Η προσέγγιση των προβλημάτων

- Πρώτα ορίζουμε την συνάρτηση προς μελέτη
- καθορισμός της μεταβλητής του ρυθμού

•• αν είναι απλό το x, τότε ο ρυθμός μεταβολής ταυτίζεται με την παράγωγο και η δουλειά είναι ίδια με πριν

πχ Έστω $f(x)=x^2+5$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f όταν $x=1$

$$f'(x)=2x \quad \text{και} \quad f'(1)=2\cdot 1=2.$$

•• αν όμως μεταβλητή είναι ο χρόνος τότε η συνάρτηση είναι λάθος να γράφει

$$f(x)=2x \quad (\text{μεταβλητή είναι ο χρόνος})$$

Είναι λάθος να γράφει $f(x)=2\dot{x}(t)$ (η μεταβλητή είναι ο χρόνος)

Το σωστό: $f(t)=x^2(t)+5$

Τώρα μπορώ να παραγωγίσω ως προς t

$$f(t)=x^2(t)+5 \Leftarrow f'(t)=2x(t)\cdot x'(t)$$
(σύνθετη συνάρτηση)

Καθορισμός της συνάρτησης στα φυσικά και γεωμετρικά προβλήματα.

Μερικές πληροφορίες:

ορίζουμε ο ρυθμός μεταβολής διαστήματος ορίζουμε την ταχύτητα του αντικειμένου

Συμβολισμός: αν $x(t)$ το διάστημα που "γράφει" το κινητό

$x'(t)$: ρυθμός μεταβολής δ/τος = Ταχύτητα

- ρυθμός μεταβολής ταχύτητας ενός κινητού με συνάρτηση θέσης $x(t)$

$$(x'(t))'=x''(t)$$ ρυθμός μεταβολής ταχύτητας = Επιτάχυνση

* συνάρτηση θέσης ενός κινητού συμβολίζουμε $x(t)$ όπου γνωρίζουμε την ταχύτητα πχ έστω $x'(t)=5\,km/h$ τότε

η συνάρτηση θέσης ένα ...

Εάν $x'(t) = 5\,km/h$ τότε

η συνάρτηση θέσης έχει μορφή
$x(t) = 5t$

Η έκφραση που μπορεί να έχετε παρατηρήσει σε ρυθμό μεταβολής είναι αυτή που η συνάρτηση συνοδεύεται με τη λέξη οριακό.

πχ οριακό κόστος, οριακό κέρδος,

οριακή διασπορά, οριακή ταχύτητα

η λέξη οριακό δηλώνει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους για τιμή x_0

πχ οριακό κόστος για τη $K(x)$ στο x_0

$$K'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}.$$

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec.
(Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

$\{t_0\}$

Ο τρόπος παρουσίασης των μεγεθών στην εκφώνηση ΔΕΝ είναι ο ενδεικτικός για τη λύση του

$r(t) = 4 - t^2$ $\qquad t \to sec$

$$\left.\begin{matrix} E'(t_0) \\ V'(t_0) \end{matrix}\right|_{t_0 = 1} = ;$$

Έχουμε $E(t) = 4\pi r^2(t)$

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$

Προσοχή ΔΕΝ είναι το r η μεταβλητή!
Είναι το t.

Είναι $E'(t) = \left(4\pi r^2(t)\right)' \underset{(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)}{=\!=} 4\pi\left(r^2(t)\right)' = 4\pi \cdot 2r(t) \cdot r'(t)$

άρα $E'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$

Επο. $E'(t_0) = 8\pi r(t_0) \cdot r'(t_0)$
? ?

Επο. $r(t_0) = 4 - t_0^2 = 4 - 1 = 3$

$r'(t) = (4 - t^2)' = -2t$ άρα $r'(t_0) = -2t_0 = -2 \cdot 1 = -2$

Επο. $E'(t_0) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi\ cm^2/sec$

$r'(t) = (4-t^2)' = -2t$ άρα $r'(t_0) = -2t_0 = -2\cdot 1 = -2$

Επομ. $E'(t_0) = 8\pi\cdot 3\cdot(-2) = -48\pi\ cm^2/sec$

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ επομ. $V'(t) = \frac{4}{3}\pi\left(r^3(t)\right)' \Leftrightarrow$

$V'(t) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\pi\cdot 3r^2(t)\cdot r'(t)$ για $t=t_0$

$V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0) r'(t_0) = 4\pi\cdot 3^2\cdot(-2) = -72\pi\ cm^3/sec$

2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

$V'(t) = 100\ cm^3/sec$

$r'(t_0) =$

t_0 όπου $r(t_0) = 9$ $\qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ισχύει $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$

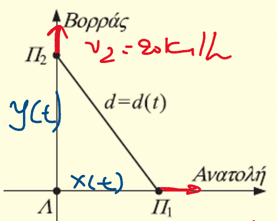
και $V'(t) = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot 3\pi r^2(t)\cdot r'(t) \Leftrightarrow$

$100 = 4\pi r^2(t)\cdot r'(t)$ για $t=t_0$

$100 = 4\pi r^2(t_0)\, r'(t_0) \Leftrightarrow 100 = 4\pi\cdot 9^2\cdot r'(t_0) \Leftrightarrow$

$r'(t_0) = \frac{\cancel{100}}{81\cdot\cancel{4}\cdot\pi} = \frac{25}{81\pi}\ cm/sec$

4. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2

$x(t),\ y(t)$

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

παράγωγος d (d') → ως προς χρόνο

i) αφού $v_1 = 15\ km/h$ $\qquad \left(v = \frac{x}{t}\right)$

$x(t) = 15t$

και $v_2 = 20\ km/h$

$y(t) = 20t$.

$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \text{ να βρω τον τύπο } d \quad \text{to do list} \\ \bullet \text{ να βάλω χρόνο } t \text{ ως παράμετρο;} \\ \bullet \text{ να παραγωγίσω ως προς } t\end{array}}$

Από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$d^2 = ΑΠ_1^2 + ΑΠ_2^2 \Leftrightarrow$$
$$d^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$(\sqrt{f})' = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f'$$

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} \cdot (x^2(t) + y^2(t))' = \frac{2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$$

$$= \frac{x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} = \frac{15t\cdot 15 + 20t\cdot 20}{\sqrt{225t^2 + 400t^2}} =$$

Έχουμε $x(t) = 15t \Leftrightarrow x'(t) = 15$
$y(t) = 20t \Leftrightarrow y'(t) = 20$

$$= \frac{225t + 400t}{\sqrt{625t^2}} = \frac{625t}{25t}$$

$25 > 0$
km/h

1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm²/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.

$E'(t) = 10$ cm²/sec

$E = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V'(t_0) \Big|_{r(t_0) = 85 \text{ cm}}$$

Είναι $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \Leftrightarrow V'(t) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot \cancel{3} r^2(t) \cdot r'(t)$

$$V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t) \Leftrightarrow V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0) \cdot r'(t_0) = 4\pi \cdot 85^2 \cdot r'(t_0). \quad (1)$$

?

υπολογίζω το $r'(t_0)$.

Ισχύει $E'(t) = 10 \Leftrightarrow (4\pi r^2(t))' = 10 \Leftrightarrow$

Ισχύει $E'(t)=10 \Leftrightarrow (4\pi r^2(t))' = 10 \Leftrightarrow$

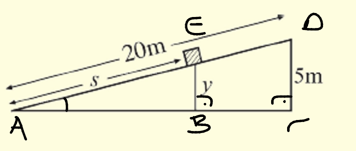
$8\pi r(t)\cdot r'(t)=10$ και για $t=t_0$

$8\pi r(t_0)\cdot r'(t_0)=10 \Leftrightarrow 8\pi\cdot 85\cdot r'(t_0)=10$

$r'(t_0)=\frac{10}{8\pi\cdot 85}$ (2)

Η (1) λόγω (2) $\Leftrightarrow$ $V'(t_0)=4\cancel{\pi}\cdot 85^{\cancel{2}}\cdot\frac{10}{8\cancel{\pi}\cdot\cancel{85}}=\frac{4\cdot 85\cdot\cancel{10}^{5}}{84}=\dots$

B **3.** Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y*.



κίνηση στη ράμπα: $S'(t)=3$ m/sec

$y'(t)=;$

Παρατηρώ τα $\triangle EBA$ και $\triangle\Delta\Gamma A$ είναι όμοια διότι: $\hat B=\hat\Gamma(=90)$, $\hat A$ κοινή.

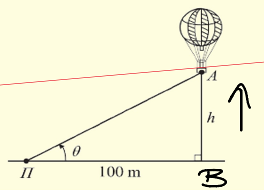
(αντίστοιχα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλ. πλευρές)

Επ. έχουν πλευρές ανάλογες. $\frac{A\Delta}{AE}=\frac{\Delta\Gamma}{EB}=\frac{A\Gamma}{AB}\Leftrightarrow$

$\frac{20}{S}=\frac{5}{y}\Leftrightarrow y=\frac{5}{20}S\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}S$ Επ.

$y(t)=\frac{1}{4}S(t)$ άρα $y'(t)=\frac{1}{4}S'(t)\Leftrightarrow y'(t)=\frac{3}{4}$ m/sec.

B **4.** Ένα αερόστατο *A* αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή *Π* με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία *θ* που σχηματίζει η *AΠ* με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.



$h'(t)=50$ m/min

h: [illegible] h' ταχύτητα

$\theta'(t)=;$ | $h(t_0)=100$, t_0

Παρατηρώ στο $\triangle AB\Pi$ $(\hat B=90)$

ότι $\varepsilon\varphi\theta=\frac{AB}{\Pi B}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{h}{100}$ (1)

Με χρόνο η σχέση γίνεται: $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{h(t)}{100}$.

Παραγωγίζοντας έχω $(\varepsilon\varphi f)'$

$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{h(t)}{100}\right)'\Leftrightarrow\boxed{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}h'(t)}$ (2)

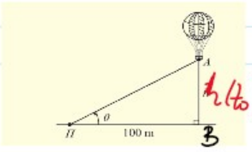
Για $t=t_0$: (2) $\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\theta'(t_0)=\frac{1}{100}h'(t_0)\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0)=\frac{50}{100}$

(2)

για $t = t_0$: $(2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\theta'(t_0) = \frac{1}{100}h'(t_0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\theta'(t_0) = \frac{50}{100}$

$\Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)$

τη στιγμή t_0:



$h(t_0) = 100$

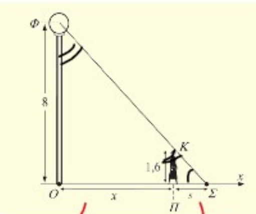
Από το τρίγωνο ΑΠΒ

$\varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{AB}{B\Pi} = \frac{100}{100} = 1$

άρα $\theta(t_0) = 45°$

Επομένως $\theta'(t_0) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 45 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ rad/sec

5. Μία γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



→ ίσκιος: εξίσωση θέσης: $S(t)$

άρα ταχύτητα ίσκιου $S'(t)$

απομάκρυνση γυναίκας:

εξίσωση θέσης $x(t)$

άρα ταχύτητα $x'(t) = 0,8$ m

Παρατηρώ $\Phi\hat{O}\Sigma$ όμοιο ΚΠΣ $\left(\begin{array}{l}\hat{\Sigma} \text{ κοινή} \\ \text{και } \Pi = O \ (=90°)\end{array}\right)$

Επομένως έχουν πλευρές ανάλογες $\frac{\Phi O}{K\Pi} = \frac{O\Sigma}{\Pi\Sigma} = \frac{\Phi\Sigma}{K\Sigma} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{8}{1,6} = \frac{x+S}{S} \Leftrightarrow 8S = 1,6x + 1,6S \Leftrightarrow$

$6,4S = 1,6x \Leftrightarrow S = \frac{1,6}{6,4}x$

$S(t) = \frac{1}{4}x(t)$

Παραγωγίζω $S'(t) = \frac{1}{4}x'(t) \Leftrightarrow S'(t) = \frac{0,8}{4}$

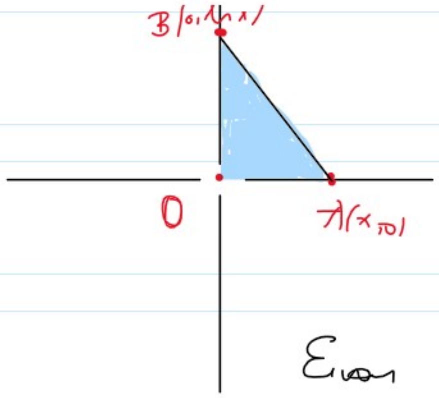
$S'(t) = 0,2$ m/sec.

2. Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T, όταν $x = 5$cm.

$x > 1$ $\quad x'(t) = 4$ cm/sec $\quad T'(t_0) = ; \Big|_{x(t_0)=5}$

Ισχύει $T = (OAB) = \frac{1}{2}OA \cdot OB \Leftrightarrow$

$\longrightarrow T'(t_0) = \ldots$



Ισχύει $T=(OAB)=\frac{1}{2}OA\cdot OB \Leftrightarrow$

$T(x)=\frac{1}{2}x\cdot \ln x$ τότε για χρόνο t:

$T(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot \ln x(t)$ $\qquad (\ln f)'=\frac{1}{f}\cdot f'$

Είναι $T'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\cdot \ln x(t)+\frac{1}{2}x(t)\cdot\left(\ln x(t)\right)'$

$T'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\ln x(t)+\frac{1}{2}\cancel{x(t)}\cdot\frac{1}{\cancel{x(t)}}\cdot x'(t)$

$T'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\ln x(t)+\frac{1}{2}x'(t)$ για $t=t_0$

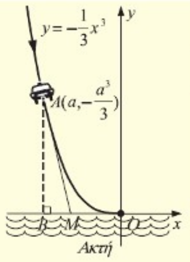
$T'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\ln x(t_0)+\frac{1}{2}x'(t_0)=\frac{1}{2}4\cdot\ln 5+\frac{1}{2}\cdot 4=2\ln 5+2$

cm^2/sec.

6. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t)=-\alpha(t)$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.



Έστω $y=-\frac{1}{3}x^3$

και σημείο $A(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3})$

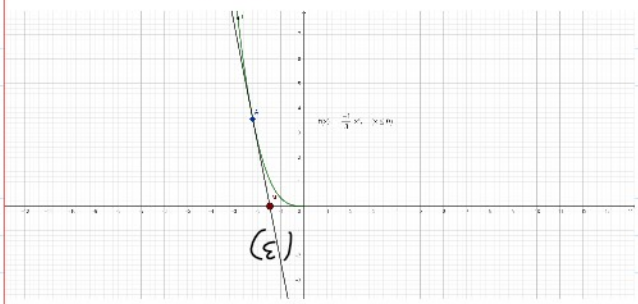
Η εφ/νη της φ στο A

τέμνει τον xx' στο M

να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής

της τετμημένης του M τη στιγμή

που $\alpha(t_0)=-3$.



Λύση:

Για να βρω το M πρέπει να λύσω σύστημα της (ε) και του xx'

Έτσι θα βρω την εφ/νη στο $A(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3})$

Έστω (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εξίσωση της εφ/νης της φ σ. A

Έτσι ισχύει $f'(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3\right)'=-\frac{3}{3}x^2$

και $f'(\alpha)=-\alpha^2$

Σημείο $(x_0,f(x_0))=(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3})$

Έτσι (ε) $y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\alpha^2x+\alpha^3-\frac{\alpha^3}{3}$

$\boxed{y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3} \quad (\varepsilon)}$

Εύρεση του M $\begin{cases} y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow -\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}=0\Leftrightarrow$

$-\alpha^2x=-\frac{2\alpha^3}{3}\Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{2}{3}\alpha}$

Και $y=0$ για $-a^2 x = -\frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}a}$

Άρα $M\left(-\frac{2}{3}a, 0\right)$.

Έστω $x(t) = -\frac{2}{3}a(t)$ η τετμημένη του M τη στιγμή t.

Ζητώ $x'(t_0)\Big|_{t_0}$ $a(t_0)=3$ Δίνεται $a'(t) = -a(t)$.

$$x'(t) = -\frac{2}{3}a'(t) \Leftrightarrow x'(t) = -\frac{2}{3}(-a(t))$$

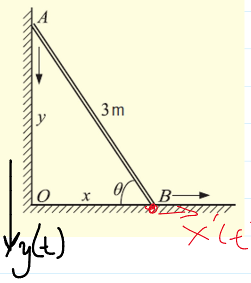
$$\Leftrightarrow x'(t) = \frac{2}{3}a(t).$$

Άρα $x'(t_0) = \frac{2}{3}a(t_0) = \frac{2}{3}(-3) = -2$.

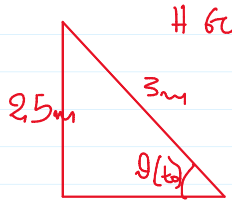
B/ 7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.



i) Στο τρίγωνο $O\hat{A}B$.



$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa.\ \kappa\acute{\alpha}\theta}{\upsilon\pi o\tau} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{3}$$ και γενικά χρονική στιγμή t:

$\sigma\upsilon\nu\theta(t) = \frac{x(t)}{3}$ παραγωγίζοντας έχω: $(\sigma\upsilon\nu f)' = -\eta\mu f \cdot f'$

$$(\sigma\upsilon\nu\theta(t))' = \left(\frac{x(t)}{3}\right)' \Leftrightarrow -\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t) = \frac{x'(t)}{3}$$

Άρα $-\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t) = \frac{0,1}{3} \Leftrightarrow \theta'(t) = -\frac{0,1}{3\eta\mu\theta(t)}$.

Επο. την στιγμή t_0: $\theta'(t_0) = -\frac{0,1}{3\eta\mu\theta(t_0)}$

από το σχήμα της στιγμής t_0 εύκολα βλέπω:

$$\eta\mu\theta(t_0) = \frac{\alpha\pi.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\eta\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau} = \frac{2,5}{3}$$

Άρα $\theta'(t_0) = -\frac{0,1}{\cancel{3}\cdot\frac{2,5}{\cancel{3}}} = -\frac{0,1}{2,5} = -\frac{1}{25}$ rad/sec.

ii) Αν $y(t)$ η συνάρτηση ύψους του άνω άκρου της σκάλας

Ζητούμε $y'(t_0)\Big|_{y(t_0)=2,5}$.

Θα βρω σχέση που συνδέει το $y(t)$ με τα άλλα μεγέθη

$$ημθ = \frac{απ.καθ}{υποτ} \Leftrightarrow ημθ = \frac{y}{3} \Leftrightarrow$$

$y = 3ημθ$ και σε χρόνο t.

$$y(t) = 3ημθ(t).$$

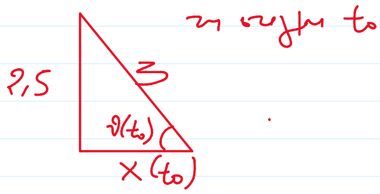
$$y'(t) = (3ημθ(t))' \Leftrightarrow$$

$(ημf)' = συνf \cdot f'$

$$y'(t) = 3συνθ(t)\cdot θ'(t).$$

Την στιγμή t_0 έχουμε: $y'(t_0) = 3συνθ(t_0)\cdot θ'(t_0)$

υπολογίζω το $συνθ(t_0) = \frac{x(t_0)}{3}$ $\left(\frac{προσ.καθ}{υποτ}\right)$



πρέπει να υπολογίσω το $x(t_0)$ Πυθαγόρειο θεώρημα.

$$3^2 = x^2(t_0) + (2,5)^2 \Leftrightarrow x^2(t_0) = 9 - 6,25 \Leftrightarrow$$

$x(t_0) = \sqrt{2,75}$. Άρα $συνθ(t_0) = \frac{\sqrt{2,75}}{3}$

και $y'(t_0) = \cancel{3}\cdot\frac{\sqrt{2,75}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)$

$\boxed{θ'(t_0) = -\frac{1}{25}\ rad/sec \text{ από (i)}}$

$$y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2,75}}{25}.$$

8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

$x^2(t) + y^2(t) = 1$ (1) Η εξίσωση σε χρόνο t.

τη στιγμή t_0: $x(t_0) = \frac{1}{2}$, $y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ η C περνάει $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x'(t_0) = ;$

$y'(t_0) =$

$x(t_0) = ;$ | $y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y'(t) = -3$ μον/sec

Παραγωγίζω την (1) και έχω

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$ για $t = t_0$

$$2x(t_0)\cdot x'(t_0) + 2y(t_0)\cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\frac{1}{2}x'(t_0) + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'(t_0) - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3}$$