ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE - ΘΜΤ

Α. Το Θεώρημα Rolle.

Εστω συνάρτηση f ορισμένη σε $\Delta = [\alpha, \beta]$

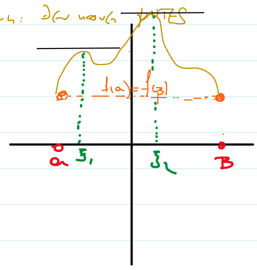
αν

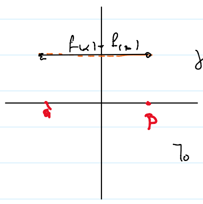
- η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$f'(\xi) = 0$$

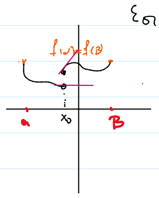
f συνεχής: δεν διακόπτεται
f παρ/μη: δεν κορυφές

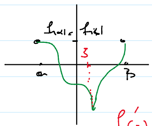




για όλα τα $x \in (\alpha, \beta)$
$f'(\xi) = 0$
(σταθερή συνάρτηση)
Το Θ. Rolle ισχύει $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Εστω f: ασυνεχής





$f'(\xi) \notin \mathbb{R}$ αφού δεν υπάρχει παράγωγος στο ξ.

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

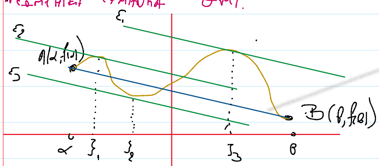
Εστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα $[\alpha, \beta]$

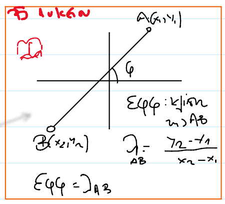
- αν η f συνεχής $[\alpha, \beta]$
- αν η f παραγωγίσιμη στο (α, β)

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$

ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία ΘΜΤ.



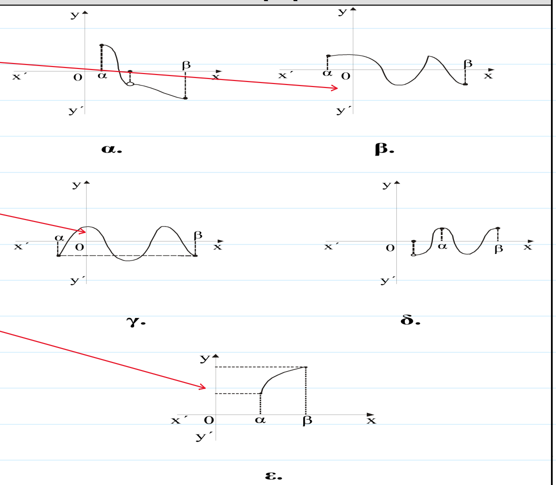


Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη στο $[\alpha, \beta]$ (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ώστε η εφαπτομένη $(f'(\xi_1), f'(\xi_2), f'(\xi_3))$ να είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα A, B.

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α του πίνακα Ι σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο [α, β], συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Θεώρημα Bolzano 2. Θεώρημα Rolle 3. Θεώρημα μέσης τιμής	

Πίνακας ΙΙ

1	2	3

Ασκήσεις Θ. Rolle

○ Προϋποθέσεις θεωρήματος Rolle (• συνεχής • παραγωγίσιμη στο ... • $f(\alpha)=f(\beta)$)

Α/1/

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα ξ ϵ (α, β) για τα οποία ισχύει f ΄(ξ) .

i) $f(x)=x^2-2x+1$, $[0,2]$ ii) $f(x)=\eta\mu 3x$, $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(x)=1+\sigma\upsilon\nu 2x$, $[0,\pi]$ iv) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$.

ii) $f(x)=\eta\mu 3x$, $x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

○ η f συνεχής στο $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ ως τριγωνομετρική

○ η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ ως τριγωνομετρική.

○ $f(0)=\eta\mu 0=0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\eta\mu 3\cdot\frac{2\pi}{3}=\eta\mu 2\pi=0$ άρα $f(0)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Άρα από Θ. Rolle $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$f'(\xi)=0$

$f'(x)=(\eta\mu 3x)'=\sigma\upsilon\nu 3x\cdot(3x)'=3\sigma\upsilon\nu 3x$ $(\eta\mu f)'$

και $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

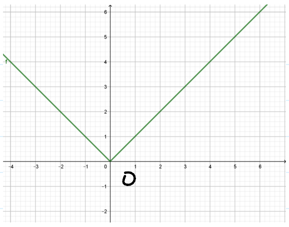
$3\sigma\upsilon\nu 3\xi=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3\xi=0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 3\xi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\xi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \xi=\frac{2}{3}\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $\kappa\in\mathbb{Z}$ $\xi\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow k=-1 \qquad \xi = \frac{\pi}{2}.$

$k=0 \qquad \xi = \frac{\pi}{6}$

iv) $f(x)=|x|$, $[-1,1]$.



Η f συνεχής στο $[-1,1]$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ διότι

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

διότι $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ και $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ -x, & x\in[-1,0) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

άρα $f'(0)\notin\mathbb{R}$

και δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Εξετάζω το Θ. Bolzano

η f συνεχής στο $[-1,0]$ και στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$f(-1) = 1+20-25+1+1=-2<0$

$f(0)=1>0$, $f(1)=1-20-25-1+1=-44<0$

$f(-1)\cdot f(0)<0$, $f(0)\cdot f(1)<0$ άρα από Θ. Bolzano

$\exists\ \xi_1\in(-1,0)$ $\exists\ \xi_2\in(0,1)$ τω

$f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$

Άρα απέτυχε το Θ. Bolzano για την g δοκιμάζω Θ. Rolle για την f στο $[\xi_1, \xi_2]$ τα προηγ. ευρήματα.

f συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

f παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)

και εδώ δοκιμάζω Bolzano

Έστω $g(x) = 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1$, $x \in [-1, 1]$ συνεχής

$g(-1) = -4 - 60 + 50 - 1 = -15 < 0$

$g(1) = 4 - 60 - 50 - 1 = -107 < 0$ χλωμό!

$f(\xi_1) = 0 = f(\xi_2)$ άρα $\exists\, \gamma \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-1, 1)$ τω $f'(\gamma) = 0$

Έτσι $f(x) =$ x⁴ – 20x³ – 25x² – x +1

$f'(x) = 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1$

και $f'(\gamma) = 0$ άρα $4\gamma^3 - 60\gamma^2 - 50\gamma - 1 = 0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = (x – 1)ημx. Να αποδείξετε ότι :

i) Η εξίσωση f ′(x) = 0 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (0,1).

ii) Η εξίσωση εφx = 1–x έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (0,1)

Λύση

η f συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών.

η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παρ/μων

$f(0) = -1 \cdot ημ0 = 0$ $\quad f(1) = (1-1) \cdot ημ1 = 0$

Άρα $f(0) = f(1)$ άρα ισχύει το Θ. Rolle

και $\exists\, \gamma \in (0,1)$ τω $f'(\gamma) = 0$ ..

ii) η εξίσωση $εφx = 1 - x$ στο $(0,1)$.

Προσεγγίζω με Θ. Rolle

Στόχος: να βρω ποια συνάρτηση πρέπει να παραγωγίσω για να προκύψει η μορφή της παράστασης $εφx + x - 1$

διερευνώ $\dfrac{ημx}{συνx} = 1 - x \iff$

$ημx = (1-x) \cdot συνx \iff$

$1 \cdot ημx$

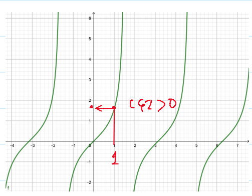
$ημx + (x-1)\,συνx = 0 \iff$

Προσεγγίζω με Θ. Bolzano

Θέτω $h(x) = εφx + x - 1$, $x \in [0,1]$

η h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(0) = -1 < 0$ $\quad h(1) = εφ1 + 1 - 1 = εφ1 > 0$



$h(0) \cdot h(1) < 0$

και από Θ. Bolzano

$\exists\, \theta \in (0,1)$

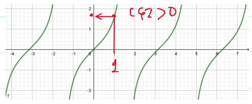
$$\eta\mu x = (1-x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$1\cdot\eta\mu x$

$$\eta\mu x + (x-1)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)'\eta\mu x + (x-1)\cdot(\eta\mu x)' = 0$$

$$\left((x-1)\eta\mu x\right)' = 0$$



και από Θ. Bolzano $\exists\ \theta\in(0,1)$ τω $h(\theta)=0$

Θεωρώ την $f(x) \overset{(i)}{=} (x-1)\cdot\eta\mu x$, $x\in[0,1]$

συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών
παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

$f(0) = 0 = f(1)$ και από Θ. Rolle $\exists\ \mu\in(0,1)$ τω $f'(\mu)=0$ αλλά $f'(x) = \left((x-1)\cdot\eta\mu x\right)'$

$$= \eta\mu x + (x-1)\sigma\upsilon\nu x$$

$$f'(\mu) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\mu + (\mu-1)\cdot\sigma\upsilon\nu\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\mu = (1-\mu)\sigma\upsilon\nu\mu \underset{\sigma\upsilon\nu\mu\neq 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\mu = 1-\mu.$$

Η διαχείριση των προβλημάτων που αφορούν στο Θ. Rolle

Μόλις στοιχειοθετηθεί την κατάσταση που πρέπει να πάει το πρόβλημα (αν θα είναι Θ. Rolle) πρέπει να βρούμε την συνάρτηση που θα εφαρμόσουμε πάνω της το θεώρημα.
Αφού δεν είναι η δοθείσα συνάρτηση ή σχέση, αλλά μία συνάρτηση που θα παραγωγίζεται προκειμένου να προκύψει αυτή (η συνάρτηση ή η σχέση) της εκφώνησης.

Η συνάρτηση που αναζητώ λέγεται ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ή ΑΡΧΙΚΗ συνάρτηση και παραθέτω ένα πίνακα για να καταλάβουμε τη λογική

Παράγουσα συνάρτηση F	f
$(F)' \longrightarrow$	f
$(x)'$	1
$\left(\frac{x^2}{2}\right)'$	x
$\left(\frac{x^3}{3}\right)'$	x^2
$\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)'$	x^ν
$(\eta\mu x)'$	$\sigma\upsilon\nu x$
$(-\sigma\upsilon\nu x)'$	$\eta\mu x$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$\left(-\frac{1}{x}\right)'$	$\frac{1}{x^2}$
$(e^x)'$	e^x
$\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'$	e^{ax}

Το ζορι
είναι στην κατασταση κανονων παραγωγισης

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(-\frac{1}{f}\right)' = \frac{1}{f^2}\cdot f'$$

$$\left(e^{\lambda x} f(x)\right)' = f' + \lambda f \rightarrow \text{πολ/ζω με } e^{\lambda x} \text{ τη σχεση}$$

$$e^{\lambda x} f'(x) + \lambda e^{\lambda x} f \rightarrow e^{\lambda x} f'(x) + (e^{\lambda x})' f \rightarrow$$

$$(e^{\lambda x} f(x))'$$

Ασκησεις απλες

Έστω $f(x)=ax^4+x^2-ax+1$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi)=2\xi$

Θεωρω $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in [0,1]$.

η g συνεχης στο $[0,1]$ ως πραξεις συνεχων

η g παραγωγισιμη στο $(0,1)$ ως πραξεις πραξεις παραγωγισιμων

$g(0) = f(0) - 0^2 = 1$

$g(1) = f(1) - 1^2 = a + 1 - a + 1 - 1 = 1$

$g(0) = g(1)$ αρα απο Θ. Rolle $\exists\, \xi \in (0,1)$ ιω $g'(\xi) = 0$

$g'(x) = (f(x) - x^2)' = f'(x) - 2x$ $\Big\} \Rightarrow f'(\xi) = 2\xi$.

Ευρεση παραγουσας (λεχικης) για $x = \xi$

$f'(x) = 2x \Leftrightarrow$

$f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) - (x^2)' = 0$

$(f(x) - x^2)' = 0$

Εστω f συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $f^2(3)=f^2(1)+8$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,3)$: $f'(\xi) f(\xi)-\xi=0$

Θεωρω $g(x) = f^2(x) - x^2$, $x \in [1,3]$.

η g συνεχης στο $[1,3]$ ως πραξεις συνεχων

η g παραγωγισιμη στο $(1,3)$ ως πραξεις παραγωγισιμων

και $g(1) = f^2(1) - 1^2 = f^2(1) - 1$

$g(3) = f^2(3) - 9$

εξεταζω αν $g(1) = g(3) \Leftrightarrow$

$f^2(1) - 1 = f^2(3) - 9 \Leftrightarrow f^2(1) - f^2(3) - 8 \Leftrightarrow$

$f^2(3) = f^2(1) + 8$ ισχυει

διπλασιαζω $(x^2)' = 2x$ ως λεχικης για $x = \xi$

$f'(x) f(x) - x = 0$

$\left[f^2(x)\right]' = 2 f(x) f'(x)$

$\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2 f'(x) f(x) - 2x = 0$ που ξερω απο 2

$(f^2(x))' - (x^2)' = 0$

$(f^2(x) - x^2)' = 0$.

$$f^2(3) = f^2(1) + 8$$ ισχύει από υπόθεση

Επ. από Θ. Rolle $\exists\ \xi \in (1,3)$ ώστε $g'(\xi) = 0$

και $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x$

$\Big\}\Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) - 2\xi = 0$

$\Leftrightarrow f(\xi)f'(\xi) = \xi.$

Έστω *f* συνεχής στο *[0,1]* , παραγωγίσιμη στο *(0,1)* και *f(1)=0*. Δείξτε ότι υπάρχει *ξ* στο *(0,1)*: *ξ f '(ξ)+ f (ξ) =0*

Θεωρώ $g(x) = x f(x)$, $x \in [0,1]$

συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(0,1)$

$g(0) = 0 f(0) = 0$

$g(1) = 1 \cdot f(1) = 0$ άρα $g(0) = g(1)$

και από Θ. Rolle $\exists\ \xi \in (0,1)$ ώστε

$g'(\xi) = 0$

αλλά $g'(x) = (x f(x))' = x f'(x) + f(x)$ $\Big\} \Rightarrow$

Εύρεση αρχικής

για $x = \xi$

$x f'(x) + f(x) = 0$ σε $1 \cdot f(x)$

σε αθροισμα όπου υπάρχει η f' και η f

σκεφτόμαστε $(f g)' =$

$= f' g + f \cdot g'$

$x f'(x) + (x)' f(x) = 0$ x'

$(x f(x))' = 0$

$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0.$

Έστω *f* συνεχής στο *[a,b]* , παραγωγίσιμη στο *(a,b)* και $f(a) = b^2$, $f(b) = a^2$. Δείξτε ότι υπάρχει *ξ* στο *(a,b)*: *f '(ξ)=2ξ-2(a+b)*

Θεωρώ $g(x) = f(x) + (2(\alpha+\beta) - x)x$, $x \in [a,b]$

η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών

η g παρ/μη στο (α,β) ως πράξεις παρ/μων

$g(\alpha) = f(\alpha) + (2(\alpha+\beta) - \alpha)\alpha =$

$f(\alpha) + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = b^2 + 2a^2 + 2ab - a^2$

Διερεύνηση αρχικής

για $x = \xi$

$f'(x) = 2x - 2(\alpha+\beta)$

$(f(x))' = (x^2)' - (2(\alpha+\beta)x)'$

$(f(x) - x^2 + 2(\alpha+\beta)x)' = 0$ $\{(\alpha x)' = \alpha\}$

$g(b) = f(b) + (2(\alpha+\beta) - b)b = f(b) + 2ab + 2b^2 - b^2$

$= a^2 + 2ab + 2b^2 - b^2$

$g(\alpha) = b^2 + a^2 + 2ab + a^2 - a^2 = (b+a)^2 + \alpha^2 - a^2 = (b+a)^2$

$g(b) = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - b^2 = (\alpha+b)^2 + b^2 - b^2 = (\alpha+b)^2$

$g(\alpha) = g(\beta)$ άρα από Θ. Rolle $\exists\ \xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε

$g'(\xi) = 0.$

Παράγωγος $g'(x) = (f(x) - x^2 + 2(\alpha+\beta)x)' = f'(x) - 2x + 2(\alpha+\beta)$ $\Big\}\Rightarrow$

$f'(\xi) = 2\xi + 2(\alpha+\beta)$

4/10/20 φυλλάδιο (Ενότης του πρώτου)

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$., ανάμεσα σε δύο ρίζες της εξίσωσης $f(\chi)=0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\lambda f(\chi)+f'(\chi)=0$.

Λ ρ_1, ρ_2 ρίζες της $f(x)$
$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$
Έστω $\rho_1 < \rho_2$
και $[\rho_1, \rho_2] \subseteq [\alpha, \beta]$

Θεωρώ $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$

συνεχής ως πράξεις συνεχών
και παρ/μη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων

$g(\rho_1) = e^{\lambda \rho_1} f(\rho_1) = 0$
$g(\rho_2) = e^{\lambda \rho_2} f(\rho_2) = 0$
$g(\rho_1) = g(\rho_2)$ άρα από Θ. Rolle

$\exists\ \xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τω $g'(\xi) = 0$

$g'(x) = \lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x)$ $\}$ για

$\lambda e^{\lambda \xi} f(\xi) + e^{\lambda \xi} f'(\xi) = 0 \overset{:e^{\lambda \xi}}{\Longleftrightarrow} \lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$

(3) μορφές
$\lambda f(x) + f'(x) = 0$ $e^{\lambda x}$
πάντα πολ/ζω με e
(ώστε το άθροισμα της $f(x)$ συνεχίζεται να ισχύει)

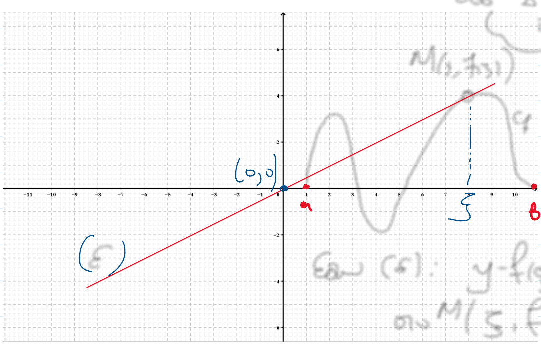
και $\lambda e^{\lambda x} f(x) + e^{\lambda x} f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow (e^{\lambda x})' f(x) + e^{\lambda x} f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow (e^{\lambda x} f(x))' = 0$.

/ /

f ευθεία που η εφαπτομένη χρησιμοποιεί αποδεικνύωση.

24. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(\alpha)=f(b)=0$, $\alpha>0$. $\boxed{\text{Δείξτε ότι υπάρχει } \xi :}$ η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(0,0)$.

Θ. Rolle ή Bolzano



δεν ξέρω την εξίσωση που πρέπει να βρω από την περιγραφή!

θα αναζητήσω την εξίσωση που πρέπει να δείξω!

Έστω (ε): $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$

γιατί $f'(\xi)$. σημείο επαφής $M(\xi, f(\xi))$

η (ε) διέρχεται από το $(0,0)$
$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0-\xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow$

$\boxed{f(\xi) = \xi f'(\xi)}$

(αυτή είναι η σχέση που πρέπει να δείξουμε)

Ορθή μορφή της άσκησης

Έστω f συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α, β) $\alpha > 0$
$f(\alpha) = f(\beta) = 0$ νδο $\exists\ \xi \in (\alpha, \beta)$ τω $f(\xi) = \xi f'(\xi)$

Θεωρώ $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$ $\alpha > 0$

g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών

g παρ/μη στο (α, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων

...

για $x = \xi$
$f(x) = x f'(x) \Leftrightarrow$

$x f'(x) - f(x) = 0$
$x f'(x) - (x)' f(x) = 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

g παρ/μη στο (α,β) ως πράξεις παραγωγίσιμων

$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$

$g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 0$ άρα $g(\alpha) = g(\beta)$ και από Θ. Rolle

$\exists\ \xi \in (\alpha,\beta)$ τω $g'(\xi) = 0$

$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \iff \xi f'(\xi) = f(\xi)$

$xf'(x) - f(x) = 0$

$xf'(x) - (x)'f(x) = 0 \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = 0$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$

4/26/2

Εστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $2f(\alpha)=f(b)$. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2a+b}$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : $g'(\xi)=0$ και στην συνέχεια η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(2\alpha-b,0)$.

α) Ξεκινάμε Rolle για τη g.

η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών

η g παρ/μη στο (α,β) ως πράξεις παρ/μων

$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha-2\alpha+b} = \frac{f(\alpha)}{b-\alpha}$.

$g(b) = \frac{f(b)}{b-2\alpha+b} = \frac{2f(\alpha)}{2(b-\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{b-\alpha}$ Άρα $g(\alpha) = g(b)$

Άρα από Θ. Rolle $\exists\ \xi \in (\alpha,b)$ ώστε $g'(\xi) = 0$.

β) νδο η (ε) της f στο $\xi \in (\alpha,\beta)$ περνά από $(2\alpha-b,0)$

• εφαπτομένη της f στο $(\xi, f(\xi))$
• επαλήθευση του σημείου $(2\alpha-b,0)$

$(x)' - (2\alpha)' + b' = 1 - 0 + 0$

Έστω $(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ η ζητούμενη της εφ/νης της f στο $M(\xi, f(\xi))$

ψάχνω $f'(\xi)$

$g(x) = \frac{f(x)}{x-2\alpha+b} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(x-2\alpha+b) - (x-2\alpha+b)'f(x)}{(x-2\alpha+b)^2} \iff$

$g'(x) = \frac{f'(x)(x-2\alpha+b) - f(x)}{(x-2\alpha+b)^2}$. για $x = \xi$

$\cancel{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)(\xi-2\alpha+b) - f(\xi)}{(\xi-2\alpha+b)^2} \iff f'(\xi)(\xi-2\alpha+b) - f(\xi) = 0$

0 από (α)

άρα $\boxed{f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi-2\alpha+b}}$

Στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

και $(\varepsilon): y - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi-2\alpha+b}(x-\xi)$

Ελέγχω αν η (ε) περνά από $(2\alpha-b,0)$

$0 - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi-2\alpha+b}(2\alpha-b-\xi) \iff$

$-f(\xi) = -\cancel{\frac{f(\xi)}{2\alpha-b-\xi}(2\alpha-b-\xi)} \iff -f(\xi) = -f(\xi)$

Που ισχύει

$$\cancel{-f(\xi) = -\frac{f(\xi)}{2\alpha-b-\xi}(2\alpha-b-\xi) \iff -f(\xi) = -f(\xi)}$$

που ισχύει

A136

Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(x)\neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ Δείξτε ότι αν $g(a)-g(\beta)=\ell n\frac{f(a)}{f(b)}$ τότε υπάρχει ξ στο (α,β) : $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=g'(\xi)$

Λύση Θεωρώ $h(x)=\ln|f(x)|-g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ $\quad f(x)\neq 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

και η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών, παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$h(\alpha)=\ln|f(\alpha)|-g(\alpha) \qquad h(\beta)=\ln|f(\beta)|-g(\beta)$$

Επί ισχύει αν $h(\alpha)=h(\beta)$

και $\ln|f(\alpha)|-g(\alpha)=\ln|f(\beta)|-g(b) \iff$

$\ln|f(\alpha)|-\ln|f(\beta)|=g(\alpha)-g(\beta) \iff$

$\ln\left|\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right|=g(\alpha)-g(\beta)$ (1)

$$\boxed{\ln\alpha-\ln\beta=\ln\frac{\alpha}{\beta}}$$

Όμως: η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

άρα διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ άρα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ ομόσημοι άρα $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}>0$

άρα $\left|\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right|=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}>0$

Επομένως $\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=g(\alpha)-g(\beta)$ που ισχύει από υπόθεση.

άρα $h(\alpha)=h(\beta)$ από Θ. Rolle

$\exists\ \xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $h'(\xi)=0$

$h'(x)=(\ln|f(x)|-g(x))'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)-g'(x) \Big\} \Rightarrow$

$\frac{1}{f(\xi)}f'(\xi)=g'(\xi)$.

για $x=\xi$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=g'(x)$ και

$\left\{ \begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ (\ln f(x))'=\frac{1}{f}f' \end{array} \right.$

$(\ln|f(x)|)'=g'(x)$

$(\ln|f(x)|-g(x))'=0$ $f(x)\neq 0$

A137

Έστω f,g συνεχείς στο $[0,1]$, παραγωγίσιμες στο $(0,1)$, $f(x)g(x)\neq 0\ \forall x\in(0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$

Θεωρώ $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in[0,1]$

$f(x)\cdot g(x)\neq 0$ $\forall x\in[0,1]$

Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

για $\xi=x$

$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}=0$ $\cdot f(x)g(x)\neq 0 \iff$

$g(x)f'(x)+f(x)g'(x)=0$

$(f(x)\cdot g(x))'=0$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παρ/μων συναρτήσεων

$h(0) = f(0)\cdot g(0) = 0$

$h(1) = f(1)\cdot g(1) = 0$

$h(0)=h(1)$ άρα από Θ. Rolle

$\exists\ \xi \in (0,1)$ τ.ω. $h'(\xi)=0$

$$h'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0 \xrightarrow{:f(\xi)g(\xi)\neq 0}$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$$

42. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f'(x)\neq 0, \forall x\in(\alpha,\beta)$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (α,β)

$$\frac{f'(\xi)}{f(\alpha)-f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\beta)-g(\xi)}=1$$

για $\xi = x$

$$\frac{f'(x)}{f(\alpha)-f(x)}+\frac{g'(x)}{g(\beta)-g(x)}=1 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow f'(x)(g(\beta)-g(x))+g'(x)(f(\alpha)-f(x))=(f(\alpha)-f(x))\cdot(g(\beta)-g(x))$$

$-(f(\alpha)-f(x))'$ $\quad -(g(\beta)-g(x))'$

$$-(f(\alpha)-f(x))'(g(\beta)-g(x))-(g(\beta)-g(x))'(f(\alpha)-f(x))=(f(\alpha)-f(x))(g(\beta)-g(x))$$

$$-\Big[(f(\alpha)-f(x))(g(\beta)-g(x))\Big]'=(f(\alpha)-f(x))(g(\beta)-g(x))$$

οπότε έστω $b(x)$.

$-b'(x)=b(x) \Leftrightarrow$

$b'(x)+b(x)=0$ ψάχνουμε να

$(?)b'(x)+(?)'b(x)=0$ γινόμενο

$((?)b(x))'$

$(?)=e^x$, $\quad b'(x)+b(x)=0$

$\xLeftrightarrow{e^x} e^x b'(x)+(e^x)'b(x)=0$

$(e^x b(x))'$

Θεωρώ $h(x)=e^x\underbrace{(f(\alpha)-f(x))(g(\beta)-g(x))}_{b(x)}$

$x\in[\alpha,\beta]$

h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών

h παρ/μη στο (α,β) ως πράξεις παρ/μων

$h(\alpha)=e^\alpha(f(\alpha)-f(\alpha))(g(\beta)-g(\alpha))=0$

$h(\beta)=e^\beta(f(\alpha)-f(\beta))(g(\beta)-g(\beta))=0$

$h(\alpha)=h(\beta)$ άρα από Θ Rolle $\exists\ \xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω.

$h'(\xi)=0$

$$h'(x)=\Big[e^x(\quad)\Big]'=(e^x)'[\quad]+e^x[\quad]'=$$

$$e^x\Big[(f(\alpha)-f(x))(g(\beta)-g(x))\Big]+e^x\Big(-f'(x)(g(\beta)-g(x))-g'(x)(f(\alpha)-f(x))\Big)$$

και αφού $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$$e^\xi(f(\alpha)-f(\xi))(g(\beta)-g(\xi))+e^\xi\Big(-f'(\xi)(g(\beta)-g(\xi))-g'(\xi)(f(\alpha)-f(\xi))\Big)=0$$

$$\xLeftrightarrow{:e^\xi\neq 0} (f(\alpha)-f(\xi))(g(\beta)-g(\xi))=f'(\xi)(g(\beta)-g(\xi))+g'(\xi)(f(\alpha)-f(\xi)).$$

Άσκηση φυλλαδίου 3/5.

9. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της εξίσωσης $f(\chi)=0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $2f(\chi)+f'(\chi)=0$.

Έστω ρ_1, ρ_2 $\rho_1<\rho_2$ και $[\rho_1,\rho_2] \subseteq [\alpha,\beta]$

$f(\rho_1)=0=f(\rho_2)$

Θεωρώ $g(x) = e^{2x}f(x),\ x\in[\rho_1,\rho_2]$

η g συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως γινόμενο συνεχών, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως γινόμενο παρ/μων

$g(\rho_1) = e^{2\rho_1}f(\rho_1) = 0$

$g(\rho_2) = e^{2\rho_2}f(\rho_2) = 0.$

$2f(x)+f'(x)=0$

$f'(x)+2f(x)=0 \quad \cdot e^{2x}$

$e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)=0$ {ξέρω από παραγώγους

$e^{2x}f'(x)+(e^{2x})'f(x)=0$ που θα είναι κανόνα γινομένου)

$(e^{2x}f(x))'=0$

Άρα από Θ. Rolle $\exists\ \xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq[\alpha,\beta]$

ώστε $g'(\xi)=0$

$g'(x) = (e^{2x}f(x))' = e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)$ } ⇒

$e^{2\xi}f'(\xi)+2e^{2\xi}f(\xi)=0 \overset{:e^{2\xi}}{\Rightarrow} f'(\xi)+2f(\xi)=0$

Α/13/6

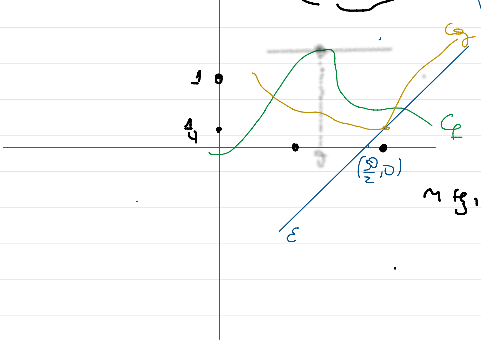
13. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο ℝ και ικανοποιούν τις σχέσεις $f(\chi)=\chi^2\cdot g(\chi)$, $g(1)=1$ $g(2)=1/4$, $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(\theta, f(\theta))$ να είναι παράλληλη στον χ'χ και η εφαπτόμενη της g στο σημείο $(\theta,g(\theta))$ να διέρχεται από το σημείο $(\frac{3\theta}{2},0)$.

νδο $\exists\ \theta\in(1,2)$

$f'(\theta)=0$ αφού $(\varepsilon)//xx'$ ($\lambda_{xx'}=0$)

η g συνεχής στο ℝ (αφού παρ/μη) αφού $g(x)\neq 0$ θα διατηρεί πρόσημο και αφού $g(1)=1>0$ $g(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.



Έστω $(\varepsilon): y-g(\theta)=g'(\theta)(x-g(\theta))$

η εξίσωση της εφαπτ. της C_g στο $(\theta,g(\theta))$

Περνά από $(\frac{3\theta}{2},0)$

$0-g(\theta)=g'(\theta)(\frac{3\theta}{2}-g(\theta))$

$$\boxed{g'(\theta)(\frac{3\theta}{2}-g(\theta))+g(\theta)=0 \quad (1)}$$

Άρα για την g πρέπει να δείξω:

ως $g(1)=1$, $g(2)=\frac{1}{4}$

νδο $\exists\ \theta\in(1,2)$ ώστε να ισχύει (1).

Το Θ.Μ.Τ

Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$
παραγωγίσιμη σε διάστημα (α,β)
Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ο σκοπός μας με αυτή εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα ξ є (α, β) τα για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0,4]$ ii) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$, $[-3,2]$

Έστω το ii) η $f(x) = 3\eta\mu 2x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Είναι παρ/μη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ ως τριγ/κή.

Άρα από ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$

ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$ (1)

$f(\frac{\pi}{2}) = \ldots = 0$
$f(0) = 0$

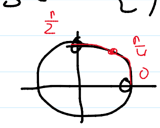
$f'(x) = (3\eta\mu 2x)' \overset{(\eta\mu f)'}{=} 3\sigma\upsilon\nu 2x\,(2x)' = 6 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$. (2)

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 6 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\xi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\xi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\xi = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 2\xi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$

$\xi = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\xi = \frac{\pi}{4}$



iii) $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$ στο $[-3,2]$.

• συνέχεια : η f συνεχής στο $(-3,-1)$ ως πολ/κή
η f συνεχής στο $(-1,2)$ —||—

εξετάζω τη συνέχεια στο $x = -1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (2x+2) = 0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - x) = 0$ $f(-1) = 0$

Επομ. η f συνεχής στο $x_0 = -1$

Άρα f συνεχής σε όλο το $[3,2]$.

• Παράγωγος
η f παραγωγίσιμη στο $(-3,-1)$ ως πολ/κή

◦ Παράγωγος

η f παραγωγίσιμη στο $(-3,-1)$ ως πολ/κή

όμοια στο $(-1,2)$

Εξετάζω την παραγωγισιμότητα στο $x_0=-1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x+2-0}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3-x}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x(x^2-1)}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1^+}x(x-1)=2.$$

Επειδή $f'(-1)=2$ άρα η f παρ/μη στο $(-3,2)$

και ισχύει το ΘΜΤ.

άρα $\exists\, \xi\in(-3,2)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{6+4}{5}$$

$$\boxed{f'(\xi)=2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\le -1\\ 3x^2-1, & x>-1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=2, & x\le -1 \text{ ισχύει}\\ 3\xi^2-1=2, & x>-1\end{cases}$$

$$3\xi^2=1+2 \Leftrightarrow 3\xi^2=3 \Leftrightarrow \xi^2=1$$

άρα $\xi=1$. άρα $\xi\in(-3,-1]$ ή $\xi=1$

Αποδείξεις ανισώσεων

◦ Διπλών ανισώσεων (μονές ή διπλές) προς απόδειξη.

Η διαδικασία απαιτεί να κάνουμε πράξεις και να φτάσουμε σε αυτή που ισχύει.

→ Αρχικά προσπαθούμε να "δημιουργήσουμε" το λόγο μεταβολής $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ μέσα στην ανίσωση (αν είναι διπλή στο κέντρο, μονή όπου υπάρχει)

→ κατόπιν εφαρμόζουμε την συνάρτηση παρατηρώντας τον λόγο μεταβολής.

→ κάποιον επιλέγουμε την συνάρτηση παρατηρώντας τον λόγο μεταβολής.

→ Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για αυτή στο διάστημα που ορίζεται στον λόγο μεταβολής

→ αντικαθιστούμε στην δοθείσα το $f'(\xi)$ με το λόγο μεταβολής, κάνουμε πράξεις και φτάνουμε σε αυτή που ισχύει

11. Έστω f παραγωγίσιμη στο R, $m \le f'(x) \le M$ $\forall x \in R$. Δείξτε ότι υπάρχει K :

$|f(x)-f(y)| \le K|x-y|$ $\forall x,y \in R$.

Είναι

$$|f(x)-f(y)| \le K|x-y| \overset{|x-y|>0}{\iff}$$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le K \iff \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le K. \quad (1)$$

{βρίσκουμε το λόγο μεταβολής. Τα άκρα είναι τα y, x αντίστοιχα}

Θεωρώ την f στο $[y,x]$, $y<x$.
συνεχής (ως συνεχής στο R)
και παρ/μη στο (y,x) (ως παρ/μη στο R)

από ΘΜΤ $\exists \xi \in (y,x)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$$(1) \iff |f'(\xi)| \le K \iff -K \le f'(\xi) \le K$$

αρκεί λοιπόν $m=-K$, $M=K$
η οποία ισχύει. από υπόθεση.

44. Να δειχθεί η ανισότητα: $(\beta-\alpha)\sigma\varphi\beta < \ell n\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} < (\beta-\alpha)\sigma\varphi\alpha$ με $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ (1)

$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Είναι: $(1) \iff (\beta-\alpha)\cdot\sigma\varphi\beta < \ln(\eta\mu\beta) - \ln(\eta\mu\alpha) < (\beta-\alpha)\sigma\varphi\alpha$

$$\overset{\beta-\alpha>0}{\iff} \sigma\varphi\beta < \frac{\ln(\eta\mu\beta)-\ln(\eta\mu\alpha)}{\beta-\alpha} < \sigma\varphi\alpha \quad (2)$$

{βρίσκω λόγο μεταβολής όπου $f(x)=\ln(\eta\mu x)$ στο $[\alpha,\beta]$}

η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
η f παραγωγίσιμη στο (α,β) —"— παρ/μων —"—

από ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$$f'(x) = \left(\ln(\eta\mu x)\right)' \overset{(\ln t)'}{=} \frac{1}{\eta\mu x}\cdot(\eta\mu x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\varphi x.$$

άρα

$$\sigma\varphi\xi = \frac{\ln(\eta\mu\beta)-\ln(\eta\mu\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (3)$$

αρκεί σφίγγω