Ορισμός Παραγώγου

Πέμπτη, 17 Δεκεμβρίου 2020 10:16 πμ

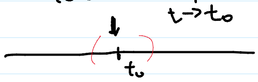
Λόγος μεταβολής μεγεθών:

Είναι εργαλείο που επιτρέπει την μελέτη της "συμπεριφοράς" ενός μεγέθους. πχ

Έστω κινητό και οι θέσεις του σε δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2

τότε ονομάζουμε μέση ταχύτητα τον λόγο $\dfrac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$

Αν σκεφτούμε ότι χρειαζόμαστε το μέτρο της ταχύτητας όχι ανάμεσα σε δύο στιγμές αλλά σε μία στιγμή (στιγμιαία t_0) τότε το $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$



Παίρνουμε μία απειροελάχιστη περιοχή γύρω από το t_0 και μελετάμε την συμπεριφορά των τιμών του λόγου

Ορισμός:

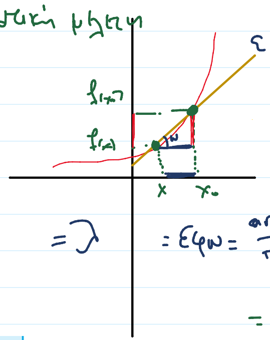
Έστω f συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f

Αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός, τότε

ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο A την ευθεία που περνά από το A και έχει κλίση $\lambda = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

μεταξύ δύο σημείων

στιγμιαία μέτρηση



κλίση της ε $= \lambda$ $= \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{απ. κ}}{\text{προσκ. κ}} = \dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$

$= \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ορισμός Παραγώγου στο x_0:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή:

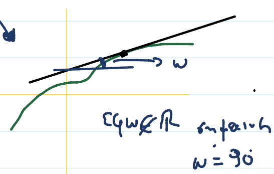
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda = \varepsilon\varphi\omega$$

Πλευρικά όρια παραγώγου:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

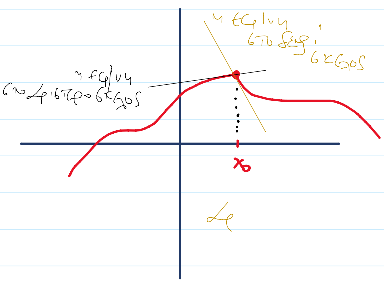
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

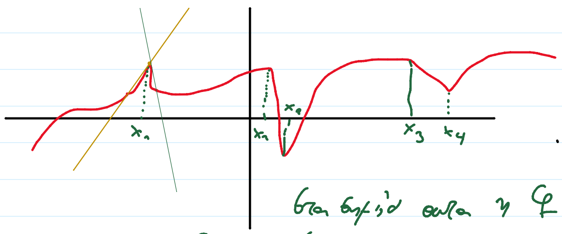


$\varepsilon\varphi\omega \notin \mathbb{R}$ κατακόρυφη

$\omega = 90$



Συμπέρασμα: όταν το διάγραμμα της f παρουσιάζει "μύτες" τότε σ' αυτά τα σημεία η f ΔΕΝ παραγωγίζεται (έχει 2 εφαπτόμενες: αδύνατο)



Στα σημεία αυτά η f δεν έχει παράγωγο

Πάντα όμως στις περιπτώσεις εξετάζετε με τον ορισμό του λόγου μεταβολής (πλευρικά) αν f στο σημείο που αλλάζει ο τύπος.

Α) Άσκ. iii/102

$f(x) = |x^2-3x|, \quad x_0 = 1$ — Εξετάστε αν υπάρχει $f'(1)$

$$|x^2-3x| = \begin{cases} x^2-3x, & x^2-3x \geq 0 \\ -(x^2-3x), & x^2-3x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^2-3x, & x \leq 0 \text{ ή } x \geq 3 \\ -x^2-3x, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

$\Delta = 9 - 4\cdot1\cdot0 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \frac{3\pm3}{2} = 0,\ 3$

	0		3	
+		−		+

Ζητώ $f'(1)$ και $1 \in (0,3)$

η $f(x) = -x^2-3x$.

Άρα $f'(1) = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$, $f(1) = -4$ (2ος)

$= \lim\limits_{x\to1} \frac{-x^2-3x+4}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to1} \frac{-(x+4)(x-1)}{x-1} = -5$

$-x^2-3x+4$, $\Delta = 9+16 = 25$, $x_{1,2} = \frac{3\pm5}{-2} = -4,\ 1$

iv) όμοια

$$\text{iv) } f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & , \ x<0 \\ x+1 & , \ x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$$

Για να βρω $f'(0)$ πρέπει να πάρω πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής αφού σε $x_0=0$ η f αλλάζει

- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$ $\qquad f(0) = 0+1 = 1$ (2ο)

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2+x+1-1}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}(x+1) = 1$

- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{x} = 1.$

Θεώρημα (SOS)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ | Έχω $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$

Ξεκινώ:

η $f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) \quad (x\neq x_0)$

Επόμ. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] =$

$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$

άρα $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει:

Δηλαδή για συνάρτηση f συνεχή δεν είναι απαραίτητο να'να παραγωγίσιμη

$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

→ γωνιακό σημείο

όπου: αν και η f συνεχής, η παράγωγος δεν ορίζεται ...

Λεπτομέρειες με την χρήση των ορίων (ΗΟΤ)

Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Μπορώ να θέσω ότι θέλω στο h

2. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι :

i) $f(1) = 2$ ii) $f'(1) = 3$

i) για $h = 0$ η σχέση γίνεται: $f(1+0) = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

ii) $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$x\to 1 \Rightarrow x-1\to 0$
θέτω $h = x-1 \Leftrightarrow h\to 0$

και $x = 1+h$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}+3h+3h^2+h^3\cancel{-2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}} =$

$\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3.$

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

Λύση

i) $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$

$x\to x_0 \Leftrightarrow x-x_0\to 0$

Αν θέσω $-h=x-x_0$

Για $-h\to 0 \Leftrightarrow h\to 0$

και $x=x_0-h$

Άρα $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$ (1)

ii) $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (2)

$x\to x_0 \Leftrightarrow x-x_0\to 0$

Θέτω $h=x-x_0$ για $h\to 0$

$x=x_0+h$

Αφαιρώ (2)-(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)-(-f'(x_0))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\cancel{f(x_0)}-f(x_0-h)+\cancel{f(x_0)}}{h}=2f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$$

Φυλλάδιο 3/1

Έστω $f'(1)=1$ και $H(x)=\begin{cases} f(1-x), x\geq 0 \\ f(1+x), x<0\end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$H(0)=f(1)$.

• για $x>0$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}\overset{(2)}{=}-1$.

$f'(1)=1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ (1)

$x\to 1 \Leftrightarrow x-1\to 0$

θέτω $-h=x-1$, $h\to 0$

και $x=1-h$

Άρα

(1) $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=1$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-1$

• για $x<0$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\overset{(4)}{=}1$

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ (3)

$x\to 1 \Leftrightarrow x-1\to 0$

θέτω $h=x-1$, $h\to 0$

$x=1+h$

(3) $\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$ (4)

Αφού τα πλευρικά όρια είναι άνισα η $H'(0)$ **ΔΕΝ** υπάρχει

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1 \quad (4) \quad \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = -1 \quad (2)$$

Φυλλάδιο

12. Αν $f(xy)=x^2 f(y)+y^2 f(x), \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

λύση

Είναι $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}$

$$= \lim_{h\to 1}\frac{x_0^2 f(h)+h^2 f(x_0)-f(x_0)}{x_0(h-1)} =$$

$$= \lim_{h\to 1}\frac{\cancel{x_0^2} f(h)}{\cancel{x_0}(h-1)} + \lim_{h\to 1}\frac{f(x_0)(h^2-1)}{x_0(h-1)}$$

Θέλω $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

$x\to x_0$ ~~$\not\Rightarrow$~~ ~~$x-x_0\to 0$~~

~~$h=x-x_0$~~

~~$x=x_0+h$~~

$\frac{x}{x_0}\to 1$. Θέτω $h=\frac{x}{x_0}$, $h\to 1$

~~$-h=x-x_0$~~

~~$x=x_0-h$~~

άρα $x=x_0h$

$$= \lim_{h\to 1}\frac{x_0 f(h)}{h-1} + \lim_{h\to 1}\frac{f(x_0)(\cancel{h-1})(h+1)}{\cancel{h-1}} =$$

$$= \lim_{h\to 1}\frac{x_0\cdot f(h)}{h-1} + \lim_{h\to 1} f(x_0)(h+1) =$$

το $f(x_0)$ είναι αριθμός άρα μπορώ να το βγάλω έξω από το όριο...

Αλλά $f'(1)=2$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

στην $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$ $\forall x,y>0$

για $x=y=1$

$\cancel{f(1)}=\cancel{f(1)}+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

άρα $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ (1)

$$x_0\cdot\lim_{h\to 1}\frac{f(h)}{h-1} + 2f(x_0) \overset{(1)}{=}$$

$2x_0+2f(x_0)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα $f'(x)=2x+2f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Σχολικό 3

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = xf(x) είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Είναι $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)$

και αφού η f συνεχής στο $x_0=0$ $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ Άρα $g'(0)=f(0)\in\mathbb{R}$.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε ισχύει :
$ημ^2x - x^4 \le xf(x) \le ημ^2x + x^4$ (1)
να αποδείξετε ότι
i) f(0) = 0 ii) f ′(0) = 1

i) για $x=0$ η (1) δίνει:

i) για $x=0$ η (1) δίνει:

$$0^2-0^4 \le 0\cdot f(0) \le 0^2+0^4 \quad ???$$

(δε μπορώ να έχω το $f(0)$!)

Αφού η f συνεχής στο $x_0=0$, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

διαιρώ με x.

• $x>0$ (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{ημ^2x-x^4}{x} \le f(x) \le \dfrac{ημ^2x+x^4}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{ημ^2x-x^4}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+} ημx - \lim_{x\to 0^+} x^3 = 1\cdot 0-0=0$$

όμοια $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημ^2x+x^4}{x} = \dots = 1\cdot 0+0=0$

Από κρ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

• $x<0$ (1) $\overset{\text{διαιρώ με } x}{\Leftrightarrow}$ $\dfrac{ημ^2x-x^4}{x} \ge f(x) \ge \dfrac{ημ^2x+x^4}{x} \Rightarrow \dfrac{ημ^2x+x^4}{x} \le f(x) \le \dfrac{ημ^2x-x^4}{x}$

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ τελικά Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

ii) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Έχουμε $ημ^2x-x^4 \le xf(x) \le ημ^2x+x^4$, $x\in\mathbb{R}$.

διαιρώ με $x^2>0$

$$\frac{ημ^2x}{x^2}-x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{ημ^2x}{x^2}+x^2$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ^2x}{x^2}-x^2\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}\right)^2-\left(\lim\limits_{x\to 0} x\right)^2 = 1^2-0=1$

όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ^2x}{x^2}+x^2\right) = \dots = 1^2+0=1$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Άρα $f'(0)=1$.