ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

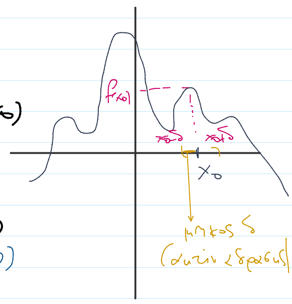
Τρίτη, 23 Φεβρουαρίου 2021 9:20 πμ

Ορισμός

Έστω f με πεδίο ορισμού A.

Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) όταν υπάρχει $\delta > 0$ (ακτίνα δράσης) ώστε $f(x) \le f(x_0)$ ($\ge$) για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο του τοπικού μεγίστου (ελαχίστου) και το $f(x_0)$ τιμή του τ. μεγίστου (ελαχίστου)



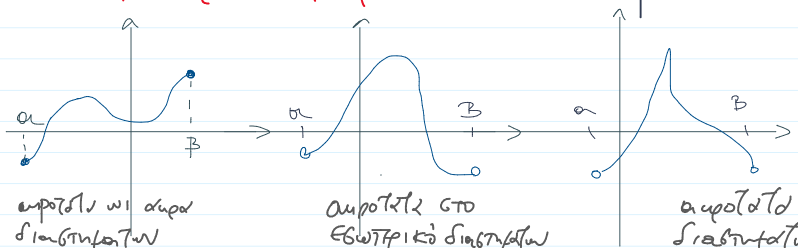
Σημείωση: όταν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in A$

Τότε το $(x_0, f(x_0))$ θα είναι ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

$f(x) \le f(x_0)$

$\forall x \in A$

Πόσα είδη ακροτάτων έχουμε:

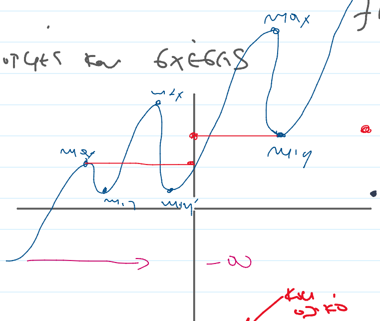


ακρότατα και άκρα διαστημάτων

ακρότατα στο εσωτερικό διαστημάτων με υπάρχουσα παράγωγο $f'(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

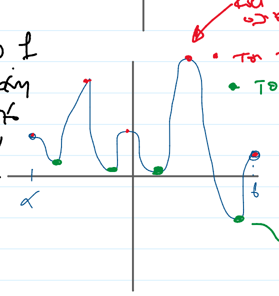
ακρότατα στο εσωτερικό διαστημάτων με σημεία στα οποία η f' δεν ορίζεται

Μορφές και σχέσεις



- Μπορεί ένα τοπικό μέγιστο να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο
- Μπορεί να έχουμε μέγιστα (τοπικά) ή ελάχιστα (τοπικά) αλλά δεν είναι απαραίτητο να είναι κάποιο από αυτά ολικό

Έστω f ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$:



- τα τοπικά μέγιστα
- τα τοπικά ελάχιστα.

και ολικό.

- Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι και ολικό
- Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικό

Το Θεώρημα Fermat.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ.

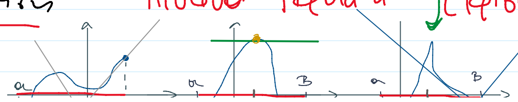
Έστω $x_0 \in \Delta$ (εσωτερικό του Δ)

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο (τοπικό) στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό

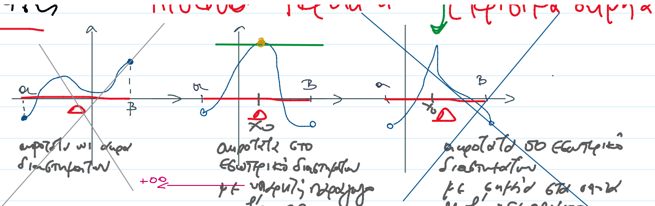
$$f'(x_0) = 0$$

Εξήγηση

Πιθανά Ακρότατα (κρίσιμα σημεία)



Σημεία ... Θεώρημα Fermat (κρίσιμα σημεία)



ακρότατο και άκρα διαστημάτων

ακρότατο στο εσωτερικό διαστημάτων με υπαρκτή παράγωγο $f'(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$

ακρότατο στο εσωτερικό διαστημάτων με σημείο στο οποίο η f' δεν ορίζεται

+∞

ΔΕ ΜΕ νοιάζουν τα ακραία σημεία. Το x_0 είναι ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ

x_0 εσωτερικό πλησιάζει ακρότατο στο x_0
η f παραγωγίσιμη στο x_0

x_0 εσωτερικό πλησιάζει ακρότατο στο x_0
η f όχι παραγωγίσιμη

$f'(x)=0$

$\Downarrow$

Το θεώρημα Fermat.

Θεώρημα Fermat και η απόδειξή του.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ.
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' αυτό και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x_0)=0$

Απόδειξη

Έστω η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.
Το x_0 είναι εσωτερικό του Δ οπότε υπάρχει $\delta>0$ όπου $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$.
και έτσι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Η f παραγωγίσιμη στο x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (1)$$

και:

- αν $x<x_0$ ($x \to x_0^-$) $x-x_0<0$, $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x)-f(x_0) \geq 0$ και $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

$x\to x_0^-$ x_0 $x \to x_0^+$; $x_0-\delta$, $x_0+\delta$

οπότε $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (2)

- $x>x_0$ ($x\to x_0^+$) $x-x_0>0$ $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0) \geq 0$

το $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (3)

Η (1) λόγω (2) και (3) $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ άρα $f'(x_0)=0$.

Θεώρημα:
Έστω f παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) τότε $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

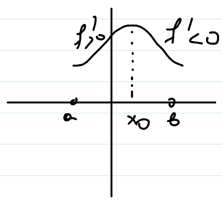
ii) ... $f'(x)<0$ ... (α, x_0) ... $f'(x)>0$ ... (x_0, β) ...

i) αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

ii) αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β) τότε $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f

iii) αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο και η f γνησίως μονότονη στο (α,β)

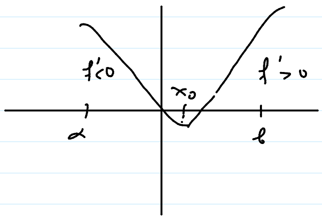
Απόδειξη



στο (α,x_0) $f'(x)>0$ άρα
$f \uparrow$ στο $(\alpha,x_0]$
οπότε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$
$f\downarrow$ στο $[x_0,\beta)$
άρα $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$

Άρα σε κάθε περίπτωση στο (α,β) $f(x)\le f(x_0)$ για $x\in(\alpha,\beta)$
άρα το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f στο x_0

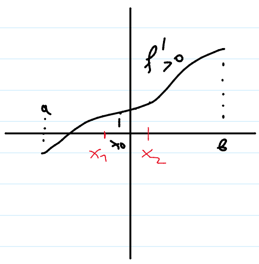
ii) Ομοίως



Αφού $f'(x)<0$ στο (α,x_0) η $f(x)\downarrow$ στο $(\alpha,x_0]$
άρα $f(x)\ge f(x_0)$ για $x\in(\alpha,x_0]$
Αφού $f'(x)>0$ στο (x_0,β) η $f(x)\uparrow$ στο $[x_0,\beta)$
άρα $f(x)\ge f(x_0)$ για $x\in[x_0,\beta)$

Άρα σε όλο το (α,β) $f(x)\ge f(x_0)$ για $x\in(\alpha,\beta)$.
Άρα το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f στο x_0

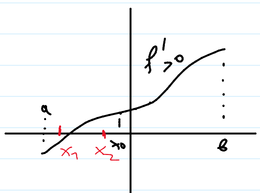
iii)



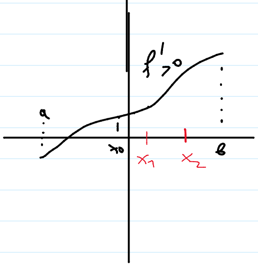
Έστω f' διατηρεί πρόσημο και έστω $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$

Τότε αφού f συνεχής στο (α,β) $f\uparrow$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

• $x_1<x_0<x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο



• $x_1<x_2<x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)<f(x_0)$



• $x_0<x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_0)<f(x_1)<f(x_2)$

παρατηρούμε ότι σε όλες τις εκδοχές $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε $f\uparrow$ στο (α,β)

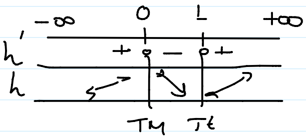
Λύση άσκησης

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$. Είναι $A_h=\mathbb{R}$

α) $h'(x)=6x^2-6x$ ρίζες $h'(x)=0$ $6x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$. στο $D_h=\mathbb{R}$

α) $h'(x)=6x^2-6x$ ρίζες $h'(x)=0 \quad 6x(x-1)=0 \iff x=0$ ή $x=1$



η $h \nearrow$ στα $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

η $h \searrow$ στο $[0,1]$

και στη θέση $x=0$ παρουσιάζει τ. μέγιστο με $(0,-1)$

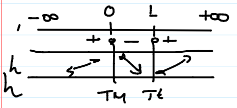
με $h(0)=-1$

ενώ στη θέση $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με $h(1)=-2$

$(1,-2)$.

β) Πλήθος ριζών

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h στο A_h



$h((-\infty,0]) \overset{h\nearrow}{=} (\lim_{x\to-\infty} h(x), h(0)] = (-\infty,-1]$ (οι τιμές των άκρων δεν είναι επιθυμητές)

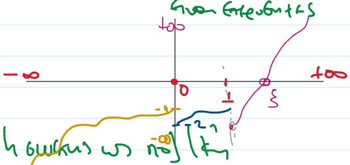
$h([0,1]) \overset{h\searrow}{=} [h(1),h(0)] = [-2,-1]$ (οι τιμές των άκρων δεν είναι επιθυμητές)

$h([1,+\infty)) \overset{h\nearrow}{=} [h(1), \lim_{x\to+\infty} h(x)) = [-2,+\infty)$ οι τιμές των άκρων είναι επιθυμητές

Διότι

- $\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$

- $h(0)=-1$
- $h(1)=-2$



Παρατηρώ ότι στο $[1,+\infty)$ η h συνεχής ως πολ/μη

$h(1)\cdot\lim_{x\to+\infty} h(x) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano $\exists\, \xi\in(1,+\infty)$ $h(\xi)=0$ και αφού

$\xi\in(-2,+\infty)$

στο $[1,+\infty)$ $h\nearrow$ το ξ μοναδικό

Άρα 1 η εξ. 1 ρίζα. —

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ e^{1-x} & , x>1 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , x<1 \\ x^2-4x+3 & , x\ge 1 \end{cases}$.

ii) Παράγωγος:

- $x<1$ $g'(x)=2x-2$ $g(1)=1-4+3=0$
- $x>1$ $g'(x)=2x-4$
- $x=1$ $\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x+1-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2}{x-1}=1-1=0$

$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-2$

$g'(1)\notin\mathbb{R}$

$\Delta=16-12=4$

$x_{1,2}=\frac{4\pm2}{2}$ ↗ 3, ↘ 1

Επειδή

$g'(x)=\begin{cases} 2x-2 , & x<1 \\ 2x-4 , & x>1 \end{cases}$ ρίζες: $g'(x)=0 \iff \begin{cases} 2x=2 , & x<1 \\ 2x=4 & x>1 \end{cases}$

$\{ x=1 \quad x<1$

$-\infty$ 1

$$\begin{cases} \dots \\ 2x-4, & x>1 \end{cases}$$ Ρίζες: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2, & x<1 \\ 2x=4, & x>1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, & x<1 \\ x=2, & x>1 \end{cases}$$

πρόσημο: $g'(x)$:

x	$-\infty$		1
$x<1$		$-$	

x	1		2		$+\infty$
$x>1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
g'		$-$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

ελάχιστο.

η $g \downarrow$ για κάθε $x \leq 2$ και $g \uparrow$ για κάθε $x \geq 2$ οπότε στο $x=2$ παρουσιάζει ελάχιστο

$g(2) = \dots$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις :

i) $f(x)=e^x-x$ ii) $f(x)=x^x,\quad x>0$.

ii) $f(x)=x^x,\ x>0$ ανασκευάζουμε την f ώστε η μεταβλητή να φύγει από τη βάση (για λόγους ευκολίας)

Είναι $f(x)=e^{\ln x^x},\ x>0$

$f(x)=e^{x\ln x},\ x>0$

$(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(e^x)'=e^x$
$(x^x)'=\,?$

Β. Λυκείου
Μετατροπή αριθμού σε εκθετική με ότι βάση επιθυμώ

πχ θέλω να εκφράσω το 5 σαν εκθετική με βάση 10

$5=10^{\log_{10}5}=10^{\log 5}$

με βάση e

$5=e^{\ln 5}$

γενικά

$k=10^{\log k}$

$k=e^{\ln k},\ k>0$

Επειδή $f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'\ \overline{(e^{u})'}$

$=e^{x\ln x}(x\ln x)'=$

$e^{x\ln x}\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)=$

$=e^{x\ln x}\left(\ln x+x\dfrac{1}{x}\right)=e^{x\ln x}(\ln x+1).$

Ρίζες $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x\ln x}(\ln x+1)=0$

$(e^{x\ln x}>0)$ άρα $\ln x+1=0 \Leftrightarrow$

$\ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$ ή $x=\dfrac{1}{e}$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
$e^{x\ln x}$		$+$		$+$	
$\ln x+1$		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ελάχιστο

η $f \downarrow$ για $x\in(0,\frac{1}{e}]$ $f\uparrow$ για $x\in[\frac{1}{e},+\infty)$

και στη θέση $x=\frac{1}{e}$ παρουσιάζει ελάχιστο

$f(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{\frac{1}{e}(\ln 1-\ln e)}=e^{-\frac{1}{e}}.$

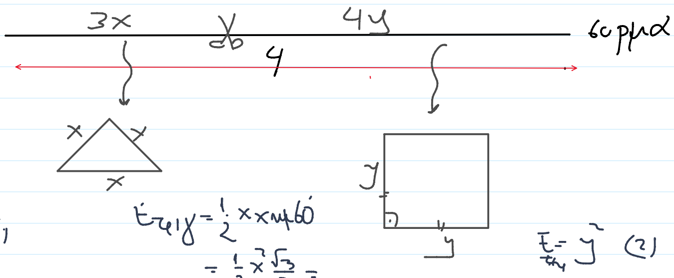
Προβλήματα ακροτάτων

Β/

7. Με ένα σύρμα μήκους 4m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.



$E_{ολ} = E_{τριγ} + E_{τετρ} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$

$E_{τριγ} = \frac{1}{2} x x ημ60° = \frac{1}{2} x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (1)

$E_{τετ} = y^2$ (2)

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + y^2 \ldots$

πρέπει να διώξω την μία μεταβλητή· ψάχνω για σχέση που τις συνδέει

αλλά $\underbrace{3x+4y}$ $= 4$ (υπόθεση) έτσι $y = \frac{4-3x}{4}$

άρα $E_{ολ}(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{4-3x}{4}\right)^2$.

περιορισμοί (φυσικοί)

$x>0$, $y>0$ (φυσική)

$x>0$ και $4-3x>0$

$x>0$ και $-3x>-4$

$x>0$ και $x<\frac{4}{3}$

$x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$

ii) $E_{ολ}(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{16-24x+9x^2}{16}$

$E_{ολ}(x) = \frac{4\sqrt{3}x^2+9x^2-24x+16}{16}$.

$E'_{ολ}(x) = \frac{1}{16}\left(8\sqrt{3}x+18x-24\right)$

$= \frac{1}{16}\left((8\sqrt{3}+18)x-24\right)$

$E'_{ολ}(x) = 0 \Leftrightarrow (8\sqrt{3}+18)x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{\cancel{24}}{\cancel{2}(4\sqrt{3}+9)} = \frac{12}{4\sqrt{3}+9} < \frac{4}{3}$

άρα

x	0		$\frac{12}{4\sqrt{3}+9}$		4/3
$E'_{ολ}$	‖	−	0	+	‖
$E_{ολ}$	‖	↘		↗	‖

άρα για $x = \frac{12}{4\sqrt{3}+9}$ το εμβαδό ελάχιστο

Β/Α/ .

13. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft [1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακριά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.

i) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}.$$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

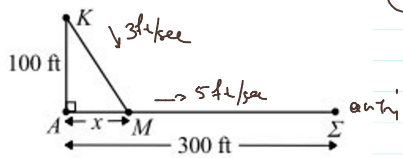
α) Έστω T_{KM} ο χρόνος κολύμβησης
$T_{MΣ}$ ο χρόνος τρεξίματος

$T_{ολ} = T_{KM} + T_{MΣ}$.

κολύμπι: σε 1 sec κάνει 3 ft
σε T_{KM} KM

άρα $\frac{1}{T_{KM}} = \frac{3}{KM}$.

θέλει να βρω



Πυθαγόρειο θεώρημα $\hat{AKM}$

$KM^2 = KA^2 + AM^2 \Leftrightarrow KM^2 = 100^2 + x^2 \Leftrightarrow KM = \sqrt{100^2+x^2}$

Επί. $\frac{1}{T_{ΚΜ}} = \frac{3}{\sqrt{100^2+x^2}} \Rightarrow T_{ΚΜ} = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}$ (1)

Ακόμα: σε 1 sec τρέχει 5 f(t)
σε $T_{ΜΣ}$ τρέχει ΜΣ

$\frac{1}{T_{ΜΣ}} = \frac{5}{ΜΣ}$ ← αρκεί να το βρω

$ΜΣ = 300 - ΑΜ$
$ΜΣ = 300 - x$

Άρα $\frac{1}{T_{ΜΣ}} = \frac{5}{300-x}$ άρα $T_{ΜΣ} = \frac{300-x}{5}$ (2)

Άρα $T_{ολ}(x) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\sqrt{100+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}$.

$x \in (0,300)$

Περιορισμοί:
$x>0$, $300-x>0$
$x>0$, $x<300$

ii) $T'(x) = \left(\frac{\sqrt{100+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5}\right)' = \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{100+x^2}}(100+x^2)' + \frac{1}{5}(300-x)' =$

$= \frac{1}{\cancel{6}_{3}} \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{100+x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{100+x^2}} - \frac{1}{5} =$

$\frac{5x - 3\sqrt{100+x^2}}{15\sqrt{100+x^2}}$. $\quad T'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3\sqrt{100+x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{100+x^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 9(100+x^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25x^2 = 900 + 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 900 \Leftrightarrow x^2 = \frac{900}{16} \Leftrightarrow$

$x = \pm\frac{30}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{15}{2}$ όπου $x \in (0,300)$

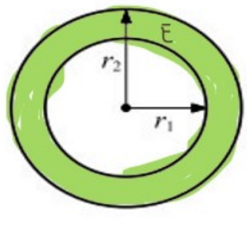
άρα $x = \frac{15}{2}$.

x	0		$15/2$		300
T'		−	0	+	
T		↘		↗	

Άρα για $x = \frac{15}{2}$

ο χρόνος είναι ελάχιστος

11. Έστω Ε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή t =0 είναι r_1 = 3cm και r_2 = 5cm και ότι για t > 0 η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s.



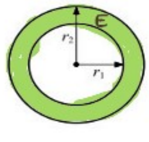
Να βρείτε:

i) πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii) πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

$r_1(t) = 3$ cm $\quad r_2(t) = 5$ cm $\quad r_1'(t) = 0{,}05$ cm/sec $\quad r_2'(t) = 0{,}04$ cm/sec

i) $t = ;$ όπου $E(t_0) = 0$



$E = E_2 - E_1 \Leftrightarrow E = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

επί για χρόνο t

$E(t) = \pi r_2^2(t) - \pi r_1^2(t)$ (1), $t>0$ $\quad \boxed{(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)}$

Αφού $r_1'(t) = 0{,}05$ τότε $r_1(t) = 0{,}05t + c_1$

και $r_2'(t) = 0{,}04$ τότε $r_2(t) = 0{,}04t + c_2$

Άρα αφού $r_1(0) = 3$ τότε $0{,}05 \cdot 0 + c_1 = 3 \Leftrightarrow c_1 = 3$

και $r_2'(t)=0{,}04$ άρα $r_2(t)=0{,}04t+C_2$

Αλλά $r_1(0)=3$ άρα $0{,}05\cdot 0+C_1=3 \Leftrightarrow C_1=3$

$$\boxed{r_1(t)=0{,}05t+3}$$

$r_2(0)=5$ άρα $0{,}04\cdot 0+c_2=5 \Leftrightarrow c_2=5$

$$\boxed{r_2(t)=0{,}04t+5}$$

$E=\pi r_2^2(t)-\pi r_1^2(t)=\pi\left(r_2^2(t)-r_1^2(t)\right)$

Το E μηδενίζεται όταν $r_1=r_2$

Επομένως $0{,}05t+3=0{,}04t+5$

$\Leftrightarrow 0{,}01t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{0{,}01}=2\cdot 10^2$

$=200$ sec

β

Είναι $E'(t)=2\pi r_2(t)\cdot r_2'(t)-2\pi r_1(t)\cdot r_1'(t)$

Οπότε $E'(t)=2\pi\cdot r_2(t)\cdot 0{,}04-2\pi r_1(t)\cdot 0{,}05$

$E'(t)=2\pi\left(0{,}04(0{,}04t+5)-0{,}05(0{,}05t+3)\right)$

$=2\pi\left(16\cdot 10^{-4}t+2\cdot 10^{-1}-25\cdot 10^{-4}t-0{,}15\right)$

$=2\pi\left(-9\cdot 10^{-4}t+0{,}05\right)$

Άρα $E'(t)=0 \Leftrightarrow -9\cdot 10^{-4}t=-0{,}05 \Leftrightarrow t=\frac{5\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^{-4}}$

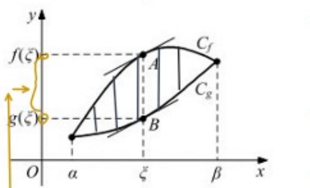
$t=0{,}556\cdot 10^2$ sec

$=55{,}6$ sec

t	0		55,6	
E'		+	0	−
E		↗		↘

Άρα εμβαδό μέγιστο όταν $t=55{,}6$ sec

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα [α,β]. Το σημείο ξ ϵ (α,β) είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία A(ξ, f(ξ)) και B(ξ, g(ξ)) είναι παράλληλες.



Έστω f, g παραγωγίσιμες στο (α,β).

Ισχύει $f(x)-g(x)\le f(\xi)-g(\xi)$

Ν.δ.ο.: $f'(\xi)=g'(\xi)$.

Κατακόρυφη απόσταση συναρτήσεων:

Είναι η διαφορά τους επί του yy'

Απόδειξη

Θεωρώ $h(x)=f(x)-g(x)-f(\xi)+g(\xi)$, $x\in[\alpha,\beta]$

Παρατηρώ $h(\xi)=0$ $\quad \xi\in(\alpha,\beta)$.

Η h παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων

και $h(x)\le h(\xi)$ (μέγιστο)

Από θεώρημα Fermat $h'(\xi)=0$.

Άρα $h'(x)=f'(x)-g'(x)-(\cancel{f(\xi)})'+(\cancel{g(\xi)})'=f'(x)-g'(x)$

άρα $h'(\xi) = f'(x) - g'(x) - \cancel{(f(\xi))'} + \cancel{(g(\xi))'} = f'(x) - g'(x)$

$\Leftrightarrow f'(\xi) = g'(\xi)$

Η διαχείριση των ασκήσεων που αφορούν θ. Fermat.

Πολλές φορές σε μία εκφώνηση ΔΙΝΕΤΑΙ μια σχέση ανισοϊσότητας

Δε είναι ΠΑΝΤΑ ξεκάθαρο τι ζητείται!

Πάντα όμως από την δοσμένη ανισοϊσότητα θα καταλήξω σε ΙΣΟΤΗΤΑ

- Από την ανισοϊσότητα:
  - I. φέρνω τα πάντα στο 1ο μέλος και θεωρώ συνάρτηση
  - II. βρίσκω μία ρίζα (με το μάτι)
  - III. γράφω τη σχέση της συνάρτησης που προέκυψε φέρω της αρχικής ανισοϊσότητας προκειμένου να φανεί το ακρότατο (χρησιμοποιώντας τον ορισμό βάζω την ρίζα της συνάρτησης)
  - IV. Ελέγχω τις προϋποθέσεις του θ. Fermat.
  - V. Τον εφαρμόζω

Ασκήσεις φυλλαδίου

12. Αν $ln(\frac{x}{a}) \le x - a$, $\forall x \in (0,+\infty)$, $a > 0$, $a = ;$

/13

$\ln\left(\frac{x}{a}\right) \le x - a$, $x > 0$.

$\ln x - \ln a \le x - a$, $x > 0$ $\quad (\ln x - \ln a - x + a \le 0)$ (1)

Θεωρώ $f(x) = \ln x - \ln a - x + a$, $x > 0$

παρατηρώ $f(a) = 0$

(1) $\Leftrightarrow f(x) \le f(a)$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $(a, f(a))$

η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγ. συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$

Το a εσωτερικό του $(0,+\infty)$

άρα από θ. Fermat $f'(a) = 0$

θ. Fermat
- f παραγ. στο (α,β)
- f έχει ακρότατο (ανισοϊσότητα) σε ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ (το x_0 εσωτερικό)

τότε $f'(x_0) = 0$

$f(x) = \ln x - \ln a - x + a$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{x}$

και $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a}{a} = 0 \Leftrightarrow$

$1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

24. Έστω ότι για κάθε ∈ℝ ισχύει $\frac{2\alpha^{\chi}}{\beta^{2\chi}+1} \leq 1$ με α,β∈(0,1)∪(1,+∞), να αποδείξετε ότι α=β

Είναι $\frac{2a^x}{b^{2x}+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2a^x \leq b^{2x}+1$ $\quad a,b \in (0,1)\cup(1,+\infty)$

$(b^{2x}+1>0)$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 2a^x - b^{2x} - 1 \leq 0.$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Θεωρώ συνάρτηση $f(x) = 2a^x - b^{2x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $f(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ για $x=0$ $f(0) = 0$

άρα $f(x) \leq f(0)$

αλλά: η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά εκθετικών,

το 0 εσωτερικό του $\mathbb{R}$

η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0 άρα από Θ. Fermat

$f'(0) = 0.$ $\quad f(x) = 2a^x - b^{2x} - 1$

$f'(x) = (2a^x)' - (b^{2x})' - \cancel{(1)'}$ $\to 0$

$= 2 \cdot a^x \ln a - b^{2x} \cdot \ln b \cdot (2x)' =$

$= 2 \cdot a^x \ln a - 2b^{2x} \ln b.$

$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (a^f)' = a^f \cdot \ln a \cdot f'}$

και $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot a^0 \ln a - 2b^0 \ln b = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln a - 2\ln b = 0 \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ άρα

$a = \beta$.

$f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

25. Έστω συνάρτηση f: ℝ→$\mathbb{R}^*_+$ με $\ell n(f(\chi)) \geq \chi - \beta$, για κάθε χ∈ℝ. Δίνεται επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη

/14

στο ℝ και υπάρχει α∈ℝ ώστε $\ell n(f(\alpha)) = \alpha - \beta$ και $f(\beta) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) = f(\alpha)\, f'(\beta)$

Ισχύει $\ln(f(x)) \geq x - \beta$, $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

ισχύει $\ln f(a) = a - b$

$f(\beta) = 1$

νδο $f'(a) = f(a) \cdot f'(\beta)$

Θεωρώ $h(x) = \ln(f(x)) - x + \beta$,

$f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Τότε $h(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και παρατηρώ

$h(a) = \ln f(a) - a + b = 0$ (υπόθεση)

h παραγωγίσιμη στο ℝ, παρουσιάζει ακρότατο στο $x=a$

άρα από Θ. Fermat $h'(a) = 0$

$h'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) - 1$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{f(a)} f'(a) = 1$ άρα

άρα $f'(a) = f(a)$ (1)

αλλά για $x=\beta$ $h(\beta) = \ln(f(\beta)) - \beta + \beta - \ln f(\beta) = \ln 1 = 0$

άρα και το $x=\beta$ είναι ακρότατο $h(x) \geq h(\beta)$

άρα από Θ. Fermat $h'(\beta) = 0$,