

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

### Π αράγωγος με ορισμό

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$

1.  $f(x) = |x-1|x$ ,  $x_0 = 1$

2.  $f(x) = \frac{x|x|}{2+|x|}$ ,  $x_0 = 0$

3. Έστω  $f'(1)=1$  και  $H(x) = \begin{cases} f(1-x), & x \geq 0 \\ f(1+x), & x < 0 \end{cases}$ . Να εξετάσετε αν η  $H$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Έστω  $f'(1)=0$  και  $H(x) = \begin{cases} f(2x-3), & x \geq 2 \\ f(3x-5), & x < 2 \end{cases}$ . Να εξετάσετε αν η  $H$  είναι παραγωγίσιμη στο 2.

5. Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x < 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1 \text{ και } f(x) = (x-a)\sqrt{x}, x_0 = 0$$

6. Υπάρχει το  $f'(0)$ . Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + (x-1)f(0)}{x}$

7. Έστω:  $f(x) = (x^2 + 2x + 6)g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 5}{x} = 4$ ,  $g$  συνεχής. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.

8. Έστω  $f$  συνεχής στο 1 και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 5$ . Δείξτε ότι  $f(1)=2$  και βρείτε, αν υπάρχει, την  $f'(1)$

9. Υπάρχει ο  $f'(a)$ . Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$

### 🔗 Συναρτησιακοί τύποι και ορισμός παραγώγου.

10. Έστω  $f: R \rightarrow R$  ώστε  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y$ ,  $f'(0) = \lambda$ . Να δείξετε ότι  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in R$ .

11. Έστω  $f: R \rightarrow R$  ώστε  $f(x+y) = f(x)f(y)$  για κάθε  $x, y$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) \neq 0$ . Να δείξετε ότι  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in R$ .

12. Αν  $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ ,  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ,  $f'(1) = 2$  δείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $(0, +\infty)$

13. Αν  $f(xy) = f(y)f(x)$ ,  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ,  $f'(1) = 1/2$  τότε δείξτε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $(0, +\infty)$

14. Αν  $f'(0) = 1$  και για κάθε  $\chi, \psi \in P$   $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ , να αποδείξετε ότι  $f'(\chi) = 1 + f^2(\chi)$  για κάθε  $\chi \in P$

### Παράγωγος – παρεμβολή – σύγκριση – ανίσωση

15. Αν  $f: P \rightarrow P$  με  $f'(0) = f(0) = 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  είναι

παραγωγίσιμη στο 0 με  $g'(0) = 0$

16. Μία συνάρτηση  $f: P \rightarrow (0, +\infty)$  έχει την ιδιότητα  $f^3(\chi) + \chi^2 f(\chi) = 1$  για κάθε  $\chi \in P$ . Να αποδείξετε ότι α)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\chi) = 1 \text{ και } \beta) f'(0) = 0$$

17. Αν για την συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  ισχύει  $f(\chi) - f(\psi) \leq |\chi - \psi|^4$  για κάθε  $\chi, \psi \in P$  να αποδειχθεί ότι

α)  $|f(\chi) - f(\psi)| \leq |\chi - \psi|^4$  και β)  $f'(\chi) = 0$  για κάθε  $\chi \in P$

18. Δίνεται συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  για την οποία ισχύει  $f^3(\chi) + 2f(\chi) - 6\chi = 0$  για κάθε  $\chi \in P$ . Να αποδείξετε ότι

α) η  $f$  συνεχής στο 0

β) η  $f$  παραγωγίσιμη στο 0

γ) η  $f$  συνεχής σε κάθε  $\chi_0 \in P$

δ) η  $f$  παραγωγίσιμη σε κάθε  $\chi_0 \in P$

### Παράγωγος –αλλαγή μεταβλητής

19. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\chi_0 = 3$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - f(3)}{x-1}$

20. Αν η συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\chi_0 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 3$ , να δείξετε ότι

$$f'(0) = 3$$

### Ισοδύναμος ορισμός παραγώγου $\chi \rightarrow \chi_0, h \rightarrow 0$

21. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\chi_0 = a$ , να βρεθούν τα όρια α)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$  και

β)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h^2)}{h - \eta \mu 2h}$$