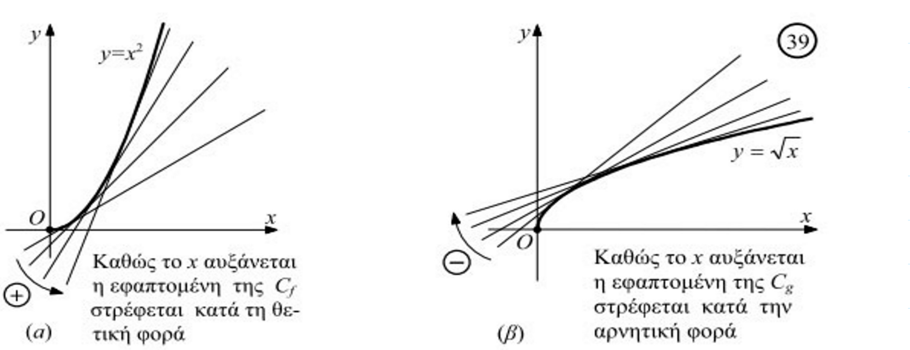
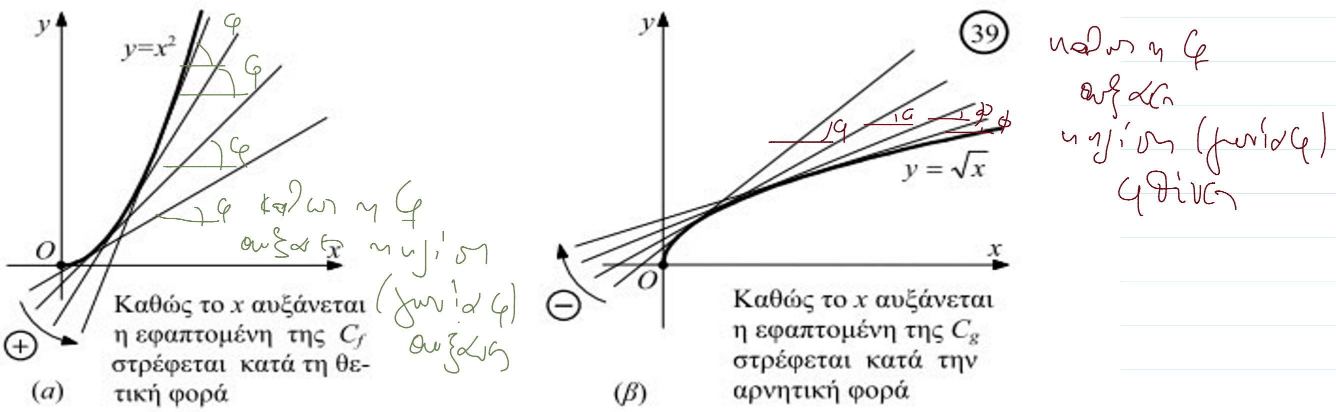
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πέμπτη, 4 Μαρτίου 2021 9:58 πμ



Αν υποθέσουμε ότι η εφαπτομένη της C_f
$(\varepsilon): \ y=\lambda x+\beta$
Τότε στο σχήμα αν δούμε η (ε) κάτω C_f
θα ισχύει $f(x) \geq \lambda x+\beta$

Αν υποθέσουμε ότι η εφαπτομένη της C_f
$(\varepsilon): \ y=\lambda x+\beta$
Τότε στο σχήμα αν δούμε η (ε) κάτω C_f
θα ισχύει $f(x) \leq \lambda x+\beta$



θ όσον η γωνία φ αυξάνει, η εφφ αυξάνει.
Την εφφ την μετρά η f' $\boxed{f'(x)=εφφ}$
Δηλαδή $f'\uparrow$ οπότε το εργαλείο που θα μετρά την μονοτονία της f'
θα είναι η f'' γιατί ο λόγος μεταβολής
$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$
που είναι το "εργαλείο" μονοτονίας της f'
στην φιλική του μορφή αφορά την f''

θ όσον η γωνία φ αυξάνει, η εφφ φθίνει.
Την εφφ την μετρά η f' $\boxed{f'(x)=εφφ}$
Δηλαδή $f'\downarrow$ οπότε το εργαλείο που θα μετρά την μονοτονία της f'
θα είναι η f'' γιατί ο λόγος μεταβολής
$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$
που είναι το "εργαλείο" μονοτονίας της f'
στην φιλική του μορφή αφορά την f''

ΟΡΙΣΜΟΣ

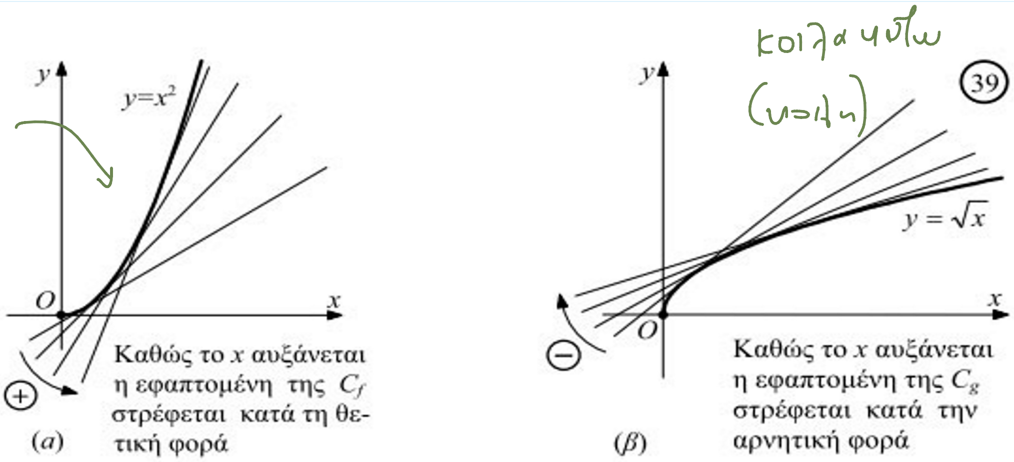
Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

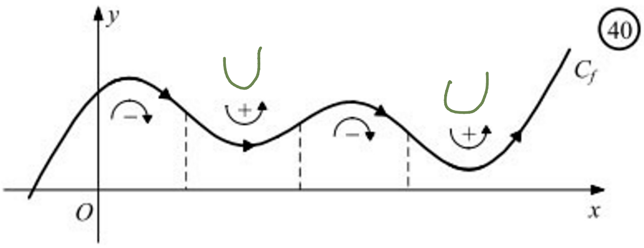
● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

κοίλα άνω (κυρτή)

κοίλα κάτω (κοίλη)



κυρτός



ΘΕΩΡΗΜΑ

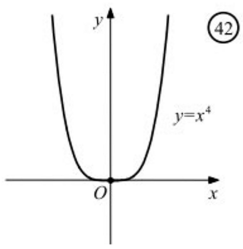
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

● Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

● Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο **R**, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο **R**. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο **R**, αφού $f''(0) = 0$.



Δηλ: αν η f κυρτή δεν είναι υποχρεωτικό η f'' να είναι αυστηρά θετική

Σημεία καμπής

Σ.Κ. λέγονται τα σημεία

υποψήφια

σ.κ. ψάχνω να βρω σημεία στο A_f όπου $f''(x_0)=0$

$f(x)=x^4$

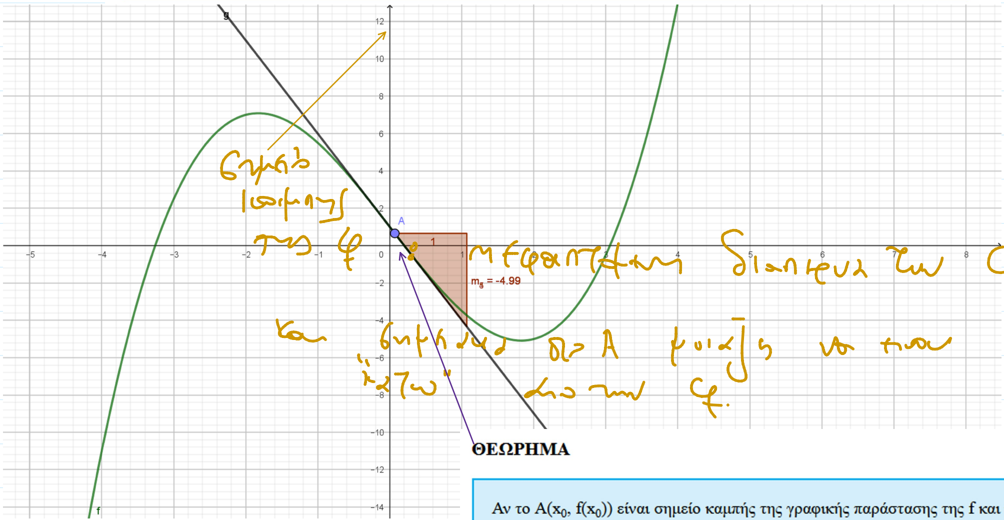
$f'(x)=4x^3 \quad f''(x)=12x^2 \geq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.



σημείο καμπής της f

η εφαπτομένη διαπερνά την C_f και βρίσκεται στο A φροντίζοντας να είναι και "πάνω" και "κάτω" από την C_f.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Δε είναι υποχρεωτικός ο μηδενισμός της f'' για να έχω σ.κ.

Ασκήσεις σχολικού

Α/Β/ Να βρεθούν κυρτά, κοίλα, σημεία καμπής (αν υπάρχουν)

ii) $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

$A=\mathbb{R}^*$

1η παράγωγος

$$g'(x) = \frac{(3x^2-2)'\cdot x^3 - (3x^2-2)(x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{6x\cdot x^3 - 3x^2(3x^2-2)}{x^6} = \frac{3\cancel{x^2}\,(2x^2-3x^2+2)}{\cancel{x^6}\ x^4} = \frac{3(-x^2+2)}{x^4} \in \mathbb{R}^*.$$

2η παράγωγος:

$$g''(x) = \frac{3(-x^2+2)'\cdot x^4 - 3(-x^2+2)\cdot(x^4)'}{x^8} = \frac{6x^5 - 12x^3(-x^2+2)}{x^8}$$

$$= \frac{6x^5+12x^5-24x^3}{x^8} = \frac{6x^3\left(-x^2+2x^2-4\right)}{x^8} = \frac{6\left(3x^2-4\right)}{x^5}$$

① Ψάχνοντας για πρόσημο f'' θα προσέξουμε διότι τώρα να συμπεριλάβουμε ανάμεσα σ' αυτό και το πρόσημο του παρονομαστή

Ρίζες: $g''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$3x^2-4$	+	0	−	||	−	0	+
x^3	−		−	||	+		+
g''	−	0	+	||	−	0	+
g	∩		∪	||	∩		∪
		Σκ				Σκ	

Η g:

κοίλη στα $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

κυρτή στα $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

• η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ✓

• ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, → Έχω ορισμένη στα $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής. ✓

σημεία καμπής στις θέσεις $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (αφού είναι ορισμένη σ' αυτά)

Τιμές σημείων καμπής

ii) $g(x) = \frac{3x^2-2}{x^3}$.

$$g\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-2}{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3} = \frac{\frac{\cancel{3}\cdot 8\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\,\cancel{9}}-2}{-\frac{8\cdot 3\sqrt{3}}{27}} = -\frac{6}{\frac{8\sqrt{3}}{9}} = -\frac{9\cdot 6}{8\sqrt{3}} = -\frac{27}{4\sqrt{3}}.$$

Όμοια $g\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{27}{4\sqrt{3}}$.

A/2 Όμοια

iii) $h(x) = \begin{cases} -3x^2+1 & , x<0 \\ -x^3+3x^2+1 & , x\geq 0 \end{cases}$.

$A_h = \mathbb{R}$.

Η παράγωγος

• $x<0$ $h'(x) = -6x$

• $x>0$ $h'(x) = -3x^2+6x$

• για $x=0$ $h(0) = 1$ (2ος κλάδος)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} = -3\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = -3\lim_{x\to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=-3\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=-3\lim_{x\to 0^-}x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(-x+3)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x(-x+3)$$

0

Άρα $g'(0)=0$

$$g'(x)=\begin{cases}-6x, & x<0\\ 0, & x=0\\ -3x^2+6x, & x>0.\end{cases}$$

2η παράγωγος

- $x<0$ $h''(x)=-6$
- $x>0$ $h''(x)=-6x+6$
- $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-6}{x}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-6x+6-0}{x}=-6\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x}=-6\cdot(-\infty)=+\infty$$

$h''(0)\notin\mathbb{R}.$

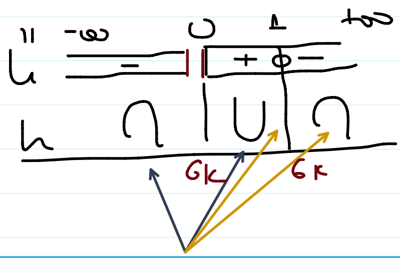
$$h''(x)=\begin{cases}-6, & x<0\\ -6x+6, & x>0\end{cases}$$

ρίζες

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-6=0 & \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \quad x<0\\ -6x+6=0 \Leftrightarrow x=1, & x>0 \text{ δεκτή.}\end{cases}$$

πρόσημο

$h''(x)$: $\begin{cases} \text{— } \| 0 \\ 0 \ \| + 1 - \end{cases}$



Άρα $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ η h κοίλη

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και

Στο $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ η h κοίλη

Στο $(0,1]$ η h κυρτή

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

είναι σημείο που η f'' δεν ορίζεται (0) ή μηδενίζεται (1)

η εφ/νη στα $x=0$, $x=1$ υπάρχει

$h'(0)=0$, $h'(1)=3$

$x=0$ ή $x=1$ θέσεις σημείων καμπής.

$h(0)=1$ $h(1)=3$.

συμπεράσματα από f'

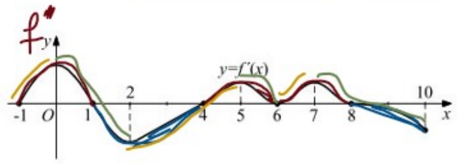
- $f'>0$ (πάνω από $x'x$) $f \uparrow$
- $f'<0$ (κάτω από $x'x$) $f \downarrow$
- $f'=0$ (τέμνει $x'x$) πιθανό ακρότατο
- $f' \notin \mathbb{R}$ (κάνει γωνία) πιθανό ακρότατο

f' αύξουσα $\to$ f κυρτή

f' φθίνουσα $\to$ f κοίλη

ακρότατο f' $\to$ πιθανό σκ.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

$f \uparrow$ αν $x \in [-1,1]\cup[4,8]$

$f \downarrow$ αν $x \in [-1,4]\cup[8,10]$

οπότε $x=1$ ↗↘ τ.μεγ $x=4$ ↘↗ τ.ελαχ $x=8$ ↗↘ τ.μεγ

$f \cup$ $x \in [-1,0]\cup[2,5]\cup[6,7]$

$f \cap$ $x \in [0,2]\cup[5,6]\cup[7,10]$

παρατηρώ ότι η f' ορίζεται σε όλο το $[-1,10]$ (δεν κάνει γωνία ή ασυνέχεια)
Έτσι στα ακρότατα της f' είναι σημεία καμπής της f, μιας και εκεί αλλάζει το πρόσημο της f'' εξαιτίας της αλλαγής μονοτονίας της f'

Έτσι $x=0,2,5,6,7$ σημεία καμπής.

Β/2 4ο θέμα 2018

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -$

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

Λύση. $A_f = \mathbb{R}$

1η παράγωγος $f'(x) = \left(2e^{x-a} - x^2\right)' = 2e^{x-a}\cdot(x-a)' - 2x = 2e^{x-a} - 2x$

2η παράγωγος $f''(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - 2 = 2\left(e^{x-a} - 1\right)$

ρίζες $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

πρόσημο

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$	

στη θέση $x = a$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής με τιμή

$f(a) = 2e^{a-a} - a^2 = 2 - a^2$

Άρα $A(a, 2-a^2)$, $a \in \mathbb{R}$

Έστω $A(x, y)$ ο τόπος του σημείου τότε

$a = x$, $2 - a^2 = y \Rightarrow 2 - x^2 = y$

Άρα το σημείο A ανήκει στην παραβολή $y = 2 - x^2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2,2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbf{R}$.

Λύση

1η παράγωγος

$f'(x) = 4x^3 - 6ax^2 + 12x + 2$

2η παράγωγος

$f''(x) = 12x^2 - 12ax + 12 = 12(x^2 - ax + 1)$

πρόσημο. ρίζες $\Delta = a^2 - 4$

a		-2		2	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $a \in (-2, 2)$

όπου $\Delta < 0$ άρα η f'' δεν έχει ρίζα και το πρόσημο διατηρεί πρόσημο του x^2 $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

$A_f = \mathbb{R}$. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1η παράγωγος $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

στη θέση $x_1 = 0$ η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο $f(0) = 2$ $(0,2)$

στη θέση $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ $(2,-2)$

2η παράγωγος

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	σκ	$\cup$	

και υπάρχει $f'(1) \in \mathbb{R}$

f κοίλη για $x \leq 1$, κυρτή για $x \geq 1$

$x = 1$ σημείο καμπής $f(1) = 0$ $(1,0)$.

Θα αποδείξω $A(1,0), B(0,2), \Gamma(2,-2)$ συνευθειακά.

$\vec{AB} = (0-1, 2-0) = (-1, 2)$

$\vec{A\Gamma} = (2-1, -2-0) = (1, -2)$

$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= (-1)(-2) - 1 \cdot 2 = 2 - 2$

Βαυκαον:

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $\Gamma(x_3, y_3)$

Συνθήκη:

$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $\Gamma(x_3,y_3)$ συνευθειακά:

βρίσκω δυο διανύσματα με αυτά τα σημεία

πχ $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

$\vec{A\Gamma}=(x_3-x_1, y_3-y_1)$

πρέπει $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=0$

$\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = \alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$

$=(-1)(-2)-1\cdot 2 = 2-2$

$=0$

A, B, Γ συνευθειακά

5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο [−2,2], για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής. → f'' διατηρεί πρόσημο

Λύση

$f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0 \ (1), \ x\in[-2,2].$

Είναι

παραγωγίζω την (1) και έχω:

$2f(x)\cdot f'(x)-2f'(x)+2x=0 \quad (2) \quad x\in[-2,2]$

παραγωγίζω την (2)

$\left(2f(x)\cdot f'(x)\right)'-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow$

$2f'(x)\cdot f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0$

$\boxed{2\left(f'(x)\right)^2+2f''(x)\left(f(x)-1\right)+2=0}$ (3)

Έστω ότι f έχει σημείο καμπής στο x_0

τότε $f''(x_0)=0$

η (3) για $x=x_0$ $\quad 2f'(x_0)^2+2f''(x_0)\cdot(f(x_0)-1)+2=0$

$\Leftrightarrow 2f'(x_0)^2+2=0$ Άτοπο

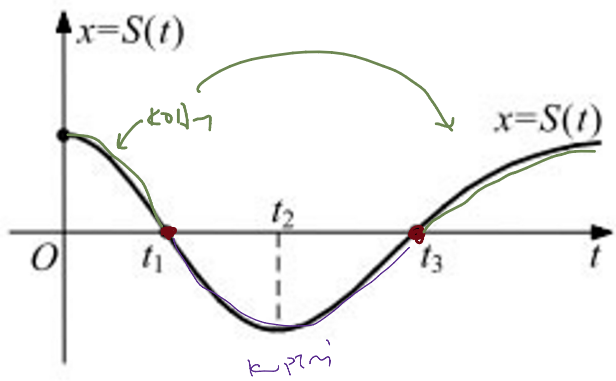
Επομένως η f δεν έχει σ. καμπής

A/S

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως x = S(t) ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii) Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.



Παρατηρούμε ότι η θέση $x = S(t)$ αλλάζει πρόσημο όταν τέμνει τον $x'x$

i) Το κινητό κινείται δεξιά $S(t)>0$
αν $t \in (0,t_1) \cup (t_3,+\infty)$
(άνω του xx')

κινείται αριστερά $S(t)<0$
αν $t \in (t_1,t_3)$
(κάτω του xx')

ii) Από φυσική

S' = ταχύτητα
S'' = επιτάχυνση. Ξέρω το πρόσημο της

2ος) ... ότι προκύπτει από τα κυρτά-κοίλα της S

οπότε
$S''(t)<0$ άρα $S' \downarrow$ όταν $t \in (0,t_1) \cup (t_3,+\infty)$

$S''(t)>0$ άρα $S' \uparrow$, όταν $t \in (t_1,t_3)$

Άσκηση

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$ (1), $f(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x-1$.

α) Υπολογίστε $f'(1)$ και $f(1)$

β) Θεωρούμε $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

i) να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα
ii) να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο $B(1, g(1))$

γ) ν.δ.ο. $e^2 f(x) \geq e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) αν $\alpha < \beta < \gamma$ διαδοχ. όροι αριθμητικής προόδου ν.δ.ο.
$$f(\alpha) \cdot f(\gamma) > f^2(\beta)$$

Λύση

α) Αφού $(\varepsilon)\ y = \underbrace{2}_{\text{κλίση της } C_f \text{ στο } x_0=1}x - 1$ εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$

$\boxed{f'(1) = 2}$ και αφού $A(1, f(1))$ ανήκει στη C_f και (ε)

$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 1}$.

β) $g(x) = \ln f(x)$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

i) $g'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ και $g''(x) = \dfrac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$

$$= \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \text{ λόγω } (1)$$

$g''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και η g κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii) Έστω (η): $y - g(1) = g'(1)(x-1)$ η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $(1, g(1))$

κλίση $g'(1) = \dfrac{1}{f(1)} \cdot f'(1) = 2$

$g(1) = \ln f(1) = 0$

Έτσι (η): $y - 0 = 2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x - 2}$ (η)

γ) ν.δ.ο. $e^2 f(x) \geq e^{2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

αφού η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και (η) η εφαπτομένη της στο $x_0 = 1$ τότε αυτή είναι κάτω από την C_g

ανισώσεις με βάση την κυρτότητα.

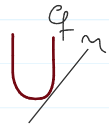
• αν μια συνάρτηση είναι κυρτή

και (ε) η εφαπτομένη της στο $x_0=1$
τότε αυτή είναι κάτω από την C_g

$$g(x) \geq 2x-2 \iff$$
$$\ln f(x) \geq 2x-2$$
(το γράφω σε μορφή λογαρίθμου)
$$\iff \ln f(x) \geq \ln e^{2x-2} \overset{\ln x \uparrow}{\iff}$$
$$f(x) \geq e^{2x-2} \iff$$
$$f(x) \geq e^{2x}\cdot e^{-2} \iff \cdot e^{2}$$
$$e^{2} f(x) \geq e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

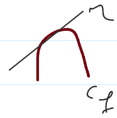
αριθμός $= \ln e^{\text{αριθμός}}$
αριθμός $= e^{\ln \text{αριθμός}}$
αριθμός $= \log 10^{\text{αριθμός}}$
αριθμός $= 10^{\log \text{αριθμός}}$

• αν μια συνάρτηση είναι κυρτή



τότε οι εφαπτόμενες είναι κάτω από αυτή ($C_f > \varepsilon$)

• αν μια συνάρτηση είναι κοίλη



τότε οι εφαπτόμενες είναι πάνω από αυτή ($C_f < \varepsilon$)

Α Λυκείου

• αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $2\beta = \alpha+\gamma$

• αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$.

δ) $\alpha<\beta<\gamma$ διαδ. όροι αριθ. προόδου τότε $2\beta = \alpha+\gamma$

νδο $f(\alpha)\cdot f(\gamma) > f^2(\beta)$

{δεν έχω μηδενικά x, μπορώ να κάνω πράξεις και να γράψω σε κάτι που ισχύει}

Λόγω $\ln x \uparrow$ γνησίως λογαριθμίζοντας έχουμε:

$$\ln(f(\alpha)\cdot f(\gamma)) > \ln f^2(\beta) \iff$$
$$\ln f(\alpha) + \ln f(\gamma) > 2\ln f(\beta) \iff$$
$$g(\alpha) + g(\gamma) > 2g(\beta) \iff g(\gamma)-g(\beta) > g(\beta)-g(\alpha).$$
$$\iff \frac{g(\gamma)-g(\beta)}{\gamma-\beta} > \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (1)$$

διαιρώ με $\gamma-\beta = \beta-\alpha$

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$

$2\beta = \alpha+\gamma \iff \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$
άρα $\beta-\alpha = \gamma-\beta > 0$

από ΘΜΤ για g στα $[\beta,\gamma]$ και $[\alpha,\beta]$

$\exists \xi_1 \in (\alpha,\beta)$ $\exists \xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τω $g'(\xi_1) = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$g'(\xi_2) = \frac{g(\gamma)-g(\beta)}{\gamma-\beta}$ άρα (1) $\iff g'(\xi_2) > g'(\xi_1) \iff \xi_2 > \xi_1$ που ισχύει
γνησίως $g'\uparrow$

$\alpha \quad \xi_1 \quad \beta \quad \xi_2 \quad \gamma$

Ένα θέμα εξετάσεων

Έστω $f(x) = \frac{x}{2}\ln^2 x + x$, $x>0$

α) νδο η f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και να εξετασθεί ως προς κυρτότητα β) Να βρεθεί θετικός ακέραιος α ώστε στο $(\alpha, \alpha+1)$ η $f(x^4+2x)=f(4)$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

γ) Λύστε στο $(0,+\infty)$ την $x\ln^2 x < 2-2x$

δ) αποδείξτε ότι $f\left(\frac{x+1}{2}\right) \leq \frac{f(x)+1}{2}$ $\forall x \geq \frac{1}{e}$

Λύση

$f(x) = \frac{x}{2}\ln^2 x + x$, $x>0$

$f'(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{x}{2}\, 2\ln x\,(\ln x)' + 1 = \frac{1}{2}\ln^2 x + x\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1.$

Προφανώς θέτω $w = \ln x$ όποτε $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1 = \frac{1}{2}w^2 + w + 1$

$\Delta = 1 - 4\cdot\frac{1}{2} = -1 < 0$

Άρα $\frac{1}{2}w^2 + w + 1 > 0$ $\forall w \in \mathbb{R}$

Άρα $f'(x) > 0$ $\forall x > 0$

Άρα $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

$f''(x) = \frac{1}{2}\, 2\ln x \cdot (\ln x)' + \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1}{x}$

Προφανώς $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ ή $\frac{1}{e}$

	0		$1/e$		$+\infty$
$\ln x+1$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$+$	
f		$\cap$	σ.κ.	$\cup$	

Επομ. f κοίλη στο $(0,\frac{1}{e}]$ και κυρτή στο $(\frac{1}{e},+\infty)$

β) $f(x^4+2x) = f(4)$ (1) στο $(\alpha, \alpha+1)$. $\alpha \in \mathbb{N}^*$

η $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα 1-1 όποτε (1) $\Leftrightarrow x^4+2x=4 \Leftrightarrow$
$x^4+2x-4 = 0$.

Έστω $g(x) = x^4+2x-4$, $x>0$

Δοκιμές ξεκινώντας από $\alpha=1$
$\alpha+1=2$

$g(1) = -1$ $\quad g(2) = 16\cdot4-4 = 8$

Παρατηρώ $g(1)\cdot g(2) < 0$
και από Θ. Bolzano για τη συνάρτηση g
στο $(1,2)$ $\exists\, \xi \in (1,2)$ ώστε
$g(\xi) = 0$

Άρα $\alpha = 1$.

γ) στο $(0,+\infty)$ να λυθεί : $x\ln^2 x < 2-2x$. (2)

$f(x) = \frac{x}{2}\ln^2 x + x \quad , x>0$

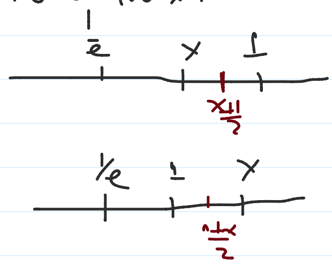
$$H\ (2) \Leftrightarrow x\ln^2 x < 2(1-x) \overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2}\ln^2 x < 1-x \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2}\ln^2 x + x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x<1.$$

$f \uparrow$ προφανώς $f(1)=1$

δ) Ισο $f\left(\frac{x+1}{2}\right) \leq \frac{f(x)+1}{2}$ (3) , $x \geq \frac{1}{e}$.

Θέση του x:



$$\text{η } (3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+1}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(1)}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \leq f(x)+f(1) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1) \leq f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (4)$$

Έστω $x=1$ τότε ισχύει → ισότητα

Έστω $x>1$ τότε (4) $: \frac{x-1}{2}$

$$\frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x+1-2}{2} = \frac{x-1}{2} > 0$$

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{2x-x-1}{2} = \frac{x-1}{2} > 0$$

$$\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x-1}{2}} \leq \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα $\left[1, \frac{1+x}{2}\right]$ $\left[\frac{1+x}{2}, x\right]$ για την f

$\exists\ \xi_1 \in \left(1, \frac{1+x}{2}\right)$ $\exists\ \xi_2 \in \left(\frac{1+x}{2}, x\right)$

ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x-1}{2}}$

$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \overset{f'\uparrow}{\Leftarrow}$$

$\xi_1 < \xi_2$ που ισχύει.

• αν $\frac{1}{e} \leq x < 1$ εφαρμόζετε την ίδια ταυτική.

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως πρός μονοτονία και ακρότατα

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\lambda x e^{-\frac{1}{x}} + \chi = 1$

Δ3. Να μελετήσετε την f ώς πρός την κυρτότητα και να αποδείξετε

ότι $f(\chi) \geq -e\chi + e$ γιά κάθε $\chi > 0$

Δ4. Να δείξετε ότι $(1-\chi)\, e^{\frac{1}{x}} \leq (\chi^2 - \chi)e^{\chi}$ γιά κάθε $\chi \geq 1$

Λύση

Δ1. $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)' \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(\cancel{1} + \frac{1}{x} - \cancel{1}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Επομ. $f \nearrow$ $\forall x < 0$
$f \searrow$ $\forall x > 0$
χωρίς ακρότατα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-e^{\frac{1}{x}}$	$-$	‖	$-$
x^3	$-$	‖	$+$
f'	$+$	‖	$-$
f	$\nearrow$	‖	$\searrow$

Δ2. πλήθος ριζών της $\lambda x e^{-\frac{1}{x}} + \chi = 1$

θυμίζω $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}$

Παρατηρώ (ΠΑΝΤΑ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΑΝΟΙΚΤΑ ΓΙΑ SHORTCUT (συνθέσεις))

$$\lambda x e^{-\frac{1}{x}} + x = 1 \Leftrightarrow \lambda x e^{-\frac{1}{x}} = 1 - x \Leftrightarrow \quad : x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\lambda = \frac{1-x}{x e^{-\frac{1}{x}}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1-x}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad \left(\frac{1}{a^{-\nu}} = a^{\nu}\right)$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = \lambda. \quad \text{(θα βρω το πλήθος ριζών)}$$

Θέτω $g(x) = f(x) - \lambda$, $x \neq 0$

Τότε $g'(x) = f'(x)$ (άρα):

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	‖	$-$
g	$\nearrow$	‖	$\searrow$

g ↗ | ↘

$$g((-\infty,0)) \overset{g\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to0^-} g(x)\right) = (-1-\lambda, -\lambda)$$

$$g((0,+\infty)) \overset{g\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to0^-} g(x)\right) = (-1-\lambda, +\infty)$$

Διότι.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}-\lambda\right) = (0-1)e^{0}-\lambda = -1-\lambda$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}-\lambda\right) = \lim_{u\to-\infty}\left[(u-1)e^{u}-\lambda\right] \overset{(\infty\cdot0)}{=} \lim_{u\to-\infty}\left[\frac{u-1}{e^{-u}}-\lambda\right] \overset{DLH}{=} \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{-e^{-u}}-\lambda = 0-\lambda = -\lambda$$

θέτω $u=\frac{1}{x}$, $x\to0^-$, $\frac{1}{x}\to-\infty$ άρα $u\to-\infty$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}-\lambda\right] = (+\infty-1)e^{\infty}-\lambda = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}-\lambda\right) = \lim_{u\to0^+}\left[(u-1)e^{u}-\lambda\right] = (-1)\cdot1-\lambda = -1-\lambda$$

$x\to+\infty$ άρα $\frac{1}{x}\to0$ άρα $u=\frac{1}{x}$ τότε $u\to0$

Περιπτώσεις για τα σύνολα τιμών

$g((-\infty,0)) = (-1-\lambda, -\lambda)$

$g((0,+\infty)) = (-1-\lambda, +\infty)$

Εξετάζω αν (και πότε) τα άκρα επικαλύπτονται

- αν $-1-\lambda<0 \Leftrightarrow -\lambda<1 \Leftrightarrow \lambda>-1$.
  - → αν $\lambda<0$ τότε στο $(0,+\infty)$ έχει μία ρίζα αφού $g(\xi_1)=0\in(-1-\lambda,+\infty)$ και μοναδικό το ξ_1 αφού το $g\downarrow$

  (οπότε $-1<\lambda<0$)

  $g(\xi_2)=0\in(-1-\lambda,+\infty)$ όπου ξ_2 μοναδικό αφού $g\uparrow$

- $-1-\lambda>0 \Leftrightarrow -\lambda>1 \Leftrightarrow \lambda<-1$ τότε και τα δύο σύνολα τιμών είναι ομόσημων ποσοτήτων άρα δεν περιέχουν το μηδέν σ' αυτά.

- $-1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ τότε $g((-\infty,0))=(0,1)$ και $g((0,+\infty))=(0,+\infty)$ δεν υπάρχει το μηδέν σ' αυτά

- $-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

  $g((-\infty,0))=(-1,0)$ δεν έχει ρίζα αφού $0\notin(-1,0)$

  $g((0,+\infty))=(-1,+\infty)$ ..., 1

• $-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

$g((-\infty,0)) = (-1,0)$ δεν έχει ρίζα αφού $0\notin(-1,0)$

$g((0,+\infty)) = (-1,+\infty)$ παρατηρώ

$g(\xi_3)=0\in(-1,+\infty)$ και αφού $g\uparrow$ ξ_3 μοναδικό.

• $\lambda>0$

$g((-\infty,0))$ διαστήματα αρνητικών δεν έχει ρίζα

$g((0,+\infty)) = (-1-\lambda,+\infty)$ άρα (αρνητικό)

$g(\xi_4)=0\in(-1-\lambda,+\infty)$ άρα ξ_4 μοναδικό αφού $g\uparrow$

• $\lambda<0$ τότε $-\lambda>0$ και $-1-\lambda>-1$ οπότε η ύπαρξη ρίζας είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση που $-1<-1-\lambda<0$. Τότε όμως $-1-\lambda<0 \Leftrightarrow -\lambda<1 \Leftrightarrow \lambda>-1$ όπου η περίπτωση έχει καλυφθεί πιο πάνω

Είναι $f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$, $x\neq0$. Οπότε $f''(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'x^3 - e^{\frac{1}{x}}\cdot 3x^2}{x^6} =$

$= -\dfrac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\cancel{3}} - 3x^2e^{\frac{1}{x}}}{x^6} = -\dfrac{-e^{\frac{1}{x}}\cancel{x}(1+3x)}{x^{\cancel{6}\,5}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1+3x)}{x^5}$, $x\neq0$

Πρόσημο, ρίζες $f''(x)$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow (1+3x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$e^{\frac{1}{x}}$	+	+	‖	+
$(1+3x)$	−	0 +	‖	+
x^5	−	−	‖	+
f''	+	0 −	‖	+
f	∪	∩	‖	∪

Η f κυρτή για $x\in(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(0,+\infty)$

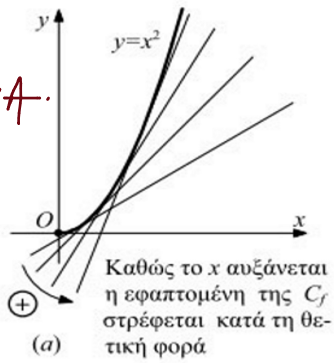
Η f κοίλη $x\in(-\frac{1}{3},0)$.

Θα δείξουμε $f(x)\geq -ex+e$.

Εξετάζουμε αν η $y=-ex+e$ (ε) είναι εφαπτομένη της C_f.

$f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$ παρατηρώ $f'(1)=-e$

SOS ΘΕΩΡΙΑ



(α) Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά

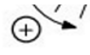
$f'(x) = -\frac{\;}{x^3}$

$f(x) = (\frac{1}{x}-1)e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f'(1) = -e$

και $f(1) = 0\cdot e = 0$

οπότε το $(1,0)$

Εξίσωση των (ε).



(α) η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά

Αν υποθέσει ότι η εφαπτομένη της C_f

(ε): $y = λx+β$

Τότε στο σχήμα ότι είναι η (ε) κάτω C_f

θα ισχύει $f(x) \geq λx+β$

Οπότε (ε): $y=-ex+e$ εφ/νη της C_f στο $(1,0)$.

Όμως το $(1,0)$ έχει τετμημένη από $(0,+\infty)$ όπου

είναι C_f κυρτή άρα θα ισχύει $f(x) \geq -ex+e$ $\forall x>0$

Δ4

{Πρέπει να βρω πως θα εκφράσω την ανίσωση με f και την συνάρτηση}

Δ4. Να δείξετε ότι (1-χ) $e^{\frac{1}{x}}$ ≤($χ^2$-χ)$e^χ$ γιά κάθε χ≥1

$f(x) = (\frac{1}{x}-1)e^{\frac{1}{x}}$

Είναι $(1-x)e^{\frac{1}{x}} \le (x^2-x)e^x \overset{:x\ge 1}{\iff}$

$\frac{1-x}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}} \le \frac{x(x-1)}{x}e^x \iff (\frac{1}{x}-1)e^{\frac{1}{x}} \le (x-1)e^x \iff$

$f(x) \le f(\frac{1}{x}) \underset{f\downarrow}{\overset{x\ge 1}{\iff}} x \ge \frac{1}{x} \iff$ $\quad \left\{ f(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{\frac{1}{x}}-1)e^{\frac{1}{\frac{1}{x}}} = (x-1)e^x \right.$

$(x\ge 1)$ $\quad x^2 \ge 1$ που ισχύει.

Δίνεται συναρτηση f συνεχής στο [0,π] γιά την οποία ισχύει ότι :

f^2(χ) +(χ-2ημχ)(χ+2ημχ) = -2χf(χ) γιά κάθε χ∈ [0,π] και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

B1. Να δείξετε ότι f(χ) = 2ημχ-χ

B2. Να μελετήσετε την f ώς πρός την μονοτονία και τα ακρότατα.

B3. Να μελετήσετε την f ώς πρός την κυρτότητα και στη συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση

B4. Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω απο την ευθεία y = x+2 στο διάστημα [0,π]

B5. Να δείξετε ότι $e^χ$+χ> 2ημχ γιά κάθε χ∈[0,π]

B6. Υπολογίστε τα όρια

i. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{f(x)}$ $\quad$ ii. $\lim_{x\to \pi} \frac{f(x)+x}{x-\pi}$ $\quad$ iii. $\lim_{x\to \pi} \frac{f(x)}{\pi + f(x)}$

B1: Είναι

$f^2(x) + (x-2ημx)(x+2ημx) = -2x f(x)$

τέλειο τετράγωνο!

$f^2(x) + x^2 - (2ημx)^2 = -2x f(x) \iff$

$f^2(x) + 2x f(x) + x^2 = (2ημx)^2 \iff$

$(f(x)+x)^2 = (2ημx)^2$ $\quad x\in[0,\pi]$

Θέτω $g(x) = f(x)+x$ οπότε $g^2(x) = 4ημ^2x$ $\quad x\in[0,\pi]$

$|g(x)| = |2ημx|$ $\quad x\in[0,\pi]$.

ρίζες $g(x)=0 \iff 2ημx=0 \iff x=0$ ή $x=\pi$. και $ημx>0$ $\forall x\in(0,\pi)$.

Επομένως λόγω ότι η f είναι συνεχής στο [0,π]
η g θα είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών στο (0,π)

με $g(x) = f(x) + x$

άρα $g(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2 > 0$

και αφού η g διατηρεί πρόσημο στο (0,π)

$g(x) > 0$ άρα $g(x) = 2ημx$ και $f(x) + x = 2ημx \Leftrightarrow f(x) = 2ημx - x$, $x \in [0,\pi]$.

B2. $f'(x) = (2ημx - x)' = 2συνx - 1$

$-1 \le συνx \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2συνx \le 2$

$-3 \le 2συνx - 1 \le 1$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$συνx = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$x \in [0,\pi]$