Επανάληψη μέχρι το ρυθμό μεταβολής

Παρασκευή, 22 Ιανουαρίου 2021 10:47 πμ

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γιά την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)-3}{\sqrt{x+1}-2}=-4$

α. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $\Sigma(3,f(3))$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β. Έστω ότι η παραπάνω εφαπτομένη τέμνει τους άξονες ψψ΄ και χχ΄στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Ένα σημείο Μ κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (ξεκινώντας απο το Α), ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται κατά 2 μονάδες/s. Έστω επίσης Κ και Λ οι προβολές του σημείου Μ στους άξονες χχ΄και ψψ΄αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραπλεύρου ΟΚΜΛ την χρονική στιγμή όπου:

Ι . το Μ ταυτίζεται με το σημείο Σ

ΙΙ. το ΟΚ είναι τετραπλάσιο του ΟΛ

ΙΙΙ Το ΟΚΜΛ είναι τετράγωνο.

Λύση

α) η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)-3}{\sqrt{x+1}-2}=-4$.

Έστω $(\varepsilon): y-f(3)=f'(3)(x-3)$ η εξίσωση της εφαπτ. της C_f στο $\Sigma(3,f(3))$

ΔΕ ξέρω ΔΕ ξέρω..

Έτσι $\boxed{f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}$ (1)

(Μας αρκεί το μόνο που δίνεται είναι το όριο που εμπλέκεται την f η αξία θα προκύψει από τον ορισμό της παραγώγου στο 3)

Θέτω $g(x)=\dfrac{2f(x)-3}{\sqrt{x+1}-2}$ $\quad \left.\begin{matrix} x+1\geq 0\\ \sqrt{x+1}\neq 2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq -1\\ x\neq 3\end{matrix}$

Τότε $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-4$ και $\boxed{f(x)=\dfrac{g(x)(\sqrt{x+1}-2)+3}{2}}$ (2)

Εντοπίζω το $f(3)$: Η f συνεχής στο $x_0=3$ (αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)\Leftrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{g(x)(\sqrt{x+1}-2)+3}{2}=f(3)\Leftrightarrow$$

$$\frac{-4\cancel{(\sqrt{3+1}-2)}^{0}+3}{2}=f(3)\Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{2}=f(3)}\ (3)$$

Έτσι η (1) $\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}}$ $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{g(x)\cdot(\sqrt{x+1}-2)+3}{2}-\dfrac{3}{2}}{x-3}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)\cdot(\sqrt{x+1}-2)\cancel{+3-3}}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)(\sqrt{x+1}-2)}{2(x-3)}\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)\left(\sqrt{x+1}^{\,2}-2^2\right)}{2(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

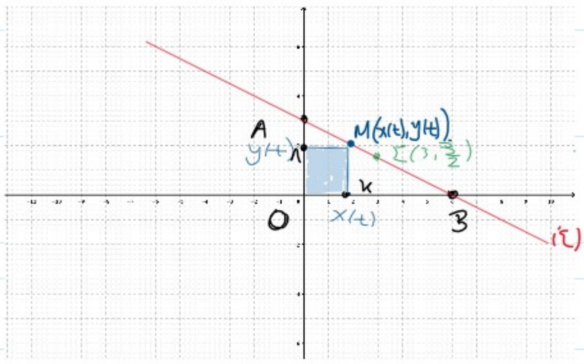
$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)\cdot\cancel{(x-3)}}{2\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{2(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Άρα $f'(3)=-\frac{1}{2}$

Έτσι $(\varepsilon): y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-3)\Leftrightarrow$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+3}$ (ε)

β)



Έστω (ε): $y=-\frac{1}{2}x+3$

Τομή με xx' $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x+3=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=3 \Leftrightarrow x=6$

$B(6,0)$

Τομή με yy' $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ x=0 \end{cases}$ άρα $y=3$

$A(0,3)$

Για το Μ: $x'(t) = 2\,\mu/s$

Προφανώς το ΟΚΜΛ είναι ορθογώνιο διαστάσεων $x(t)$, $y(t)$ για χρόνο t

Επ. $(ΟΚΜΛ) = x(t)\cdot y(t)$ (1)

Επειδή το $M(x(t),y(t))$ ανήκει στην ευθεία (ε)

άρα $y(t) = -\frac{1}{2}x(t)+3$ (2)

Επ. (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ $(ΟΚΜΛ) = x(t)\left(-\frac{1}{2}x(t)+3\right) = -\frac{1}{2}x^2(t)+3x(t)$.

Για ευκολία θέτω $g(t) = (ΟΚΜΛ)(t) = -\frac{1}{2}x^2(t)+3x(t)$.

Προσοχή: Τα τρία ερωτήματα του (β) αφορούν την τιμή του $x(t_0)$ τη στιγμή t_0 που ζητάμε το ρυθμό.
Σε καθένα από τα i, ii, iii θα βρούμε το κατάλληλο $x(t_0)$

και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού:

$g'(t) = -\frac{1}{2}\left(x^2(t)\right)' + 3\left(x(t)\right)' =$

$-\frac{1}{2}\,2x(t)\cdot x'(t) + 3x'(t)$

$$\boxed{g'(t) = -x(t)\cdot x'(t) + 3x'(t) \quad (3)}$$

i) όταν το Μ ταυτίζεται με το $Σ\left(3, \frac{3}{2}\right)$ t_0 τότε $x(t_0)=3$ $\left(x'(t)=2\,\mu/s\right)$

άρα $g'(t_0) \overset{(3)}{=} -x(t_0)\cdot x'(t_0)+3x'(t_0) = -3\cdot 2+3\cdot 2 = 0$ τ.μ/sec

ii) $x(t_0) = 4y(t_0)$ και $y(t) = -\frac{1}{3}x(t)+3$ $\Big\} \Rightarrow x(t_0) = -\frac{4}{3}x(t_0)+12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t_0)+\frac{4}{3}x(t_0) = 12 \Leftrightarrow 7x(t_0) = 36 \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{36}{7}$

Επ. $g'(t_0) = -x(t_0)x'(t_0)+3x'(t_0) =$

$= -\frac{36}{7}\cdot 2+3\cdot 2 = -\frac{72}{7}+6 =$

$= \frac{-72+42}{7} = -\frac{30}{7}$

iii) για να είναι το ΟΚΜΛ τετράγωνο $x(t_0) = y(t_0)$ τη στιγμή t_0

από $y(t) = -\frac{1}{3}x(t)+3 \overset{t=t_0}{\Longrightarrow} x(t_0) = -\frac{1}{3}x(t_0)+3 \Leftrightarrow 4x(t_0) = 9 \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{9}{4}$

$g'(t_0) = -x(t_0)\cdot x'(t_0) + 3x'(t_0) = -\frac{9}{4}\cdot 2+3\cdot 2 = \ldots$

$t = t_0$ $\qquad x(t_0) = \frac{9}{4}$

$$g'(t_0) = -x(t_0)\cdot x'(t_0) + 3x'(t_0) = -\frac{9}{4}\cdot 2 + 3\cdot 2 = -\frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2}.$$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής γιά την οποία ισχύει: ότι :

$f(e) = 1$, $f(\frac{1}{e}) = -1$ και $f^2(x)+2f(x)\ln x-3\ln^2 x = 0$ γιά κάθε χ>0.

α. Να βρείτε τον τύπο της f

β. Ένα σώμα Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι ώστε, η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 0,5 μον/s. Έστω επίσης Α σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα ψψ΄ στο σημείο με τεταγμένη -1

Ι. Να αποδείξετε ότι Α(1,0)

ΙΙ. Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο που βρίσκεται το σώμα Μ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η ε

Λύση

α. $f(e) = 1$, $f(\frac{1}{e}) = -1$, $f^2(x) + 2f(x)\ln x - 3\ln^2 x = 0$, $x > 0$ (1)

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \to$ θα το έχω

Αν το δημιουργήσω $\pm \ln^2 x$

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow \underbrace{f^2(x) + 2f(x)\ln x + \ln^2 x}_{(\alpha+\beta)^2} - \ln^2 x - 3\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + \ln x)^2 = 4\ln^2 x, \quad x > 0.$$

Αποτετραγωνίζοντας έχουμε $f(x) + \ln x = \pm 2\ln x$.

ρίζες: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Έστω $f(x) = \ln x$,

ή $f(x) = -\ln x$,

	0		1		$+\infty$
f		$-$	ϕ	$+$	
		$f(1/e) = -1$		$f(e) = 1$	

Δίνεται $f(e) = 1$

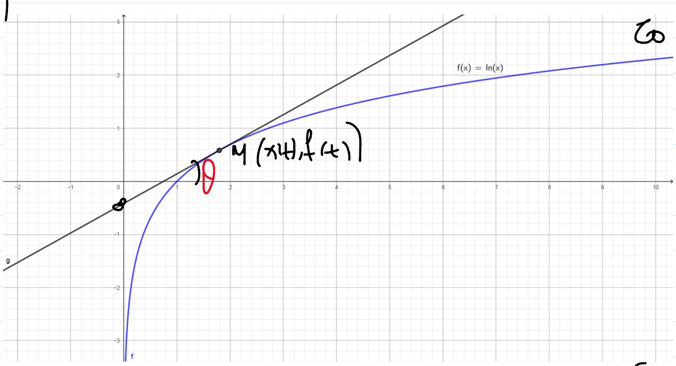
και η 2η περίπτωση απορρίπτεται

διότι $f(e) = -\ln e = -1$ (άτοπο) το προσήμου

προκύπτουν διάφορα.

Άρα $\boxed{f(x) = \ln x, \ x > 0}$

β)



Το Μ κινείται πάνω στην C_f συναρτήσει του t.

$$x'(t) = 0,5$$

Είναι:

η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Μ: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

και λόγω $f'(x) = (\ln x)'$ άρα $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Σημείο $(x_0, f(x_0)) = (x_0, \ln x_0)$

Σημείο $(x_0, f(x_0)) = (x_0, \ln x_0)$

Επι. (ε): $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0} \cdot x - 1 + \ln x_0$

Σημείο τομής της (ε) με yy' $(0, -1)$

άρα (ε): $-1 = \frac{1}{x_0} \cdot 0 - 1 + \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$

και έτσι $f(1) = 0$ και $A(1, 0)$.

γ) Η εφ. της γωνίας που σχηματίζει η εφ/νη της C_f στο M είναι $\varepsilon\varphi\vartheta = f'(x)$ $\quad f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Έτσι $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1}{x}$

Για χρόνο t $\quad \boxed{\varepsilon\varphi\vartheta(t) = \frac{1}{x(t)}}$ (1).

θυμάμαι: $(\varepsilon\varphi f)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f} \cdot f'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2} \cdot f'$

Παραγωγίζοντας την (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t)} \cdot \vartheta'(t) = -\frac{1}{x^2(t)} \cdot x'(t)$$

$x'(t) = 0{,}5$ μ/sec (υπ.θ)

$x(t_0) = 1$ από προηγ. ερώτημα

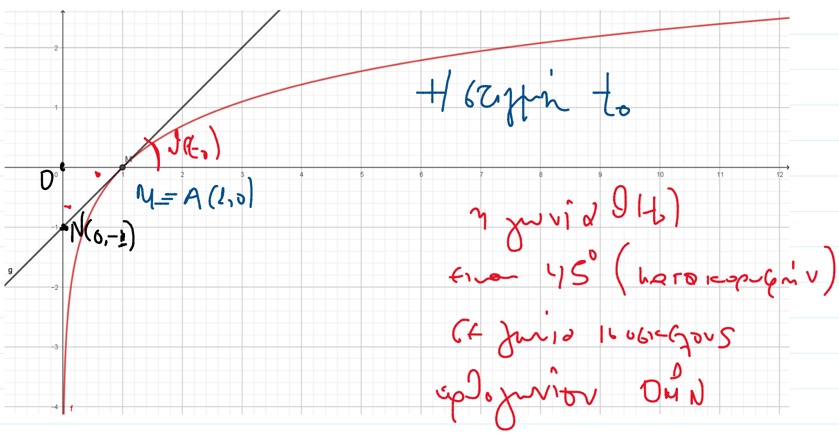
Για τη στιγμή t_0 $\quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t_0)} \cdot \vartheta'(t_0) = -\frac{1}{x^2(t_0)} \cdot (0{,}5)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t_0)} \vartheta'(t_0) = -\frac{1}{1} \cdot 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\vartheta'(t_0) = -0{,}5 \cdot \underline{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t_0)}$$

Θα βρω την $\vartheta(t_0)$ τη στιγμή t_0

$\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(t_0) = \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Άρα $\vartheta'(t_0) = -0{,}5 \cdot 0{,}5 = -\frac{1}{4}$.

rad/sec.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^3+6\chi-3$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Sigma(1,f(1))$ διέρχεται απο σταθερό σημείο γιά καθε $\alpha\in\mathbb{R}$

β. Επιπλέον η εφαπτομένη της C_f στο $\Sigma(1,f(1))$ διέρχεται απο το σημείο $P(-1,-19)$.

I. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$

II. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1- 1

III. Αν f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της $B(5, f^{-1}(5))$.

IV. Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε έχει μοναδικό κοινό σημείο με τη C_f στο Μ.

V. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $N(\chi_0,f(\chi_0))$, με $\chi_0 \neq 0$, έχει με την C_f και άλλο κοινό σημείο (εκτός του Ν), του οποίου να βρείτε την τετμημένη συναρτήσει του χ_0.

VI. Δίνεται η συνάρτηση: $g(\chi) = \eta\mu(6\chi-6)-2(\chi-1)^3$

Θεωρούμε την εφαπτομένη ε_1 της C_f και την εφαπτομένη ε_2 της C_g με $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2.

(α) Έστω (ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ η ζητούμενη εφαπτομένη της C_f στο $\Sigma(1, f(1))$

Υπολογίζω $f'(x) = (\alpha x^3+6x-3)' = 3\alpha x^2+6$

$f'(1) = 3\alpha+6$

Σημείο $(1,f(1)) = (1, \alpha+3)$ $\quad f(1) = \alpha\cdot 1^3+6-3 = \alpha+3$

Επομ. (ε): $y-(\alpha+3) = (3\alpha+6)(x-1) \Leftrightarrow y = (3\alpha+6)x - 3\alpha - 6 + \alpha + 3$

$\Leftrightarrow \boxed{y = (3\alpha+6)x - 2\alpha - 3}$ (ε)

Θα δείξουμε ότι η (ε) περνά από σταθερό σημείο

• για $\alpha = 0$ (ε_1): $y = 6x-3$

• για $\alpha = -2$ (ε_2): $y = 0x+1 = 1$

Σημείο τομής $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $\begin{cases} y = 6x-3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Β Λυκείου § 2.2
• δίνω δύο τιμές στην παράμετρο α
λύνω το σύστημα των ευθειών που προκύπτουν
• αντικαθιστώ το σημείο τομής στην γενική ευθεία και την επαληθεύω.

Επομ. τέμνονται Μ$(\frac{2}{3}, 1)$.
Επαληθεύω την (ε) στο Μ

$1 = (3\alpha+6)\cdot\frac{2}{3} - 2\alpha - 3 \Leftrightarrow 1 = \cancel{2\alpha}+4-\cancel{2\alpha}-3$ που ισχύει.

$1 = (3\alpha+6)\cdot\frac{2}{3} - 2\alpha - 3 \Leftrightarrow 1 = \cancel{2\alpha}+4-\cancel{2\alpha}-3$ που ισχύει.

Άρα η (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο $M(\frac{2}{3},1)$.

(β)

(i) Το $P(-1,-19)$ σημείο της $(\varepsilon): y=(3\alpha+6)x$ άρα

$-19 = -(3\alpha+6)-2\alpha-3 \Leftrightarrow -19 = -3\alpha-6-2\alpha-3 \Leftrightarrow -5\alpha = -10 \Leftrightarrow$

$\alpha = 2$

ii) για $\alpha=2$ $f(x) = 2x^3+6x-3$.

Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$

τότε

$x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 \neq 2x_2^3$

$x_1 \neq x_2$ άρα $\quad + \quad 6x_1 \neq 6x_2$

$2x_1^3+6x_1 \neq 2x_2^3+6x_2$

$\Leftrightarrow 2x_1^3+6x_1-3 \neq 2x_2^3+6x_2-3 \Leftrightarrow$

$f(x_1) \neq f(x_2)$ άρα f 1-1

iii) η f^{-1} παρ/μη. Έστω $(\eta): y-f^{-1}(5) = f^{-1\prime}(5)\cdot(x-5)$

Κι ισχύει

(χωρίς να βρω αναλυτικά) $(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Έτσι, $f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow (f^{-1}(f(x)))' = x' \Leftrightarrow$

$\boxed{f^{-1\prime}(f(x))\cdot f'(x) = 1.}$ (2)

Η $f(x) = 2x^3+6x-3$

πρέπει να βρω τιμή του x ώστε $f(\kappa\omega\delta) = 5$

Παρατηρώ για $x=1$ $f(1)=5$.

Έτσι η (2) για $x=1$

σημείο f, f^{-1} αν (α,β) σημείο της f $f(\alpha)=\beta$. και $f^{-1}(\beta)=\alpha$

$(2) \Leftrightarrow f^{-1\prime}(f(1))\cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1\prime}(5)\cdot 12 = 1 \Leftrightarrow$

και $f'(x) = 6x^2+6$ άρα $f'(1)=12$ $\qquad f^{-1\prime}(5) = \frac{1}{12}$

Σημείο $(5, f^{-1}(5))$

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ για $x=1$ $f^{-1}(f(1)) = 1 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(5) = 1.$

άρα $(\eta): y-1 = \frac{1}{12}(x-5) \Leftrightarrow$

$(\eta): y = \frac{1}{12}x - \frac{5}{12}+1 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{12}x+\frac{7}{12}}$ (η).

iv) Έστω (ε_1): $y-f(0) = f'(0)(x-0)$ η ζητούμενη εφ/νη της C_f στο $M(0,f(0))$.

Ισχύει

φ στο $M(0, f(0))$.

Είναι $f'(x) = 6x^2+6$ και $f'(0) = 6$

($f(x) = 2x^3+6x-3$)

Σημείο $(0, f(0)) = (0, -3)$ άρα $(\varepsilon_1): y+3 = 6(x-0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon_1): y = 6x-3$

Αναζητώ κοινά σημεία $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 6x-3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^3+6x-3 = 6x-3 \Leftrightarrow$

$2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (μοναδικό)

V] Έστω $(\eta_1): y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ η εξίσωση εφ/νης της φ. στο $N(x_0, f(x_0))$

Είναι $f'(x) = 6x^2+6$ άρα $f'(x_0) = 6x_0^2+6$.

Σημείο $(x_0, f(x_0)) = 2x_0^3+6x_0-3$ $f(x) = 2x^3+6x-3$.

Έτσι $(\eta_1): y - (2x_0^3+6x_0-3) = (6x_0^2+6)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y = (6x_0^2+6)x - 6x_0^3 - 6x_0 + 2x_0^3 + 6x_0 - 3$

Εύρεση κοινών σημείων φ, (η_1)

$(\Sigma)\begin{cases} y = 2x^3+6x-3 \\ y = 6x_0^2 \cdot x + 6x - 6x_0^3 - 6x_0 + 2x_0^3 + 6x_0 - 3 \end{cases}$

$2x^3+6x-3 = 6x_0^2 \cdot x + 6x - 6x_0^3 - 6x_0 + 2x_0^3 + 6x_0 - 3$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0$

Horner

1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$	x_0
↓	x_0	x_0^2	$-2x_0^3$	
1	x_0	$-2x_0^2$	0	

Άρα $x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)(x^2 + x_0 \cdot x - 2x_0^2) = 0$

$\Delta = x_0^2 + 8x_0^2 = 9x_0^2 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-x_0 \pm \sqrt{9x_0^2}}{2} = \begin{cases} x_0 \\ -2x_0 \end{cases}$

Άρα η (η_1) τέμνει την C_f στο $(-2x_0, -16x_0^3 - 12x_0 - 3)$

$f(-2x_0) = 2(-2x_0)^3 + 6(-2x_0) - 3$
$= -16x_0^3 - 12x_0 - 3$

VI. Δίνεται η συνάρτηση: $g(\chi) = \eta\mu(6\chi-6) - 2(\chi-1)^3$

Θεωρούμε την εφαπτομένη ε_1 της C_f και την εφαπτομένη ε_2 της C_g με $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2.

Έστω (ε_1) $y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1)$ η εξίσωση εφ/νης της φ στο $(x_1, f(x_1))$

Έστω $(\varepsilon_1)\ y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ η εξίσωση εφαπτ. της C_f στο $(x_1, f(x_1))$

και $(\varepsilon_2)\ y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)$ — // — της C_g στο $(x_2, g(x_2))$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα

οι κλίσεις πρέπει να είναι ίσες $f'(x_1)=g'(x_2)$

$f'(x)=6x^2+6 \Rightarrow f'(x_1)=6x_1^2+6$

g(χ) = ημ(6χ-6)-2(χ-1)^3

άρα $g'(x)=6\sigma\upsilon\nu(6x-6)(6x-6)'-6(x-1)^2(x-1)'$

$\Rightarrow g'(x)=6\cdot\sigma\upsilon\nu(6x-6)-6(x-1)^2$

άρα $g'(x_2)=6\cdot\sigma\upsilon\nu(6x_2-6)-6(x_2-1)^2$

αφού $f'(x_1)=g'(x_2) \Leftrightarrow 6x_1^2+6=6\cdot\sigma\upsilon\nu(6x_2-6)-6(x_2-1)^2$

$\underset{:6}{\Leftrightarrow} x_1^2+1=\sigma\upsilon\nu(6x_2-6)-(x_2-1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x_1^2+1-\sigma\upsilon\nu(6x_2-6)}_{\geq 0}=\underbrace{-(x_2-1)^2}_{\leq 0}$ (1)

Τότε $1-\sigma\upsilon\nu\varphi\geq 0 \mapsto x_1^2+1-\sigma\upsilon\nu\varphi\geq 0$ και $-(x_2-1)^2\leq 0$ για να ισχύει η (1)

πρέπει $\left.\begin{array}{l} x_1^2+1-\sigma\upsilon\nu(6x_2-6)=0 \\ \text{και } (x_2-1)^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1^2+1-1=0 \\ x_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^2=0 \\ \text{και} \\ x_2=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=0 \\ \text{και} \\ x_2=1 \end{array}$

Επομ. $(\varepsilon_1): y+3=6(x-0)$

$y=6x-3$

$x_1=0$

$f'(0)=6$

$f(0)=-3$

$(\varepsilon_2): y-0=6(x-1) \Rightarrow y=6x-6.$

$x_2=1 \quad g'(1)=6$

$g(1)=0$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x)+2f(x)=x+1 \quad (1)$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β. Να βρείτε την αντίστροφη της f.
γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει όριο στο x_0=2 και να το προσδιορίσετε.
δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική λύση και αυτή περιέχεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

ε. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha\beta\neq 0$ ισχύει $\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\ldots}=\frac{\alpha}{\ldots}$ να αποδείξετε

α.

Έστω $x_1<x_2$ αρκεί

$f(x_1)<f(x_2)$.

(Δεν έχω στοιχεία για να τελειώσω να προχωρήσω ...)

Επ. προχωρώ με εις άτοπο απαγωγή

Έστω ότι η f δεν είναι γν. αύξουσα

τότε αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2 \Rightarrow$

$f(x_1)\geq f(x_2)$

ε. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha\beta \neq 0$ ισχύει $\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta}$ να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{2}$.

Έστω αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Έτσι $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ (1)

και $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \geq 2f(x_2)$ (2)

Από (1)+(2) $f^3(x_1)+2f(x_1) \geq f^3(x_2)+2f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1+\cancel{1} \geq x_2+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$x_1 \geq x_2$ άτοπο διότι $x_1 < x_2$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Πρέπει η f να αντιστρέφεται δηλ να'ναι "1-1"

Αφού η f ↑ στο $\mathbb{R}$ θα'ναι και "1-1" οπότε αντιστρέφεται

Σύνολο τιμών της f:

Τρόπος: $\boxed{\text{για να βρούμε το σύνολο τιμών της } f \text{ αρκεί νδο } \forall y \in \mathbb{R} \text{ η } f(x)=y \text{ έχει λύση στο } \mathbb{R}. \text{ Ισχυρίζομαι ότι } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ότι } f(x_0)=y \text{ και αντικαθιστώντας στη σχέση το δείχνω}}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=y$

αν $x=x_0$ τότε (1) $f^3(x_0)+2f(x_0) = x_0+1$ (2)

Τότε $\overset{f(x_0)=y}{\Leftrightarrow} y^3+2y = x_0+1 \Leftrightarrow x_0 = y^3+2y-1$.

$(1) \Leftrightarrow f^3(x_0)+2f(x_0) = x_0+1 \Leftrightarrow f^3(x_0)+2f(x_0) = y^3+2y-1+1 \Leftrightarrow$

$f^3(x_0)+2f(x_0) = y^3+2y \Leftrightarrow g(f(x_0)) = g(y) \Leftrightarrow f(x_0)=y$

(Αν $g(x) = x^3+2x$, $x \in \mathbb{R}$ η g "1-1")

Επομένως σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

Εύρεση αντιστρόφου:

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+2f(x)=x+1$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$

Εναλλάσσουμε x, y, και λύνω ως προς y

$(1) \Leftrightarrow x^3+2x = y+1 \Leftrightarrow y = x^3+2x-1$

Επομένως $f^{-1}(x) = x^3+2x-1$, $x \in \mathbb{R}$

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει όριο στο $x_0=2$ και να το προσδιορίσετε.

Αναζητώντας το όριο στο $x_0=2$ $f^3(x)+2f(x)=x+1$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$

$(1) \Leftrightarrow f^3(x)+2f(x) = x+1 \overset{(-3)}{\Leftrightarrow} f^3(x)+2f(x)-3 = x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^3(x)-1+2f(x)-2 = x-2 \Leftrightarrow$

{ προσπαθώ να το παραγοντοποιήσω... }

$(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+1)+2(f(x)-1) = x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^3(x)-1+2f(x)-2=x-2 \Leftrightarrow$

{ προσπαθώ να το παραγοντοποιήσω...}

$(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+1)+2(f(x)-1)=x-2 \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+3)=x-2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Έτσι $|f(x)-1|\,|f^2(x)+f(x)+3|=|x-2| \Leftrightarrow$

$: |f^2(x)+f(x)+3|>0$

$\Delta=1-12=-11<0$

$f^2(x)+f(x)+3>0$ και

$\Leftrightarrow |f(x)-1|=\dfrac{|x-2|}{|f^2(x)+f(x)+3|}\le\dfrac{|x-2|}{1}$

{ στο κλάσμα, ελαττώνοντας τον παρονομαστή ο οποίος είναι μεγαλύτερος του 1 το κλάσμα μεγαλώνει!}

$\boxed{\begin{array}{l} f^2(x)+f(x)+3>1 \text{ διότι} \\ f^2(x)+f(x)+2>0 \text{ διότι} \\ \Delta=1-8=-7<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{array}}$

συνεπώς $|f(x)-1|\le|x-2|$

$-|x-2|\le f(x)-1\le|x-2|$ και $1-|x-2|\le f(x)\le 1+|x-2| \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to2}(1-|x-2|)=1=\lim\limits_{x\to2}(1+|x-2|)$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$.

δ)

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική λύση και αυτή περιέχεται στο διάστημα $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

Η αντίστροφη από το (β)

$f^{-1}(x)=x^3+2x-1 \quad x\in\mathbb{R}$

συνεχής ως πολυωνυμική στο $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

$f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{2}{3}-1=\frac{19-27}{27}=-\frac{8}{27}<0$

$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\cancel{\frac{2}{2}}-\cancel{1}=\frac{1}{8}>0$ άρα $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)<0$

και από Θ. Bolzano $\exists\ \xi\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ώστε $f^{-1}(\xi)=0$

για την μοναδικότητα: η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

διότι για $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ $\quad x_1^3<x_2^3$

$+\ 2x_1<2x_2$

$x_1^3+2x_1<x_2^3+2x_2$

$x_1^3+2x_1-1<x_2^3+2x_2-1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ και

$f\uparrow$ στο $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

Επομένως η f μοναδική.

Επομένως η f μοναδική. $f \nearrow$ στο $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

ε. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha\beta \neq 0$ ισχύει $\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{1}{2}$.**

$\frac{\alpha}{\beta} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$\exists \xi \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

ξ μοναδικό

αρκεί να δείξω ότι $\frac{\alpha}{\beta}$ μον. ρίζα της f^{-1} στο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

Έχουμε από υπόθεση

$$\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

σου φαίνεται $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2}}{\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{\alpha}{\beta} + 1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{θέτω } u = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{u^2-u+1}{u^2+u+1} = u \Leftrightarrow u^2-u+1 = u(u^2+u+1) \Leftrightarrow \cancel{u^2}-u+1 = u^3+\cancel{u^2}+u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3+2u-1 = 0$$

άρα η συνάρτηση έχει τύπο $f^{-1}(x) = x^3+2x-1 \quad x\in\mathbb{R}$

άρα $f^{-1}(u) = 0 \quad u \in \mathbb{R}$ και

αφού από (γ) η f^{-1} έχει μοναδική ρίζα στο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$u = \xi$ άρα $\frac{\alpha}{\beta} = \xi$ άρα $\frac{1}{3} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2}$

Άσκηση.

Α. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες να ισχύει :

α. $f^2(x) = x^2-6x+9$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. $\varphi^2(x)+5\varphi(x)+6=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.[1]

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση g ώστε $g^2(x) = 2g(x)\eta\mu x + 1$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(\frac{\pi}{2}) = 1+\sqrt{2}$

Γ. Αν $g(x) = \eta\mu x + \sqrt{1+\eta\mu^2 x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(x) = -x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

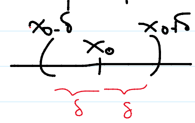
Λύση συνεχείς στο $\mathbb{R}$

Αα. $f^2(x) = x^2-6x+9 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f^2(x) = (x-3)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x-3| \Leftrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x\in A_1 \subseteq \mathbb{R} \\ -(x-3), & x\in \mathbb{R}-A_1 \end{cases}$$

Έστω ότι η f αλλάζει πρόσημο σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ τότε



το $f(x) = x-3$, $x\in(x_0, x_0+\delta)$

και το $f(x) = -x+3$, $x\in(x_0-\delta, x_0)$ όπου $\delta>0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x_0 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow$

$x_0 - 3 = -x_0+3 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3$

• 2ος τρόπος: παρατηρώ ότι για $x=3$ η $f(x) = 0$

• 2ος τρόπος: Παρατηρώ ότι για $x=3$ η $f(x)=0$

και μάλιστα $x=3$ μοναδική ρίζα οπότε αφού η f συνεχής

οι τιμές της έχουν σταθερό πρόσημο για $x<3$ και $x>3$.

Επομένως $f(x) = \begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ -x+3, & x<3 \end{cases}$ οπότε $f(x) = |x-3|$

ή $f(x) = -|x-3|$ ... $|x|=9$ ... $\Leftrightarrow x=\pm 9$

Αφού σε κάθε περίπτωση

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ -(x-3), & x<3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -(x-3), & x\geq 3 \\ \text{ή} & \\ -(-(x-3)), & x<3 \end{cases} = \begin{cases} -(x-3), & x\geq 3 \\ x-3, & x<3 \end{cases}$$

β. $\varphi^2(x)+5\varphi(x)+6=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Έτσι με παραγοντοποίηση

$$\varphi^2(x)+5\varphi(x)+6=0 \Leftrightarrow \varphi^2(x)+2\varphi(x)+3\varphi(x)+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x)(\varphi(x)+2)+3(\varphi(x)+2)=0 \Leftrightarrow (\varphi(x)+2)(\varphi(x)+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)=-2 \text{ ή } \varphi(x)=-3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

θα το αποδείξουμε!

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$ και έστω $\varphi(x_1)=-2$

και $\varphi(x_2)=-3$. Τότε αφού η φ συνεχής

στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[x_1,x_2]$, $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$ από Θ. ενδιαμέσων

τιμών $\exists\, x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε για κάποιο $\eta\in(\varphi(x_2),\varphi(x_1)) =$

$= (-3,-2)$

$$\varphi(x_0)=\eta$$

$$\varphi^2(x_0)+5\varphi(x_0)+6=0 \Leftrightarrow \eta^2+5\eta+6=0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta+2)(\eta+3)=0 \Leftrightarrow \eta=-2 \text{ ή } \eta=-3$$

Άτοπο αφού $\eta\in(-3,-2)$

Επομένως $\varphi(x)=-2$ ή $\varphi(x)=-3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση g ώστε

$g^2(x) = 2g(x)\eta\mu x + 1 \ , x \in \mathbb{R}$ και $g(\frac{\pi}{2}) = 1 + \sqrt{2}$

Είναι $g^2(x) = 2g(x)\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x)\eta\mu x = 1 \overset{+\eta\mu^2 x}{\Leftrightarrow}$

$g^2(x) - 2g(x)\cdot\eta\mu x + \eta\mu^2 x = 1 + \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (g(x) - \eta\mu x)^2 = 1 + \eta\mu^2 x.$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Έστω $h(x) = g(x) - \eta\mu x, \ x \in \mathbb{R}$ τότε

$h^2(x) = 1 + \eta\mu^2 x$ και $h(x) \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Επομένως $|h(x)| = \sqrt{1 + \eta\mu^2 x} \Rightarrow h(x) = \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$

ή $h(x) = -\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$

Αφού η h συνεχής στο $\mathbb{R}$, και $h(x) \neq 0$ ξέρω ότι διατηρεί πρόσημο. Έτσι $h(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) - \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} > 0$

Επομένως $h(x) = \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$ άρα

$g(x) - \eta\mu x = \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \eta\mu x + \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$ $x \in \mathbb{R}$

Γ. Αν $g(x) = \eta\mu x + \sqrt{1 + \eta\mu^2 x}$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να δειχθεί ότι η εξίσωση g(x)= -x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Θεωρώ συνάρτηση $b(x) = g(x) + x, \ x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

και η b συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

$b(-\frac{\pi}{2}) = g(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = \eta\mu(-\frac{\pi}{2}) + \sqrt{1 + \eta\mu^2(-\frac{\pi}{2})} - \frac{\pi}{2} = -1 + \sqrt{1+1} - \frac{\pi}{2} =$

$-1 + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} < 0$

$b(0) = g(0) - 0 = \eta\mu 0 + \sqrt{1+0} = 1 > 0$

Από Θ. Bolzano $\exists \ \xi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ τω $b(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow g(\xi) = \xi$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta,\ x>0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1,f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$ τότε

Α. Να βρεθούν οι τιμές των α,β και το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$.

Β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Γ. Έστω $M(x(t),f(x(t)))$, $x(t)>x(0)=1$ σημείο που κινείται στην γραφική παράσταση της f ώστε $x'(t)=x(t)$, όπου t ο χρόνος κίνησης του σημείου. Θεωρούμε A τη προβολή του M στον $y'y$ και B το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τραπεζίου $OBMA$ τη στιγμή που το σημείο διέρχεται από τη θέση $(e,f(e))$.

Λύση

$f(x)=\alpha\ln x+\beta$, $x>0$

η εφ/νη (ε) ως φ στο $(1, f(1))$

έχει $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$

α) $\alpha,\beta=;$

Δηλαδή $\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$

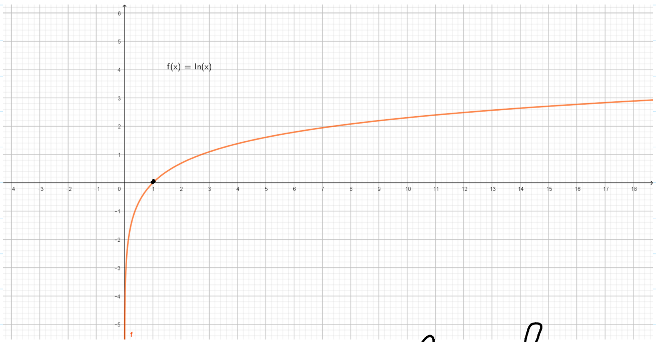
$f'(1)=1$

Έτσι $f'(x)=(\alpha\ln x+\beta)'=\alpha(\ln x)'+\beta'=\alpha\cdot\frac{1}{x}$ $\Big\}$ $\Leftrightarrow \alpha\cdot 1=1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

$f(x)=\ln x+\beta$

αλλά $\lim\limits_{x\to e}(\ln x+\beta)=1 \Leftrightarrow \ln e+\beta=1 \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$

Επομ. $f(x)=\ln x$.



Ζητώ $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

Β. Ζητώ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

μου θυμίζει όριο λόγου μεταβολής της f στο 0

$(\ln 1=0)$

Επει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\ln 1}{x+1-1}=$

και θέτω $h=x+1$ άρα $h\to 1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{h\to 1}\frac{\ln h-\ln 1}{h-1}=f'(1)$.

Επομένως $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ και $f'(1)=\frac{1}{1}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.