

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΛ Ν ΑΡΤΑΚΗΣ

Ορφανός Αντώνης

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:
 - α. $P(x) + Q(x)$
 - β. $P(x) - Q(x)$
 - γ. $P(x) \cdot Q(x)$

2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$$
 να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$$
 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο: $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$ είναι διάφορο του μηδενικού.

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$$

$$Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda.$$

6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$$
 να παίρνει τη μορφή:

$$\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

7. Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$, ώστε το τετράγωνό του να ισούται με:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4.$$

8. Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$$
 δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

9. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το: $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$.

10. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει:

$$(x^2 + 1) \cdot P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3.$$

11. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.

12. Αν η διαφορά δύο πολυωνύμων βαθμού n είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δείξτε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.
13. Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ αν:
- α. $f(x + 1) = x^2 - 2x + 3$
- β. $g(3x + 1) = 9x^2 - 6x + 1$
14. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου:
 $P(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) \cdot x^3 + (\alpha^2 - \alpha) \cdot x + 1 - \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
15. Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x - 1)$ δείξτε ότι ο $\rho - 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x + 1)$.
16. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη:
$$P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1.$$

Αν $P(0) = 1$ και $P(2) = 2$, να βρείτε τα: $P(1)$, $P(5)$ και $P(26)$. Τι παρατηρείτε;
17. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση:
$$(x - 3) \cdot P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Διαίρεση πολυωνύμων

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
- α. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$
- β. $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
- γ. $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$
- δ. $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$
2. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.
3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.
4. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x - 1)$ και $P(x) : (x + 1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:
$$P(x) : (x - 1)(x + 1)$$
5. Το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διαιρούμενο με το: $g(x) = x^2 - 3x + 2$ δίνει υπόλοιπο: $v(x) = 4x + 7$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$

1. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β .
2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + \beta)x + 6$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$.
4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ .
5. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.
6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
 - α. $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$
 - β. $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$
 - γ. $[6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2)x + 3\alpha^2] : (x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$
 - δ. $(x^6 - 4x^3 + x^2 - 2) : (2x - 1)$
 - ε. $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2}x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1), \lambda \in \mathbb{R}^*$
7. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$$
 να έχει για παράγοντα το: $(x - 1)(x + 2)$.
8. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)x + \beta + 10$$
 να έχει παράγοντα το: $(x - 2)^2$.
9. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το $(x + 1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x - 1$.
10. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το: $(x - 2)(x + 3)$.
11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.

12. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^{v+1} + \beta x^v + 1$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ αποδείξτε ότι το πολυώνυμο: $Q(x) = (v + 1) \alpha x^v + v\beta x^{v-1}$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

13. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = (v + 1) x^v - vx^{v+1} + \alpha$ διαιρείται με το $x - 1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x - 1)^2$.

14. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του:

$$P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3$$

με το $(2x + 1)$ να είναι το 5.

15. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει: $P(0) = P(1) = 2004$. Να αποδείξετε ότι: $P(x) = x(x - 1) \cdot \pi(x) + 2004$.

4. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α. $x^3 - 8x + 7 = 0$

β. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ. $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$

δ. $(x - 1)(x^4 + x) - 3(x + 4) = 0$

ε. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

2. Αν κ ακέραιος αριθμός ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\kappa} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3. Αν κ, λ ακέραιοι αριθμοί ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $8\lambda x^{2\kappa} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

* **4.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

β. $9x^3 - 27x^2 - x + 3 = 0$

γ. $3x^4 - 8x^3 = 6x^2 - 16x$

δ. $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$

ε. $3x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 6x + 27 = 0$

στ. $2x^2(x + 2) = 3x^2 + 15x + 18 = 0$

* **5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^3 - 7x - 6 = 0$

β. $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$

γ. $4x^4 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$

δ. $6x^4 + 10x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

ε. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β. $4x^4 - 5x^3 - 4x + 5 \geq 0$

γ. $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

δ. $(x + 2)^3 < 8x^2 + 16x$

ε. $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

στ. $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

ζ. $x^4(3x - 4) \geq 10x^2(2x - 1) + 6 - 17x$

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

5. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

β. $2y^4 - 7y^2 - 4 \geq 0$

γ. $3t^4 + 5t^2 + 2 = 0$

δ. $\varphi^4 + 9\varphi^2 + 24 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ. $(\omega^2 - 3\omega + 1)^2 - 10(\omega^2 - 3\omega - 3) - 51 = 0$

δ. $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

ε. $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$

στ. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 + x^4 + \kappa x + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι κ , λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση: $x^3 - 12x + 1 = 0$ έχει 3 διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$$

$$\beta. \frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$$

$$\gamma. \frac{x^3+2}{x+1} + \frac{2-x}{x-1} = \frac{2x+1-x^2}{x^2-1}$$

δ.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις και ανισώσεις:

$$\alpha. \frac{x^2+2x-4}{x-2} < 1$$

$$\beta. \frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$$

$$\gamma. \frac{6}{2x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{1-8x}{1-4x^2}$$

δ.

$$\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} > \frac{x^2-3x+2}{x}$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. (2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$$

$$\beta. 2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$$

$$\gamma. 2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$$

$$\delta. 2\sigma\upsilon\nu^4 x + 17\sigma\upsilon\nu^2 x - 9 = 0$$

$$\epsilon. 2\eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$$

8. Να βρείτε το $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του:

$$P(x) = x^4 - (\eta\mu 3\alpha)x^3 + (2\eta\mu 2\alpha)x^2 - (\eta\mu \alpha)x - 1.$$

Στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε υπολογίστε το πηλίκο της διαίρεσης: $P(x) : (x+1)$.

*

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 1 + \sqrt{x} = \sqrt{3(x-1)}$$

$$\beta. \sqrt[3]{5\varphi-7} = \varphi-1$$

$$\gamma. \sqrt{3y+1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{7y+1}$$

δ.

$$t^2 - 6t - 2\sqrt{t^2 - 6t + 2} = 1$$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. x + \sqrt{5x+10} = 8$$

$$\beta. \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$$

$$\gamma. \sqrt{x-8} = 2+x$$

$$\delta. \sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16$$

$$\epsilon. \sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a. \sqrt{x-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$b. \frac{4 - \sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{4x+20}}{4 + \sqrt{x}}$$

$$γ. \sqrt{2-x} + \frac{4}{3 + \sqrt{2-x}} = 2$$

$$δ. \sqrt{-x-1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}$$

$$\epsilon. \sqrt{2x^2 - 7x + 4} = \sqrt{x^2 + 3x - 5}$$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $x + \sqrt{x^2 - x + \lambda^2 + 1} = \lambda$

12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$a. \sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$$

$$b. x-1 \geq \sqrt{x+5}$$

$$γ. \sqrt{x^2 + x + 3} \geq x + \frac{1}{2}$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$a. x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$b. 6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$$

$$γ. 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$δ. 2x^5 - 13x^4 - 61x^3 - 61x^2 - 13x + 2 = 0$$