

6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Α ΟΜΑΔΑ

1. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες και
 $f'(x) + g'(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)e^{g(x)}$ είναι σταθερή.
2. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες και
 $f'(x) + g'(x)f(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αν $h(x)e^{g(x)} = w'(x)$ και $f(a) = A$ βρείτε τον τύπο της f .
3. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = e$, $x^2 f'(x) + f(x) = 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση με
τύπο $g(x) = e^{-\frac{1}{x}} f(x)$ είναι σταθερή και έτσι βρείτε τον τύπο της f .
4. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = e^2, f'(x) = -4f(x)$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$
5. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = e$, $xf'(x) = 5f(x)$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$
6. Αν $f'(x) + f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = e$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$
7. Αν $f'(x) = af(x) + b \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = c$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$ όταν $abc \neq 0$
8. Αν $xf'(x) + 2f(x) = 3x \quad \forall x > 0$, $f(1) = 1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
9. Αν $4f'(x) = (f(x))^5 \neq 0, \forall x < 1$, $f(0) = 1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$
10. Αν $f(x) + x^2 + \eta\mu x = f'(x) + 2x + \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$
11. Αν $xf'(x) + f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
12. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h στο $(0, +\infty)$ αν είναι γνωστό ότι ισχύουν
$$e^{h(x)} = \frac{1}{h'(x)}, h(1) = 0, x > 0$$
13. Αν $f(x)f'(x) = 2x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
14. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, $f(x) > 0, f(1) = 15$,
 $f'(x) = f(x)\ln[f(x)]$. Βρείτε τον τύπο της.
15. Αν $f'(x) = [4 - f(x)]^2 \quad \forall x > -1$, $f(0) = 3, f(x) \neq 4 \quad \forall x > -1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
16. Αν $f'(x) = g(x), f(x) = g'(x), f(0) = 1, g(0) = 0, g(2) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
i) Δείξτε ότι $f^2(x) - g^2(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
ii) Αν $kf(x) + mg(x) = 0 \Rightarrow k = m = 0$
17. Αν $f'(x) = f(x) + g(x), g'(x) = g(x) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0, g(0) = 1$ να δείξετε ότι η
συνάρτηση $[e^{-x}f(x) - \eta\mu x]^2 + [e^{-x}f'(x) - \sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο των
 $f(x), g(x)$
18. Αν $2f'(x)f''(x) = (f'(x) - f(x))^2$ και $f(0) = f'(0) = 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση
 $g(x) = e^{-x}([f(x)]^2 + [f'(x)]^2)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

19. Αν $xf''(x) + f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) = 1$. Βρείτε τον τύπο της
20. ι) Να δείξετε την ισοδυναμία $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x, \forall x \in \mathbb{R}$
 υ) Αν $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0, g'(0) = g(0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$
21. Αν $f'(x) = g(x), f(x) = -g'(x), f(0) = 0, g(0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
 i) Δείξτε ότι $f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
 ii) Αν οι συναρτήσεις $F(x), G(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με τις $f(x), g(x)$ δείξτε ότι η συνάρτηση $[F(x) - f(x)]^2 + [G(x) - g(x)]^2$ είναι σταθερή.
 iii) Δείξτε ότι $F(x) = f(x), G(x) = g(x)$
 iv) Δείξτε ότι $f(x) = \eta \mu x, g(x) = \sigma \nu x$
22. Αν $f(x+y) = f(y) + f(x) + 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f'(0) = 2$
 δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε τον τύπο της.
23. Αν $f(x+y) = f(y) + f(x) + 3xy(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ και $\exists f'(x), \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 1$ βρείτε τον τύπο της.
24. Αν $f(xy) + x + y = f(y) + f(x) + xy + 1 \quad \forall x, y > 0, f'(1) = 2$
 δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0, +\infty)$ και βρείτε τον τύπο της
25. Αν $f(x+y) = f(y)\sigma \nu x + f(x)\sigma \nu y, f'(0) = 1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε τον τύπο της
26. Αν $f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad \forall x, y \in (0, +\infty), f'(1) = 2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0, +\infty)$ και βρείτε τον τύπο της
27. Αν $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + xg(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ βρείτε τον τύπο της.
28. Αν $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f'(0) = 2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε τον τύπο της.
29. Αν $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) + 2xye^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ με $f'(0) = 2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε τον τύπο της.
30. Αν $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, βρείτε τον τύπο της όταν $f'(0) = 2, f(0) = 1$. Χρησιμοποιείτε το προηγούμενο συμπέρασμα ή άλλον τρόπο για να βρείτε στην συνέχεια τον τύπο μιας συνάρτησης. $g(x)$ όταν
 ισχύουν: $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{g(x)g(y)}, g(x) > 0, g(0) = g'(0) = e \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, με την g να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^*$
31. Αν $f(x+y) + e^{x+y} = e^x f(y) + e^y f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f$
 παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
32. Αν $|f(x) - f(y)| \leq 1 - \sigma \nu(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε τον τύπο της.

33. Αν $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ και $f(0)=5$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

Β ΟΜΑΔΑ

1. Αν $xf'(x) - f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1)=3$, βρείτε τον τύπο της f

2. Αν $f''(x)\eta\mu x + f(x)\eta\mu x = \eta\mu 2x$ στο $(0, \pi)$, $f(0)=0$, $f(\pi/2)=\pi/2$, f' συνεχής στο $[0, \pi]$ Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ στο $[0, \pi]$

(Μην απλοποιήσετε με $\eta\mu x$)

3. Αν $xf'(x) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ τότε δείξτε ότι $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f'(0)=0$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, $f''(0)=4$,

f' παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, $xf''(x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f'' συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$, f''

παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}^*$, Με την βοήθεια του Θ-M-T δείξτε $f''(x)=4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, και βρείτε τον τύπο της $f(x)$

4. Αν $f'(x)f(1-x)=1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1)=e$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

5. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της A τέμνει τον άξονα x στο σημείο B και Γ είναι η προβολή του A στον άξονα x . Αν το σημείο $(0,0)$ είναι το μέσον του $B\Gamma$ και $f(1)=1$ να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της A τέμνει τον άξονα x στο σημείο B και Γ είναι η προβολή του A στον άξονα x . Αν $\varepsilon\phi(\hat{B\hat{A}\Gamma}) = \frac{1}{4}$ και $f(1)=2$ να βρεθεί ο τύπος της

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f σε κάθε σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, $x_0 \neq 0$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$ και είναι $f(1)=1$, $f(-1)=1$ να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

8. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη συνάρτηση $f'(x) < 0$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της A τέμνει τον άξονα x στο σημείο B και Γ είναι η προβολή του A στον άξονα x . Αν $(AB\Gamma)=1/2$ και $f(1)=1$ να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

9. Αν $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f με τον άξονα $y'y$ να είναι πάντοτε το μέσον των σημείων επαφής και του σημείου που η εφαπτομένη τέμνει τον $x'x$ και επιπλέον $f(1)=1$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

12. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(1)=1$, $xf(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f'(x)}$. Δείξτε ότι $\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}$ και βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

13. Αν $f''(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(0)=0$, $f(0)=0$ βρείτε τον τύπο της. Όμοια αν $f''(x) = 9f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(0)=3$, $f(0)=1$

15. Αν $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ $f(a)=0$, $f'(0)=1$, $f'(a)=0$, δείξτε ότι
- i) $f(0)=0, f(2a)=0, f(x+2a)=f(x)f(-a)$,
- ii) $f(x+4na)=f(x)$
- iii) f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και περιττή
 $f'(x)=f(a-x)$, $f'(a-x)=f(x)$, $f^2(x)+f^2(a-x)=1$
- iv) $f''(x)+f(x)=0$
16. Αν $f(x)-f(y)=(y-x)f(x)f(y)$ στο R^* , f συνεχής στο R^* δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και βρείτε τον τύπο της όταν $f(1)=1$, $f(-1)=-1$
20. Αν $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ $f'(0)=2$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και περιττή

7 MONOTONIA

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

2. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

3. $f(x)=x \ln x$

4. $f(x)=1+x+\ln(1+x^2)$

5. $f(x)=2\ln|x|+\frac{1}{x}-x$

6. $f(x)=x^2 e^x$

7. $f(x)=(x^3-x^2-x+1)e^x$

8. $f(x)=e^{2x}+3e^x-5x+1$

9. $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$

10. $f(x)=3x^2-x^3-2+\sqrt{1-x^2}(x^2-1)$

11. $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \eta\mu^2 \frac{\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$13. \quad f(x) = |x+1| + \frac{2}{x}$$

17. Δείξτε ότι η $f: f(x) = x^5 + 2x + 3$ είναι 1-1. Βρείτε και το σύνολο τιμών της f .

18. Αν $e^a + a = e^b + b$, δείξτε ότι $a = b$. Βρείτε την $f: e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

$$19. \quad f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad x > 1$$

$$20. \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \quad x \in (0, \pi/2)$$

Αν $x^2 f'(x) = f^2(x) \forall x \in [1, +\infty)$, $f(1) = 1$ δείξτε ότι $f(x) \geq 1 \forall x \in [1, +\infty)$ και βρείτε την $f(x)$.

9. Αν $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(x) > 0 \forall x \in [0, +\infty)$

μελετήστε ως προς την μονοτονία την $f(x)$, $x \in [0, +\infty)$

10. Έστω $f: f^{(3)}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2} f''(x)$. Μελετήστε τη μονοτονία της g

στο $\mathbb{R}$ και δείξτε ότι: $f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2} f''(x) > f(0), \forall x > 0$

11. Είναι: $f(0) = 0$, f συνεχής στο $\mathbb{R}$, f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^+$. Μελετήστε τη μονοτονία της $g(x) = f(x)/x$ στο $\mathbb{R}^+$

12. Έστω $f: f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Μελετήστε τη μονοτονία της g στο (a, b) .

13. Αν $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = -\infty$. Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία στο (a, b) .

14. Αν $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f(a) = f(b)$. Μελετήστε τη μονοτονία της f στο $[a, b]$.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δειχθούν οι παρακάτω ανισώσεις

1. $\frac{a-b}{a} \leq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leq \frac{a-b}{b} \quad \forall, a > 0, b > 0$
2. $\frac{a-b}{\sin^2 b} < \varepsilon \phi a - \varepsilon \phi b < \frac{a-b}{\sin^2 a} \quad \text{όταν } 0 < b < a < \pi/2$
3. $\nu \beta^{\nu-1}(\alpha-\beta) < \alpha^\nu - \beta^\nu < \nu \alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta) \quad \text{όταν } \alpha, \beta > 0$
4. $\text{Αν } 0 < a < b \Rightarrow \ln \frac{a}{b} > \frac{a^2 - b^2}{2ab}$
5. $ae^{-bx} - be^{-ax} \geq a - b \quad \text{όταν } x > 0, 0 < a < b$
6. $\frac{\varepsilon \phi a}{\varepsilon \phi b} > \frac{b}{a} \quad \text{όταν } 0 < b < a < \pi/2$
7. $\frac{a-1}{a} \leq \ln a \leq a-1 \quad \forall, a > 0$
8. $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$
9. $\frac{1}{1+a} < \ln\left(1+\frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a} \quad \forall a > 0$
10. $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, 0 < a < b < e \Rightarrow f(b) < \frac{b \ln a - a \ln b}{ab(a-b)} < f(a)$
21. Να δειχτεί ότι: $\ln(x^2 + 1) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα $\ln(x^2 + 1) = x$;
22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$.
 i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 ii) Να δειχτεί ότι $x^2 \geq 2e \cdot \ln x, x > 0$.

Δείξτε ότι

24. $\ln x > \frac{2x-2}{x+1} \quad \text{για } x > 1$
25. $2a \ln a \leq (a+1)(a^2+1), \forall a \geq 1$
26. $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$
27. $(1+a)^x \geq 1+ax, \quad \forall x \geq 1, a > -1$
28. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $m: e^x \geq mx^2, \forall x > 0$

Να δειχθεί ότι:

29. $x^x \geq e^{x-1}, \quad \forall x > 0$
30. $x^a e^{-x} \leq \left(\frac{a}{e}\right)^a \quad \forall x, a \in [0, +\infty)$

31. $\left(\frac{ea}{b}\right)^a < e^b$ όταν $0 < a < b$
32. $e^\pi > \pi^e$
33. $e^e \pi^\pi > e^{2\pi}$
34. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
35. $\pi \eta \mu x \geq 2x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$
36. $\eta \mu(a+b) < \eta \mu a + b \sigma \upsilon \nu a$ όταν $0 < a < a+\beta < \pi/2$
37. $\frac{3x}{\eta \mu x} > 4 - \sigma \upsilon \nu x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$
38. $\eta \mu x + \epsilon \phi x > 2x$ $\forall x \in (0, \pi/2)$
39. $\eta \mu x > x - \frac{x^3}{6}$ $\forall x > 0$
41. $\epsilon \phi x < \frac{\pi x}{\pi - 2x}$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
42. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ και $f''(\chi) > 0$ $\forall \chi \in [\alpha, \beta]$, ναδειχθεί ότι $f(\chi) < 1$ $\forall \chi \in \mathbb{R}$.
43. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$
44. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(\chi) < 0$ $\forall \chi \in \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $f(\chi) \leq f'(a)(\chi - a) + f(a)$ $\forall \chi \in \mathbb{R}$
45. Αν είναι $x, f'(x) \geq 1 + x$ $\forall x \in [1, e]$, $f(1) = 1$, $f(e) = 1 + e$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο $[1, e]$
46. Ναδειχθεί ότι, αν $f''(x) < 0$ $\forall x \in [a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, τότε θα ισχύει $f(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$ **(Βασική άσκηση που θα χρησιμεύσει στα επόμενα.. Π.χ στην κυρτότητα κ.ο.κ)**
47. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in [1, 3]$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$. Δείξτε $f(x) < x - 2$ $\forall x \in (1, 2)$ ενώ $f(x) > x - 2$ $\forall x \in (2, 3)$
48. Ναδειχθεί ότι, αν $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, $f(v) = v$, τότε $f(x) \geq x$ $\forall x \in [0, v]$
49. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $6f(7) < 5f(6) + f(12)$
50. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $3f(5a) < f(3a) + 2f(6a)$, $\forall a > 0$

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

51. $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 \geq 0$
52. $(x^2 + e)^{x^4+e} \geq (x^4 + e)^{x^2+e}$
53. $(3^x + 4^x)^3 - 5^x > 125^x - 3^x - 4^x$

$$54. \quad 2\sqrt{x-e^4} > \sqrt{\ln(x-1)}$$

$$55. \quad x > 1 + e^{2-x}$$

$$56. \quad \pi\eta\mu\sqrt{x} > 4\sqrt{x}$$

$$57. \quad \ln^2 2 + e^x + e^{-x} > x^2 + \frac{5}{2}$$

$$58. \text{ Να λύσετε την ανίσωση } (2^{x-1} + 3^{x-1}) \cdot 5^{1-3x} < (2^{1-3x} + 3^{1-3x}) \cdot 5^{x-1}$$

Β ΟΜΑΔΑ

$$1. \quad \text{Να δείξετε ότι } (a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq a \ln a + b \ln b \quad \forall a, b > 0$$

$$2. \quad \text{Αν } a > 0, b > 0, a+b=1, x > 0, y > 0 \text{ δείξτε ότι } x^a y^b \leq ax + by$$

$$3. \quad \text{Δείξτε ότι } (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) < x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$6. \quad \text{Αν } f(x) = \eta\mu x, 0 < x \leq 1 \text{ τότε δείξτε ότι } f(x) + f^{-1}(x) > 2x, \forall x \in (0, 1]$$

$$7. \quad \text{Αν } f'(x) > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f(0) = 0 \text{ δείξτε ότι } f(x) + f(-x) > 2\eta\mu x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8. \quad \text{Δείξτε ότι } \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (0, \pi/2)$$

$$13. \quad \text{Αν } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, a < b \text{ δείξτε ότι } f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \text{ και}$$

$$f(x) < f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \text{ όταν } x \in (a, b). \text{ Δείξτε ακόμη ότι οι προηγούμενες ανισότητες}$$

γίνονται ισότητες για $x = a, x = b$. Τέλος δείξτε ότι αλλάζουν φορά όταν $x \notin [a, b]$.

$$14. \quad \text{Αν } f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 3, f(3) = 6 \text{ τότε δείξτε ότι: } f(x) > x + 3 \quad \forall x > 3 \text{ ενώ}$$

$$f(x) < x + 3 \quad \forall x \in (0, 3)$$

$$15. \quad \text{Αν } f''(x) < 0 \quad \forall x \in [-1, 2], f(-1) = -2, f(1) = 0 \text{ τότε δείξτε ότι: } f(0) > -1 \text{ ενώ } f(2) < 1$$

$$16. \quad \text{Αν } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty, f'(x) \leq (f(x))^2$$

, f αύξουσα, η f έχει συνεχή παράγωγο και ακόμη $f(a) = 1$, τότε δείξτε ότι $b - a \geq 1$

$$17. \quad \text{Αν } f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, a < b < c < d, a + d = b + c, \text{ δείξτε ότι } f(a) + f(d) > f(b) + f(c)$$

$$18. \quad \text{Αν } f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ τότε οποιαδήποτε «χορδή» } AB \text{ βρίσκεται «επάνω» από το αντίστοιχο τμήμα της } C_f$$

(Διάσχημο συμπίερασμα που θα μπορούσε να ορίσει τις κυρτές συναρτήσεις.)

$$19. \quad \text{Αν } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ δείξτε } 3f(1) < f(-3) + f(0) + f(6)$$

$$20. \quad \text{Αν } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ δείξτε ότι } (a+b)f\left(\frac{b-a}{b+a}\right) < af(-1) + bf(1), \forall a, b > 0$$

21. Αν $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
22. Αν f'' συνεχής, $f(x) \geq 0$ στο (a, b) , $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, x_0 στο (a, b) . Τότε να δείξετε ότι $f''(x_0)$ είναι μη αρνητικός αριθμός. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν ισχύει $1 + \sin(ax) \geq \sin(bx) + \sin(cx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ τότε θα είναι $b^2 + c^2 \geq a^2$
23. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$, να δείξετε ότι $\frac{1}{2} f(x) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ΡΙΖΕΣ - ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΛΟΜΑΛΑ

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς λύση

1. $2^{x+1} + 53^{x-1} - 9^x = 0$
2. $a^x + b^x = (a+b)^x, a > 0, b > 0$
3. $3^x + 4^x = 5^x$
(τι θυμίζονται τα 3, 4, 5?)
4. $xe^x = e^x - 1$
5. $x + e^x = 0$
6. $e^x = ax + 2$
7. $\ln x + e^{x-1} = 2 - x$
8. $\ln x = e - x$
9. $e^x \cdot [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] = 1$
10. $\sin x = 2x - \pi$
11. $a_1^2(b_1 - x) + a_2^2(b_2 - x) + \dots + a_n^2(b_n - x) = x + x^3 + \dots + x^{2n+1}$
12. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $f(a) = g(b), f(b) = g(a), a < b$ και $f'(x) \neq g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο
13. Αν f συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(1) = 1, f(-1) = -1$ τότε δείξτε ότι η εξίσωση $f^3(x) + x^5 = 0$ έχει μοναδική λύση
14. $f(x) = x$ όπου $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f'(x) \neq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$
17. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση όταν $f(x)$ πολυώνυμο με $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
20. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x - x^2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη σ' αυτό

21. Δίνονται οι παραγωγίσιμες $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(\chi) + \chi^2 + 2\chi + 2 = g'(\chi) + 2e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = g(0)$, να δείχθεί ότι α) Οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο β) Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο
22. Να Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(\chi) > f(\chi) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με αυτή της $g(\chi) = e^\chi, \chi \in \mathbb{R}$ ένα μόνο κοινό σημείο

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

23. $(1-x)\sin x = \eta \mu x$, στο $\mathbb{R}$
24. $9x \ln x + e = 0$ στο $(0, +\infty)$
25. $5x^4 + 2kx = k + 1$ στο $[0, 1]$
26. $k(3x^2 - 1) = \ln(1+x) + \frac{x-1}{x+1}$ στο $[0, 1]$
27. $x(x-2)\sin x = 2(1-x)(a + \eta \mu x)$ στο $[0, 2]$
28. $(1 + e^{x-k})(e^{-kx} - 1) = ke^{-kx}(e^{x-k} + x - k - 1), k \neq 0$ στο $[0, k]$
29. $2(x^3 - 2) = 3k(x - 1)$ στο $(0, 2)$
30. $2 \ln x = k - e^x$ στο $(0, +\infty)$
31. Για ποιες τιμές του a η εξίσωση $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$ έχει μία τουλάχιστον λύση?

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ μια λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

34. $x^3 - 3x + k = 0$ στο $(-1, 1)$
35. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + k = \eta \mu 2x$ στο $\mathbb{R}$
37. $x + f(x) = a$ όταν $-1 < f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$
38. $e^{\varphi(x)} = x + \lambda, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
39. Αν $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $\xi: f(\xi) - \xi^3 = m$.
40. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και η g είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. (Δεν ξέρετε τίποτε για την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των f, g)

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες

42. $\ln x = e^x$
43. $\ln(\ln(x)) = x$
44. $x^4 + 4 = (x + 1)^2$

45. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = ax^2 + bx + c$ έχει τρεις το πολύ λύσεις.
46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$. α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f . β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ακριβώς πραγματικές ρίζες δύο αρνητικές και δύο θετικές.
- 47 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3(1 - 3\ln x) - 36x(1 - \ln x) + 16$. α) Να βρείτε την μονοτονία της f . β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , καθώς και το πλήθος των ριζών της στο 3
48. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ δεν μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες, αν είναι γνωστό ότι ισχύει : $2a^2 < 5b$
49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)$. α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία β) Να λυθεί η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)$
50. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = 0$ έχει το πολύ δύο λύσεις όταν είναι: $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$
51. Να δείξετε ότι η εξίσωση $7^x + 9^x = 3x + 5$ δεν μπορεί να έχει τρεις ή και περισσότερες λύσεις.
- 52 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x}$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και το σύνολο τιμών της

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο ακριβώς λύσεις
διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

53. $x^2 = \sin x$ στο R
54. $x^4 - 32x + 40 = 0$ στο R
55. $e^x + e^{-x} = 4 - x^2$ στο R
56. $x^4 = 16 + (x - 2)^2$ στο R
57. $x^4 = 1 + (x + 14)^2$ στο R
58. $3(x - 1)^4 = 24 + x^3$ στο R
59. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ στο R
60. $x^3 = 1 + \frac{2}{x-1}$ στο $R - \{1\}$
61. Αν η εξίσωση $x^4 - 5x^3 + ax^2 + 5x - 6 = 0$ έχει τέσσερις διαφορετικές λύσεις δείξτε ότι $8a < 75$.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο τουλάχιστον λύσεις
διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

62. $x^3 + ax^2 + b = 0$, $b > 0$, $1 + a + b < 0$ στο $(-1, 1)$
63. $(3x^2 - 1)(k + \sin x) = (x^3 - x)\eta \mu x$ στο $(-1, 1)$
64. $(x^2 - 1)\sin x + 2x\eta \mu x = 0$ στο $(-1, 1)$.

65. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{\phi x} = ax$, $a > 0$ έχει άπειρες λύσεις

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

66. $5^x = 1 + 4x$

67. $e^x + x^2 = x + 1$

68. $e^x = ex + 1 - x$

69. $3^x + 4^x = 5^x$

70. $(1-x)(2x^2 - x - 7) + 6 = 6x^2(1 - \ln x)$, $x > 0$

71. $2(x-1) = (e^2 - 1)\ln x$

72. $e(x-1) = (e-1)x \ln x$

73. $x = e \ln x$

74. $\alpha^{\eta \mu x} - \sqrt{\alpha} = \eta \mu x - \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < 1$

75. $2x + \ln^2(x+1) = 2 \ln(x+1)$

76. $\frac{x^2 - a^2}{2ax} = \ln x - \ln a$, $a > 0$

77. $2x + \ln x = 2$

78. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + xf(0) = xf(1) + f(0)$ όταν είναι: $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

79. Να βρεθούν οι μη αρνητικές ρίζες της $f(x) = 6e^x - (6 + 6x + 3x^2 + x^3)$

B ΟΜΑΔΑ

1. Για ποιες του a/b η εξίσωση $ax^3 + be^x = 0$, $ab \neq 0$ έχει μία ακριβώς λύση

(Μπορεί να χρειαστείτε τον κανόνα του De l' Hospital για την εύρεση κάποιου ορίου)

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^4 - x^2 - 2x + 4 = 0$ είναι αδύνατη.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x + 2^{-x} = x^2 - \frac{1}{2}x + a$, $a > 2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 = x \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu^2 x$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές λύσεις.

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \sigma \upsilon \nu x + x \eta \mu x$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

8. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(x^2 + x + 1)f''(x) + xe^{f(x)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείχθει ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta \mu x = \frac{1}{x}$ έχει άπειρες λύσεις

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} - \eta \mu x = 0$ έχει άπειρες λύσεις για $x \in [0, +\infty)$

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 7x + 2 = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές λύσεις και αν f παραγωγίσιμη στο R ώστε $f^3(x) + 2 = 7f(x)$ τότε η f είναι σταθερή.
12. Να λυθεί η εξίσωση $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
13. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $a^x = 1 + (a-1)x^2$, $1 < a < 3$
14. Για ποιες τιμές του m υπάρχει $k > 0$: η εξίσωση $x^2 + m = 2k \ln x$ να έχει μοναδική λύση.
15. Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $m^x = \log_m x$ για τις διάφορες τιμές του m .
16. Βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $a^x = x^b$, $a > 1, b \neq 0$
17. Να λυθεί η εξίσωση $x^{x+2} = (x+2)^x$

Γ ΟΜΑΔΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$
2. Αν το πολυώνυμο $x^3 - kx^2 + 12x - 8$ έχει τρεις θετικές ρίζες να βρεθούν οι ρίζες του καθώς και το k .
3. Αν $f''(x) + xf'(x) = f(x), \forall x \in [a, b], f(a) = f(b) = 0$ με $a > 0$ τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) .

FERMAT

11. Αν $x^4 + 2x^3 + ax - a - 3 \geq 0 \quad \forall x \in R$ $a =$;
12. Αν $\ln\left(\frac{x}{a}\right) \leq x - a$, $\forall x \in (0, +\infty)$, $a > 0$, $a =$;
13. Αν $ae^x \geq x + a$, $\forall x \in R$, $a =$;
14. Αν $a^x - b^x \geq x \quad \forall x \in R$ νδο $a = be$
15. Αν $f'(x) \neq 0, f(a) = 0, x \in R, e^{f(x)} \geq mf(x) + 1, \forall x \in R$ να βρεθεί το m
16. $f(x) \leq ax^2 + bx + c$, $\forall x \in R$, $f(0) = c$, f παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι $f'(0) = b$
17. Αν $a^x \geq 1 + x \quad \forall x \in R$, $a > 0$ δείξτε ότι $a = e$
18. $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n \quad \forall x \in R$, $a_k > 0 \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_n = 1$ *
19. Έστω f παραγωγίσιμη και $1 + (x-2)f(1) + f(x) \geq e^{a(x-1)} \quad \forall x \in R$.

Αν επιπλέον ισχύει $f(1) + f'(1) = 2$ βρείτε την τιμή του a .

20. Να δειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x_0 και να βρεθεί, ώστε $4^x \geq x_0 \cdot x + 1$ για κάθε $x \in R$.
21. Αν ισχύει $x^{\alpha+1} \geq (\beta+1)x - \beta$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$
22. Έστω συνάρτηση $f: 3 \rightarrow 3$ παραγωγίσιμη στο 3 με $f(0) = 0$ ώστε να ισχύει $a^{f(x)} + f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in 3$, όπου $a > 0$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{e}$ ή ότι το $x_0 = 0$ είναι στάσιμο σημείο της f

23. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - x + 1$ και μία συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η $f \circ g$ παρουσιάζει ακρότατο στο $\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

24. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{2a^x}{b^{2x} + 1} \leq 1$ με $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $a = b$.

25. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ με $\ln(f(x)) \geq x - b$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\ln(f(a)) = a - b$ και $f(b) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f'(a) = f(a) f'(b)$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

8Α1. $f(x) = \frac{x^2}{9 + x^2}$

2. $f(x) = \frac{e^x}{2 + x}$

3. $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$

4. $f(x) = e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 6$

6. $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$

8. $f(x) = \sqrt{|x|}$

9. $f(x) = x + \eta \mu 2x$

10. $f(x) = 3\eta \mu x + \sigma \nu 3x$

11. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & , 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 16 & , 3 < x < 4 \\ 5 - x & , 4 \leq x < 5 \end{cases}$

12. $f(x) = (x^2 - x + 1)(1 + x^2)^{-2} e^{-x}$

13. Δείξτε ότι όταν $a^2 - 4b + 4 < 0$ τότε η $f(x) = e^x(x^2 + ax + b)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a .

16. $f(x) = e^{ax}(x^2 - a)$

17. $f(x) = \frac{ax^2 + a + 2}{x - 1}$

18. $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$, $a > 0$

B ΟΜΑΔΑ

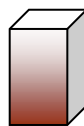
Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

1. $f(x) = x \sin(\pi x)$, $x \in [0, 2]$
2. $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ $-2 \leq x \leq 2$
3. $f(x) = x^2 \ln x - x$.
4. Δείξτε ότι η εξίσωση $x + 4 \sin x = 0$ δεν είναι αδύνατη και βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης
$$f(x) = \frac{x^2}{8} + x \sin x + \sin 2x$$
5. Δείξτε ότι αν $f^2(x) + (f'(x))^2 = e^x + x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ όπου f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
6. $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$. Αν η συνάρτηση έχει δύο διαφορετικά ακρότατα δείξτε ότι το μέγιστό της είναι μικρότερο από το ελάχιστό της
7. $f(x) = \frac{4(a-1)x + 2a + 2}{4x^2 - 1}$ Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του a .
9. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και παρουσιάζει στα $c, d \in (a, b)$ ίδιο τοπικό ελάχιστο. Δείξτε τότε ότι έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο ανάμεσα στα c, d
10. Αν υπάρχει f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + xe^{-f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο όλων των $f(x)$ και να δείξετε ότι $f(1) > \ln(e-2)$
11. Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο αρτίου βαθμού έχει ένα τουλάχιστο ακρότατο
12. Αν ισχύει $P''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ όπου το $P(x)$ είναι πολυώνυμο δείξτε ότι το $P(x)$ έχει ακριβώς ένα ολικό ακρότατο

9 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

A ΟΜΑΔΑ

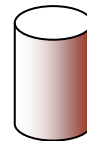
1. Βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα 8 και ελάχιστο άθροισμα κύβων.
2. Να διαιρεθεί ο αριθμός 8 σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο των δύο μερών επί την διαφορά τους να γίνεται μέγιστο.
- 3.



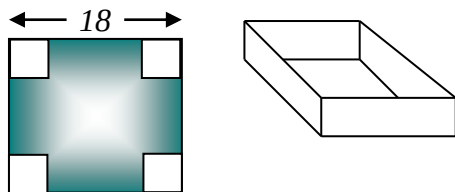
Ο όγκος του κουτιού είναι $72m^3$ και η πρόσθια πλευρά του

έχει λόγο διαστάσεων 1 προς 2. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.

4. Ένας κύλινδρος έχει όγκο V . Ποια η ακτίνα της βάσης του και ποιο το ύψος του ώστε να παρουσιάζει την ελάχιστη δυνατή επιφάνεια. (Χρήσιμο σε κουτάκια αναψυκτικών)



5.



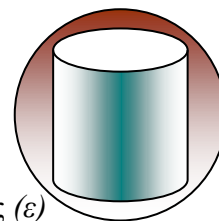
Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι 18 επί 18 cm^2 κόβουμε 4 μικρά τετράγωνα με πλευρά $x \text{ cm}$ το καθένα και φτιάχνουμε το διπλανό κουτί χωρίς οροφή. Να βρείτε το x ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι ο μέγιστος δυνατός.

6. Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφεί ορθός κύλινδρος μέγιστου όγκου

7. Δίνονται τα σημεία $A(4,0)$, $B(-4,0)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x+5y-2$

i) Να βρεθεί σημείο M της (ε) $(MA)+(MB)=\min$

ii) Να βρεθεί η εξίσωση έλλειψης με εστίες τα A, B που εφάπτεται της (ε)



8. Έστω x ο αριθμός τεμαχίων ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μονάδος είναι

$$\frac{dP}{dx} = \frac{3}{176} (54x - 8x^2), \text{ ενώ το κόστος των } x \text{ τεμαχίων με } x < 7 \text{ είναι } K = x^3 - 18x^2 + 105x \text{ (} x \text{ σε εκατομμύρια)}$$

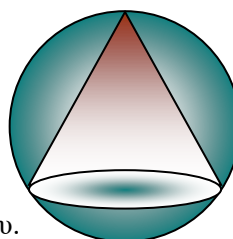
i) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί την τιμή μονάδος

ii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί το κόστος

iii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί τις πωλήσεις

iv) Να δειχθεί ότι ο αριθμός τεμαχίων που ελαχιστοποιεί τα κέρδη είναι $x =$

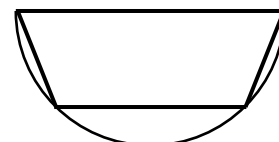
9.



Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφεί ορθός κώνος μέγιστου όγκου.

10. Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο από τον εκδότη 3 ευρώ το καθένα. Όταν το διαθέτει στην αγορά με 15 ευρώ τότε πουλά 200 αντίτυπα τον μήνα. Εκτιμήθηκε τώρα ότι αν η τιμή πώλησης μειωθεί, τότε για κάθε 1 ευρώ μείωσης θα πωλούνται 20 περισσότερα αντίτυπα τον μήνα. Να βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

11. Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου $2R$ να εγγραφεί τραπέζιο όπως στο σχήμα με μέγιστο εμβαδό.



Β ΟΜΑΔΑ

1.

Κινητό ξεκινά από το σημείο A και κινείται με σταθερή ταχύτητα $2m/sec$ ως το σημείο M . Στην συνέχεια κινείται με ταχύτητα $4m/sec$ κατά μήκος της MG ως το Γ . Αν είναι $AB = 5m$ και $B\Gamma = 12m$ όπου B η προβολή του A στην ευθεία BMG να βρεθεί η απόσταση BM : ο χρόνος κίνησης να είναι α) ελάχιστος β) μέγιστος



3. Μια κυκλική λίμνη έχει διάμετρο $2km$. Ένας άνθρωπος βρίσκεται σε κάποιο σημείο της περιφέρειας και θέλει να φθάσει όσο το δυνατόν γρηγορότερα στο αντιδιαμετρικό σημείο του A . Ο άνθρωπος κωπηλατεί με ταχύτητα $2km/h$ και περπατά με ταχύτητα $4km/h$. Βρείτε την καταλληλότερη πορεία .
4. Τα έξοδα καυσίμων ανά ώρα ενός ατμόπλοιου είναι ανάλογα του κύβου της ταχύτητας του. Στην ταχύτητα των $10Kn$ τα έξοδα αυτά είναι $30\$/h$, ενώ τα υπόλοιπα έξοδα είναι $600\$/h$. Να βρείτε την οικονομικότερη ταχύτητα για ταξίδι $50miles$. (Kn σημαίνει κόμβοι= $miles/h$ Η τιμή $30\$/h$ ήταν την εποχή που το πετρέλαιο ήταν φτηνό)

5.

Σε πόση απόσταση πρέπει να σταθεί ένας άνθρωπος από το βάθρο ενός έργου τέχνης ώστε να έχει την καλύτερη οπτική εντύπωση $?(\omega = max)$. Δίνονται το ύψος του βάθρου d και του έργου τέχνης H .

