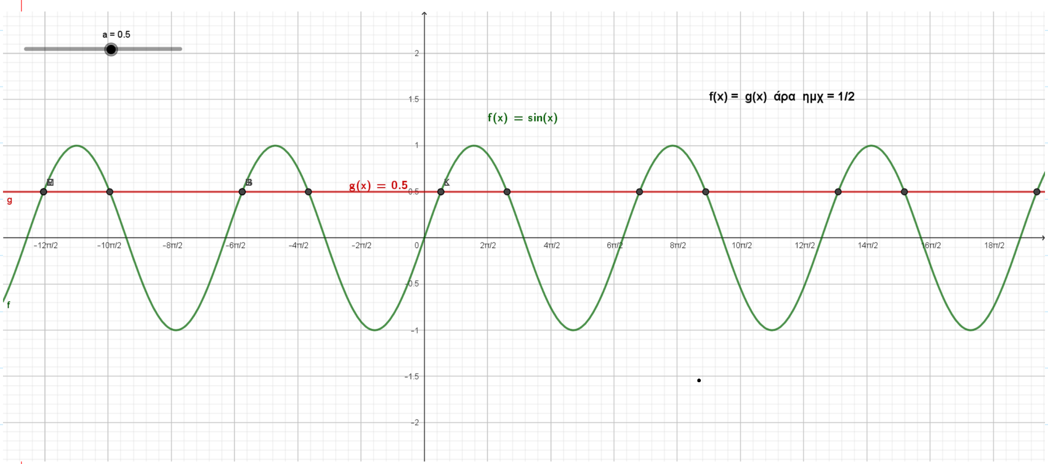
Γιατί; Μέχρι τώρα είχα μάθει να βρίσκω δοσμένης μίας γωνίας, όλους τους τριγων. αριθμούς της

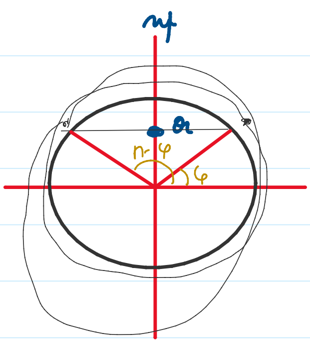
Τώρα θα μάθω και το ανάποδο

δοσμένου ενός τριγ. αριθμού πχ $ημx = \frac{1}{2}$ θέλω όλες τις γωνίες που το δίνουν

Στο μαθηματικό κομμάτι: η διαδικασία αφορά την τομή της συνάρτησης $f(x) = ημx$, $g(x) = \frac{1}{2}$

ψάχνω $f(x) = g(x)$ (σημεία τομής





για ένα κύκλο

$$ημx = α \Leftrightarrow \begin{cases} x = φ \\ ή \\ x = π - φ \end{cases}$$

για πολλούς κύκλους

$$x = \begin{cases} 2κπ + φ \\ ή \\ 2κπ + π - φ \end{cases} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

$$ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2κπ + \frac{π}{6} \\ ή \\ 2κπ + π - \frac{π}{6} \end{cases} κ \in \mathbb{Z} = \begin{cases} 2κπ + \frac{π}{6} \\ ή \\ 2κπ + \frac{5π}{6} \end{cases} κ \in \mathbb{Z}$$

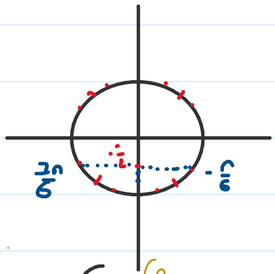
συν(x) =

$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6}$

$-\eta\mu(x) = \eta\mu(-x)$

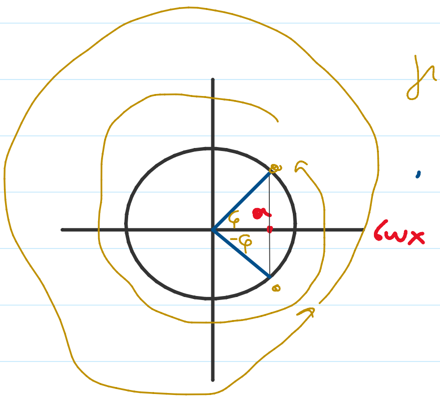
$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} =$

$x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



Η εξίσωση

$\sigma\upsilon\nu x = \alpha$



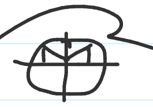
για ένα κύκλο:

$\sigma\upsilon\nu x = \alpha \Leftrightarrow x = \begin{cases} \varphi \\ -\varphi \end{cases}$

για περισσότερους $x = \begin{cases} 2k\pi + \varphi \\ 2k\pi - \varphi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$

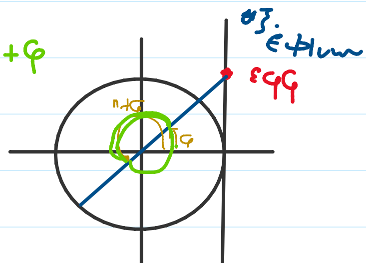


$-\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

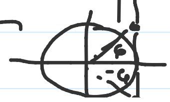
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \alpha \Leftrightarrow x = k\pi + \varphi$ $(T = \pi)$

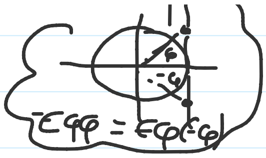


$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$



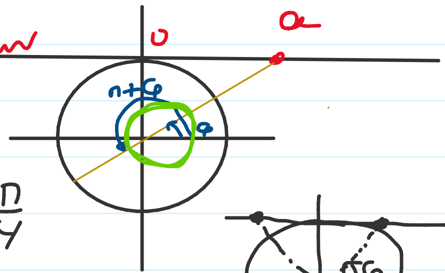
$x = \kappa\pi + \frac{11}{3} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$



$\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$
$\kappa \in \mathbb{Z}$

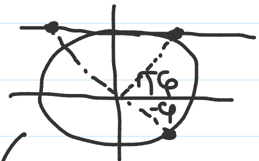
- $\sigma\varphi x = \alpha$ αξονδιμυν



$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \alpha$
$\kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{4}$

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$



$\sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(\sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ ή

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$
$\kappa \in \mathbb{Z}$.

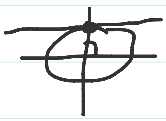
Ασκήσεις σχολικού

Α/6 ii λύστε

ii) (2συνx + 1)(εφ²x - 3)σφx = 0 (1)

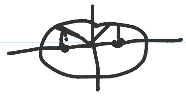
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \\ \text{ή} \\ \varepsilon\varphi^2 x - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ \sigma\varphi x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \text{ ή } \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ \sigma\varphi x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \text{ ή } \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \end{cases}$$



$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

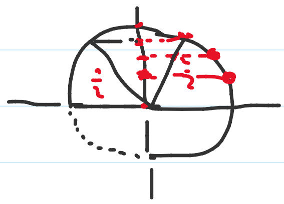


$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$
ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
ή
$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

ή $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$.

A/8/i Λύστε



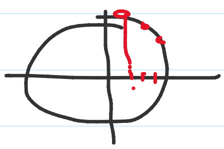
i) 2ημ3x = √3 (1)

Η (1) $\Leftrightarrow$ $ημ3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$ημ3x = ημ\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ ή \\ 3x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{2\pi/3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{\pi}{9} \\ x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{2\pi}{9} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

A/9/ii Λύστε



ii) 2συν (3x - π/4) = 1 (1)

Είναι (1) $\Leftrightarrow$ $συν\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συν\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ ή \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} \right)$ $\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{-4\pi + 3\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} \right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{7\pi}{36} \\ ή \\ x = \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{36} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

A/10 i/ Λύστε

i) 2ημ²ω + ημω - 1 = 0 (1) (Εξίσωση 2ου βαθμού ως προς ημω)

Θα λυθεί ως εξίσωση που αναγ...

(Θα λυθεί ως εξίσωση που ανάγεται σε εξ. δευτ. τριωνύμου)

Θέτω $u=ημω$

άρα $-1\le ημω \le 1$ πρέπει $-1\le u\le 1$

$β=1,\ α=2,\ γ=-1$

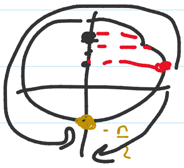
Επο $(1) \Leftrightarrow 2u^2+u-1=0$ $\quad Δ=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9$

$u_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$

Άρα $u_{1,2}=\dfrac{1}{2}$, -1 δεκτές $-1\le u\le 1$

Άρα $ημω=\dfrac{1}{2}$ ή $ημω=-1 \Leftrightarrow$

$ημω=ημ\dfrac{π}{6}$ ή $ημω=-ημ\dfrac{π}{2} \Leftrightarrow$



$\dfrac{3π}{2}$

$ημω=ημ\dfrac{π}{6}$ ή $ημω=ημ\left(-\dfrac{π}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} ω=2κπ+\frac{π}{6} \\ ω=2κπ+π-\frac{π}{6} \\ ω=2κπ-\frac{π}{2} \\ ω=2κπ+π-\left(-\frac{π}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ω=2κπ+\frac{π}{6} \\ ω=2κπ+\frac{5π}{6} \\ ω=2κπ-\frac{π}{2} \\ ω=2κπ+\frac{3π}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} ω=2κπ+\frac{π}{6} \\ ω=2κπ+\frac{5π}{6} \\ ω=2κπ-\frac{π}{2} \end{cases}$ $κ\in\mathbb{Z}$

A/11/ii

ii) εφx·σφ2x = 1 (1)

Ξέρω $σφ2x=\dfrac{1}{εφ2x}$

$(1) \Leftrightarrow εφx\cdot\dfrac{1}{εφ2x}=1$

πρέπει $εφ2x\ne 0$
$\Leftrightarrow εφ2x\ne εφ0 \Leftrightarrow$
$2x\ne κπ \Leftrightarrow$
$x\ne\dfrac{κπ}{2}$ $κ\in\mathbb{Z}$

Περιπτώσεις εξίσωσης που χρειάζονται διαχείριση προκειμένου να φτάσουν σε μορφές $(\ )\cdot(\ )\cdot(\ )\cdots(\ )=0$ ή σε μορφές τριωνύμου για να λυθούν

Επιβεβαιώνουμε και την εμπειρία των αποδεικτικών ασκήσεων προκειμένου να τις λύσουμε

η $(1) \Leftrightarrow \dfrac{εφx}{εφ2x}=1 \Leftrightarrow εφx=εφ2x \Leftrightarrow$

$x=κπ+2x \Leftrightarrow -x=κπ \Leftrightarrow x=-κπ$ $\quad κ\in\mathbb{Z}$

i) Λύστε

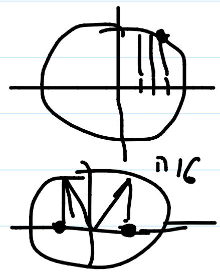
i) ημ²x + 5συν²x = 4 (1)

Γνωρίζω $ημ^2x + συν^2x = 1 \iff ημ^2x = 1 - συν^2x$

η (1) $\iff 1 - συν^2x + 5συν^2x = 4 \iff 4συν^2x = 3 \iff συν^2x = \frac{3}{4}$

$\iff συνx = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \iff συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \iff$

$$\left.\begin{array}{l} συνx = συν\frac{π}{6} \\ συνx = -συν\frac{π}{6} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} συνx = συν\frac{π}{6} \\ ή \\ συνx = συν(\underbrace{π - \frac{π}{6}}_{\frac{5π}{6}}) \end{array}\right.$$



$$\iff \begin{cases} x = 2κπ \pm \frac{π}{6} \\ ή \\ x = 2κπ \pm \frac{5π}{6} \end{cases} \quad κ \in \mathbb{Z}.$$

4/12 /

Να βρείτε για ποιες τιμές του x, καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:

$f(x) = 3ημ\left(x - \frac{π}{2}\right)$, $0 \le x < 2π$

Μέγιστη η f παρουσιάζει στο 3 αφού

$-1 \le ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) \le 1 \overset{\cdot 3}{\iff} -3 \le 3ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) \le 3.$

$-3 \le f(x) \le 3$

Επειδή αυτό συμβαίνει όταν $ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) = 1 \iff$

$$ημ\left(x - \frac{π}{2}\right) = ημ\frac{π}{2} \iff \begin{cases} x - \frac{π}{2} = 2κπ + \frac{π}{2} \\ x - \frac{π}{2} = 2κπ + \underbrace{π - \frac{π}{2}}_{\frac{π}{2}} \end{cases}$$

$\iff x - \frac{π}{2} = 2κπ + \frac{π}{2} \iff x = 2κπ + π$

αφού $0 \le x < 2π$ $κ = 0$

(Δεν έχουμε καμία [illegible])

και x = π [illegible]

(Δεν έχουμε κανένα κομμάτι!)

Άρα $x=\pi$

Ελάχιστο ημf έχει -3

και προκύπτει όταν $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{2}=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \\ x-\frac{\pi}{2}=2k\pi+\pi-\frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\underbrace{\pi-\frac{3\pi}{2}}_{-\frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+2\pi \\ \text{ή} \\ x=2k\pi \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$x=2\pi$ απορ. → οπότε $k=0$

$x=0$ δεκτή. $0\leq x<2\pi$

4/13

Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο S = 75 + 50·ημ$\frac{\pi t}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες και με t = 1 να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

i)
Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια, 100 χιλ. χιλιάδες

ii)
Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

$S=100 \Leftrightarrow$

$75+50\eta\mu\frac{\pi t}{6}=100 \Leftrightarrow$

$50\eta\mu\frac{\pi t}{6}=25 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi t}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi t}{6}=\eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{\pi t}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi t}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{6}{\pi}\cdot 2k\pi+\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3} \\ t=\frac{6}{\pi}\cdot 2k\pi+\frac{6}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=12k+2 & \text{Φλεβάρης} \\ \text{ή} \\ t=12k+4 & \text{Απρίλης} \end{cases}$

Άρα οι πωλήσεις φτάνουν 100.000 Φλεβ., Απρίλη

ii) S_{max} t_j

4η Σελίδα τj Τρεις

Άρα ως γνωστόν

$-1 \leq \eta\mu\frac{\pi t}{6} \leq 1 \overset{\cdot 50}{\Leftrightarrow} -50 \leq 50\eta\mu\frac{\pi t}{6} \leq 50$

$\overset{+75}{\Leftrightarrow} \quad 25 \leq 75 + 50\eta\mu\frac{\pi t}{6} \leq 125.$

Άρα μέγιστο : 125 χιλ. κατοίκους

και συμβαίνει όταν $\eta\mu\frac{\pi t}{6} = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\frac{\pi t}{6} = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{2}}_{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{6}{\pi} \cdot 2k\pi + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 12k + 3$ Μάρτιος $k \in \mathbb{Z}$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) ημx + συν ($\frac{\pi}{4}$ - x) = 0 (1)

Άρα $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(1) $\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) (\Leftarrow)$

$\{ -\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha) \}$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} + x \end{cases} \Leftrightarrow$

:-) tip

όταν προκύπτει μορφή

ημ x = συν x

γνωρίζω μέθοδο

την ανάγω σε ίδιο

τριγ.

για να λύνουν διο ομοίως

π.χ. $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Έτσι $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + x \\ \quad\quad ή \quad\quad και λύνω \\ \frac{\pi}{2} - \cancel{x} = 2k\pi - \cancel{x} \end{cases}$

ως προς x...

$\{ -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} + x \\ \cancel{\frac{\pi}{2} - x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

απορρίπτεται

$$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi + \frac{3\pi - 2\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ως για x...

$$\begin{cases} -2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

αντίθετα του x απορρίπτεται

$$x = -k\pi + \frac{\pi}{8} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ασκήσεις εξισώσεων που αφορούν στην επιλογή του κ προκειμένου να "φιλτράρουμε" συγκεκριμένες τιμές λύσεων

Συνήθως ζητείται η λύση εξίσωσης μέσα σε διάστημα τιμών.

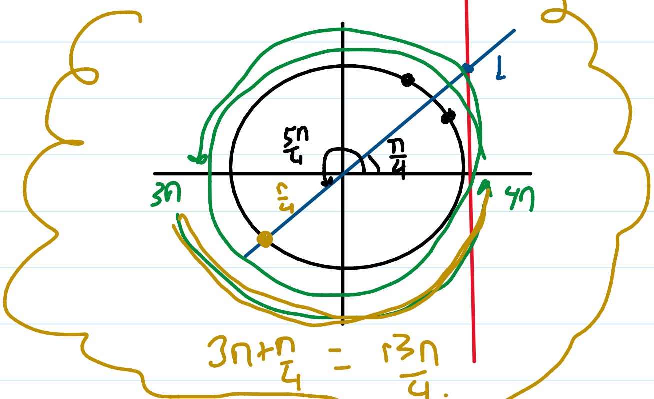
- λύνω την εξίσωση
- τοποθετώ τις λύσεις στο δοθέν διάστημα και λύνω ως προς κ. (Δεν ξεχνώ ότι $k \in \mathbb{Z}$)
- Μετά την εύρεση των κ αντικαθιστώ στις λύσεις και προκύπτουν τα ζητούμενα x...

3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης εφx = 1 στο διάστημα (3π, 4π).

$$\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Αρχική Ορθή Σκέψη.



$$3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}.$$

αλλά $x \in (3\pi, 4\pi)$

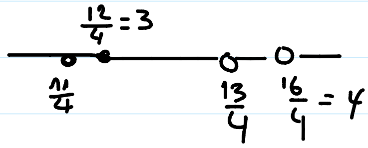
επειδή

$$3\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow$$

λύνω ως προς κ...

$$3\pi < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 3\pi < k\pi < 4\pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{11\pi}{4} < k\pi < \frac{13\pi}{4}$$

$\overset{:\pi}{\Leftrightarrow}$ $\frac{11}{4} < k < \frac{13}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$



$k = 3$

Άρα $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ για $k=3$ γίνεται

$x = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$.

*4. Να λύσετε την εξίσωση 1 + συνx = ημx στο διάστημα [0, 2π).

Είναι $1 + συν x = ημx$. $\Rightarrow$ $(1+συνx)^2 = ημ^2 x$ $\Leftrightarrow$

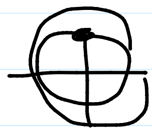
$1 + 2συνx + συν^2x = ημ^2x$ → ξέρω → $1 - συν^2x$ $\Leftrightarrow$

$1 + 2συνx + συν^2x + συν^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2συν^2x + 2συνx = 0 \Leftrightarrow$

$συνx(συνx + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} συνx = 0 \\ συνx = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $συνx = συν\frac{\pi}{2}$ ή $συνx = συν\pi$ $\Leftrightarrow$ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2k\pi \pm \pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

$x \in [0, 2\pi)$



- $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k=0$ $x = \frac{\pi}{2}$
- $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $k=0$ Απορρίπτεται
- $x = 2k\pi + \pi$ $k=0$ $x = \pi$
- $x = 2k\pi - \pi$ απορρίπτεται

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τρίτη, 19 Ιανουαρίου 2021 11:22 πμ

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-17693 §3.4

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$συν\frac{\pi}{6}, συν\frac{\pi}{4}, συν\frac{17\pi}{10}$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

(Μονάδες 13)

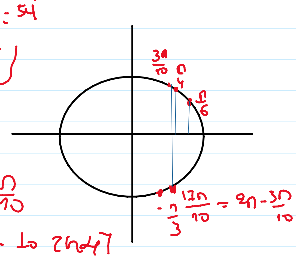
$\frac{3\cdot 180}{10} = 54$

$\frac{17\pi}{10} = \frac{20\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = 2\pi - \frac{3\pi}{10}$ {54°}

Παρατηρώ $συν\frac{17\pi}{10} = συν\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right)$

$= συν\left(-\frac{3\pi}{10}\right) = συν\frac{3\pi}{10}$

Άρα $\frac{3\pi}{10} > \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{6}$ στο 1ο τεταρτ.



συνx ↓ Επί. $συν\frac{3\pi}{10} < συν\frac{\pi}{4} < συν\frac{\pi}{6} \Rightarrow συν\frac{17\pi}{10} < συν\frac{\pi}{4} < συν\frac{\pi}{6}$

β) $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ νδο $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$; $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

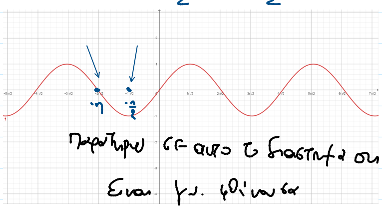
σχέση;

τρόπος i

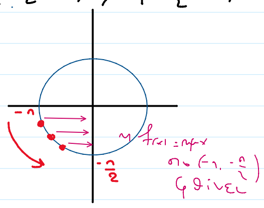
$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -\pi > -x_1 > -x_2 > -\frac{3\pi}{2}$ ή

$-\frac{3\pi}{2} < -x_2 < -x_1 < -\pi \overset{+\frac{\pi}{2}}{\Longleftrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x_2 < \frac{\pi}{2} - x_1 < \frac{\pi}{2} - \pi$

$-\pi < \frac{\pi}{2} - x_2 < \frac{\pi}{2} - x_1 < -\frac{\pi}{2}$ Άρα $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) > ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$



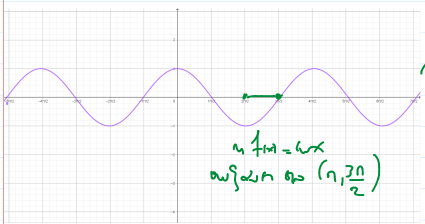
ή



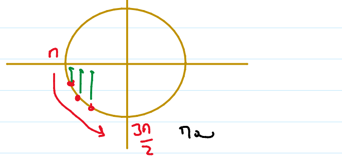
τρόπος ii

$ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = συν x_1$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) = συν x_1$

$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow συν x_1 < συν x_2$ ή $ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$



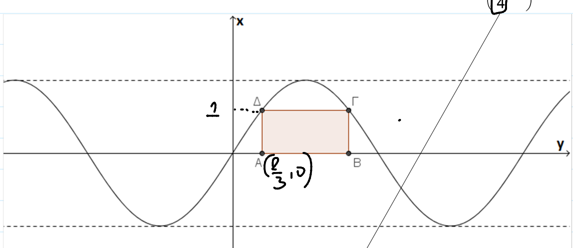
ή



Παρατηρώ ότι η f(x)=συνx
αύξουσα στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

13) ΑΣΚΗΣΗ 4-22691 §3.4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2ημ\left(\boxed{\frac{\pi}{4}} \cdot x\right)$



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 10)
ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 10)

α) $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Επί. $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

β) Αφού η τετμημένη του Α είναι $\frac{2}{3}$ ομοίως και του Δ

β) Αφού η τετμημένη του Α είναι $\frac{2}{3}$ όμοια και του Δ.
Άρα, στην f για $x=\frac{2}{3}$: $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)$
$= 2\eta\mu\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ Άρα $\Delta\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

Το Γ έχει ίδια τεταγμένη με Δ

Άρα $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4}x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{4}x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{\pi}\cdot\kappa\pi + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{8}{\pi}\cdot\kappa\pi + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8\kappa + \frac{2}{3} \\ x = 8\kappa + \frac{10}{3} \end{cases}$ και αφού $T=8$, $\kappa = 0$

Άρα $x_1 = \frac{2}{3}$ και $x_2 = \frac{10}{3}$

αντιστοιχεί στο Δ, αντιστοιχεί στο Γ. $\Gamma\left(\frac{10}{3}, 1\right)$

Το Β έχει ίδια τετμημένη με το Γ άρα $B\left(\frac{10}{3}, 0\right)$.

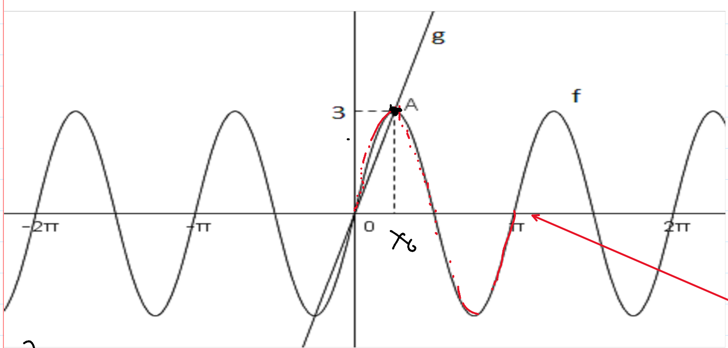
11) ΑΣΚΗΣΗ 4-20921

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$ και $\rho > 0$. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το IR. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$ (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα [0, π]. (Μονάδες 10)



α) · Η f είναι ημιτονοειδής και έχει περίοδο $T = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi$
$\Leftrightarrow 2\pi = \omega\pi \Leftrightarrow \omega = 2$

· Το μέγιστο της f είναι το 3 άρα $\rho = 3$.

Άρα $\boxed{f(x) = 3\eta\mu 2x}$

β) Έστω

για $\boxed{f(x) = 3ημ2x}$

β) Σκέψη: για να βρω τα α, β της g χρειάζομαι 2 σημεία για αυτή. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το O(0,0) αφού η g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η g τέμνει την f στο A και δε γνωρίζω τη θέση (x_0)

λύνω την εξίσωση $f(x) = 3 \Leftrightarrow 3ημ2x = 3 \Leftrightarrow$

$ημ2x = 1 \Leftrightarrow ημ2x = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = 2κπ + \pi/2 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{\pi}{4}$ $(κ \in \mathbb{Z})$

έτσι $x = \frac{\pi}{4}$ άρα $A(\frac{\pi}{4}, 3)$. $κ = 0$

η $g(x) = αx + β$ περνά από $(0,0)$

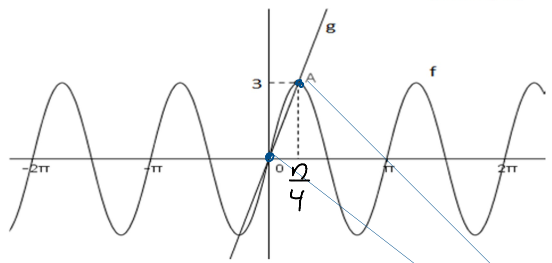
$0 = α \cdot 0 + β \Leftrightarrow β = 0$

περνά από $A(\frac{\pi}{4}, 3)$

$3 = α \cdot \frac{\pi}{4} + 0 \Leftrightarrow α = \frac{12}{\pi}$

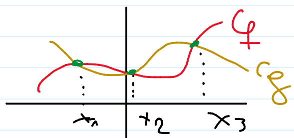
άρα $\boxed{g(x) = \frac{12}{\pi}x.}$

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3ημ(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα $[0, \pi]$.
(Μονάδες 10)



Τομή δύο συναρτήσεων

Εικόνα:



αλγεβρικά: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$x = x_1$ ή $x = x_2$ ή $x = x_3$

Ισχύει $3ημ2x - \frac{12x}{\pi} = 0$

$\Leftrightarrow 3ημ2x = \frac{12x}{\pi} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{4}$

IT!

8) ΑΣΚΗΣΗ 4-17841 §3.4

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6\cdot ημ\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)$ και $0 \le t \le 180$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

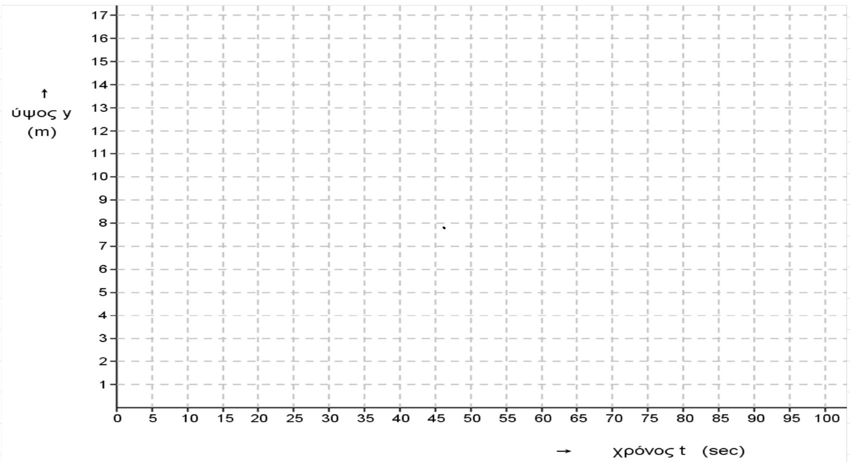
γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

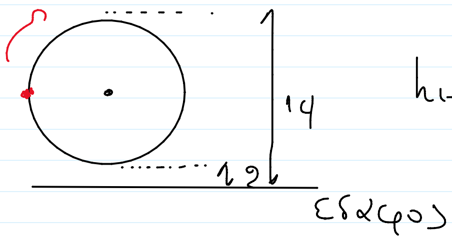
i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t) (Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$ (Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



Λύση



$h(t) = 8 + 6ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right)$

$0 \le t \le 180$

$-1 \le ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right) \le 1 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} -6 \le ημ\frac{\pi t}{30} \le 6 \Rightarrow$

$8-6 \le ημ\frac{\pi t}{30} \le 8+6 \Leftrightarrow \underline{2 \le h(x) \le 14}$

• <u>θέσεις μεγίστου</u> $h(x) = 14 \Leftrightarrow 8+6ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 14 \Leftrightarrow 6ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 6$

$ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 1 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{\pi t}{30}\right) = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$t = \frac{30}{\pi}\cdot 2\kappa\pi + \frac{30}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 60\kappa + 15$

<u>Επιλογή κ</u>

$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow 0 \le 60\kappa + 15 \le 180$

$\Leftrightarrow -15 \le 60\kappa \le 165 \Leftrightarrow -\underline{15} \le \kappa \le \underline{165}$

$0 \le t \le 180 \iff 0 \le 60k+15 \le 180$

$\iff -15 \le 60k \le 165 \iff -\frac{15}{60} \le k \le \frac{165}{60}$

$\{-0{,}25\}$ $\{2{,}7\}$

και αφού $k \in \mathbb{Z}$

$k=0,\ k=1,\ k=2$

Άρα για $k=0$, $k=1$, $k=2$

$t=15$, $t=75$, $t=135$

Θέσεις ελαχίστων

$$h(x)=2 \iff 8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)=2 \iff$$

$$6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -6 \iff \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -1$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \iff \frac{\pi t}{30} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{60\pi k}{\pi} - \frac{30}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \iff$$

$$t = 60k-15. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Επιλογή t

$0 \le t \le 180 \iff$

$0 \le 60k-15 \le 180 \iff$

$15 \le 60k \le 195 \iff \frac{15}{60} \le k \le \frac{195}{60} \iff$

$0{,}4 \le k \le 3{,}2 \quad k \in \mathbb{Z}$

Άρα $k=1,\ k=2,\ k=3$

$k=1$, $t=45$; $k=2$, $t=105$; $k=3$, $t=165$.

β) Παρατηρούμε ότι $f_{max}=14$, $f_{min}=2$

Επ. η διάμετρος της ρόδας $\delta = 14-2=12$

Άρα η ακτίνα $\rho = 6$.

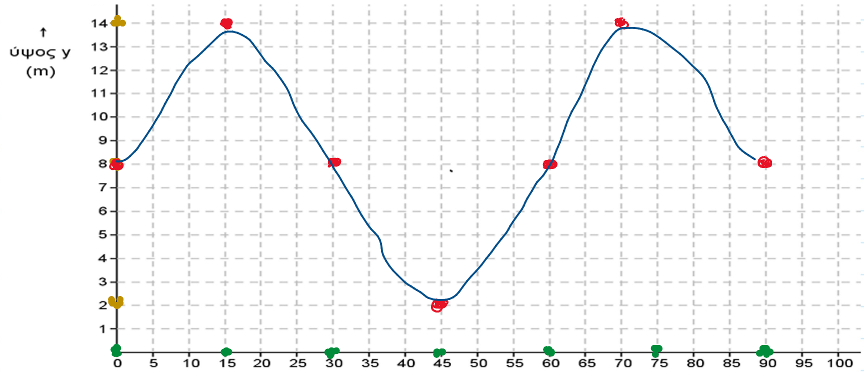
γ) Αφού $\alpha = \frac{\pi}{30}$ και $T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60$ sec

Συνεπώς μέσα σε 180 sec έχουμε 3 περιστροφές

δ)

t	0	15	30	45	60	75	90
$\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	0	1	0	-1	0	1	0
$6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	0	6	0	-6	0	6	0
$h(t)=8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$	8	14	8	2	8	14	8

$$h(t) = 8+6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$



ύψος y
(m)
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100

Τριγωνομετρικοί αριθμοι α+β

Παρασκευή, 22 Ιανουαρίου 2021 1:29 μμ

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$

$συν(α-β) = συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ$

$συν(α+β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ.$

A/1) i.

$συν\frac{\pi}{12} \cdot συν\frac{\pi}{4} - ημ\frac{\pi}{12} \cdot ημ\frac{\pi}{4} = συν\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)$

$= συν\left(\frac{\pi+3\pi}{12}\right) =$

$συν\frac{4\pi}{12} = συν\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημα$

$ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - συνα \cdot ημβ.$

A/1/iii

$ημ110^\circ \cdot ημ70^\circ - συν110^\circ \cdot συν70^\circ$

$= ημ(110^\circ - 70^\circ) = ημ40^\circ$

4/2/ii

$συν\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot συνx + ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot ημx$

$$= \text{συν}\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - x\right) = \text{συν}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A/4/i/

$$\text{ημ}\,\frac{17\pi}{18}\,\text{συν}\,\frac{4\pi}{9} - \text{συν}\,\frac{17\pi}{18}\cdot\text{ημ}\,\frac{4\pi}{9}$$

$$= \text{ημ}\left(\overset{1}{\frac{17\pi}{18}} - \overset{2}{\frac{4\pi}{9}}\right) =$$

$$= \text{ημ}\left(\frac{17\pi - 8\pi}{18}\right) = \text{ημ}\,\frac{9\pi}{18} = \text{ημ}\,\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{εφ}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha \pm \text{εφ}\beta}{1 \mp \text{εφ}\alpha\cdot\text{εφ}\beta}$$

A/4/iii/

$$\frac{\text{εφ}\,\frac{7\pi}{12} - \text{εφ}\,\frac{\pi}{4}}{1 + \text{εφ}\,\frac{7\pi}{12}\cdot\text{εφ}\,\frac{\pi}{4}} = \text{εφ}\left(\frac{7\pi}{12} - \overset{3}{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= \text{εφ}\left(\frac{4\pi}{12}\right) = \text{εφ}\,\frac{\pi}{4} = 1$$