Επανάληψη - Τραπεζα θεμάτων

Τρίτη, 2 Μαρτίου 2021 11:33 πμ

22) ΑΣΚΗΣΗ 4-22759 §4.3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$ και γ,δ πραγματικές σταθερές.

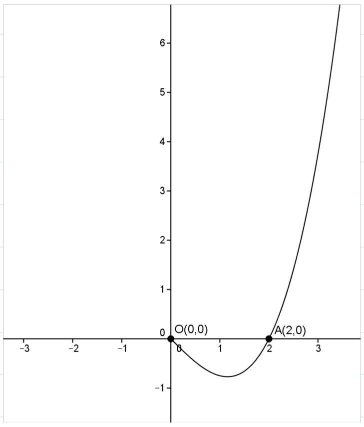
α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma=-1$ και $\delta=0$ (Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$ (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=-\frac{3}{4}$ και $f(x)=\frac{3}{4}$ (Μονάδες 10)



α) Από το σχήμα παρατηρώ

$f(0)=0$ στο $(0,0)$ και $f(2)=0$ στο $(2,0)$

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta$

$f(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0$

$f(2)=0 \Leftrightarrow \frac{8}{4}+2\gamma+\cancel{\delta}\,0=0$

$\Leftrightarrow 2\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-1.$

β) $f(x)=\frac{x^3}{4}-x \quad x\in\mathbb{R}.$

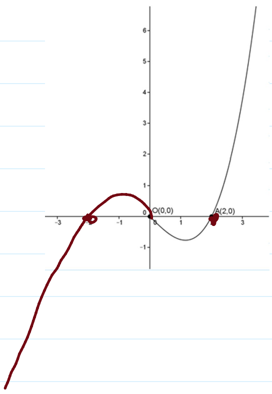
i) νδο η f περιττή

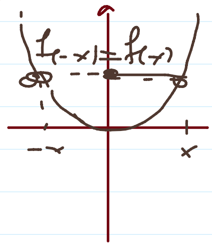
για $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=\frac{(-x)^3}{4}-(-x)=-\frac{x^3}{4}+x=-\left(\frac{x^3}{4}-x\right)=-f(x)$

άρα f περιττή στο $\mathbb{R}$

ii)



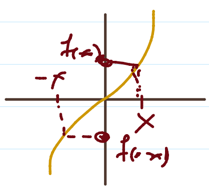


ΑΡΤΙΑ

$x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=f(x)$

συμμετρία ως προς y'y



περιττή

$x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-f(x)$

συμμετρία ως προς O(0,0)

iii) $f(1)=\frac{1^3}{4}-1=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}$

$f(x)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x^3}{4}-x=-\frac{3}{4} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}$

$x^3-4x=-3 \Leftrightarrow x^3-4x+3=0$ πιθανές: $\pm1, \pm3$

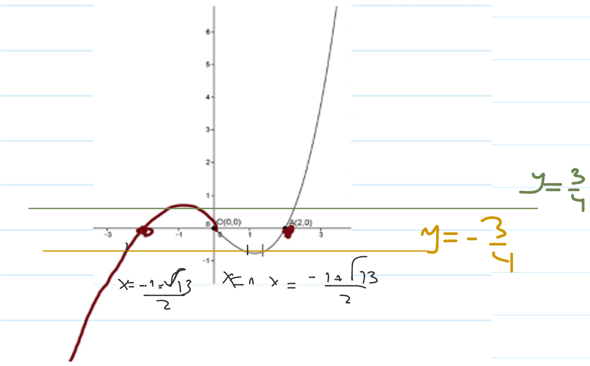
Horner

1	0	−4	3	1
	1	1	−3	
1	1	−3	$\boxed{0}$	

$x^3-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3)=0$

άρα $x=1$ ή $x^2+x-3=0$ $\Delta=1+12=13$

$x=1$ ή $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$



$x=1$ ή $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Αφού η συνάρτηση

είναι περιττή

$f(x)=\frac{3}{4}$ τότε $x=-1$ ή $x=-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

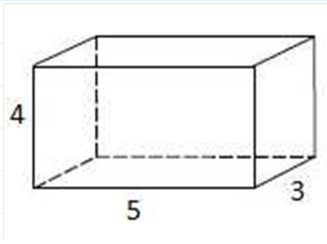
ή $x=-\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$

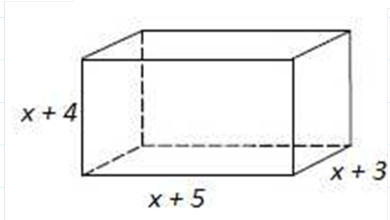
Δηλ. $x=-1$ ή $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-22684 §4.3

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3 cm, 4 cm και 5 cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει. Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.





α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$.

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$)

(Μονάδες 12)

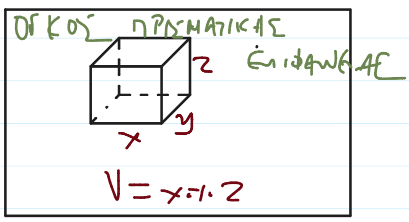
β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

(Μονάδες 13)

Λύση

$V=(x+4)(x+5)(x+3)$

$=(x^2+5x+4x+20)(x+3)$



$=(x^2+9x+20)(x+3)=x^3+9x^2+20x+3x^2+27x+60=$

$=x^3+12x^2+47x+60$.

Ζητώ $V(x)=120 \Leftrightarrow x^3+12x^2+47x+60=120 \Leftrightarrow$

$\boxed{x^3+12x^2+47x-60=0}$ (1)

β) Horner

1	12	47	−60	1
↓	1	13	60	
1	13	60	0	

Ετσι (1) ⇔ $(x-1)(x^2+13x+60)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+13x+60=0$

$\Delta=169-240<0$

άρα $x=1$.

28) ΑΣΚΗΣΗ 4-22773 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x)\geq 0$ (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$ (Μονάδες 9)

ρίζα είναι το 0

α) το υπόλοιπο $P(x):x$ είναι 6

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x):(x-\alpha)$ είναι β

$P(\alpha)=\beta$.

$P(0)=6$

Το P έχει ρίζα το 1 $P(1)=0$

$P(0)=6 \Leftrightarrow \alpha+5=6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

$P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-7+\alpha+5=0 \Leftrightarrow$

$1+\beta-7+1+5=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$

β) $P(x)=x^3-7x+6$

i) $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^3-7x+6\geq 0$ (1)

Horner

1	0	−7	6	1
↓	1	1	−6	
1	1	−6	0	

Ετσι

(1) ⇔ $(x-1)(x^2+x-6)\geq 0$

$1 \quad 1 \quad -6 \quad |\boxed{0}$ ετσι

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6) \geq 0$

$\Delta = 1+24 = 25 > 0$

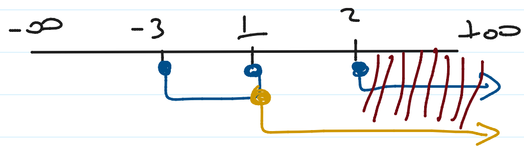
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

	$-\infty$ … -3	-3 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
(x^2+x-6)	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x^2+x-6)$	$-$	$+$	$-$	$+$

άρα $(x-1)(x^2+x-6) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$ ή $x \geq 2$.

ii) $\sqrt{P(x)} = x-1 \Leftrightarrow$ περιορισμοί $\left.\begin{array}{l} P(x) \geq 0 \\ \text{και } x-1 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 \leq x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2 \\ \text{τομή} \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

$\sqrt{(x-1)(x^2+x-6)}^{\,2} = (x-1)^2 \Leftrightarrow$



$(x-1)(x^2+x-6) = (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2+x-6) - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

άρα πρέπει $x \geq 2$

$(x-1)\left(x^2+x-6-(x-1)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2+x-6-x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \sqrt{5}$ ή $x = -\sqrt{5}$

αλλά $x \geq 2$

Έτσι δεκτή λύση: $x = \sqrt{5}$.

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22766 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2-1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa+1)x^3 + (\kappa-1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι ίσο με -4. (Μονάδες 7)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x-1$ (Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$ (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$ (Μονάδες 6)

α) $\text{βαθμ}(P) = 3$ άρα $(\kappa^2-1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$

και $P(x) : (x-1)$ δίνει $\upsilon = -4$

$P(1) = -4$.

$P(1) = -4 \Leftrightarrow (\kappa^2-1)\cdot 1^4 + \frac{1}{2}(\kappa+1)\cdot 1^3 + (\kappa-1)\cdot 1^2 - 3\kappa\cdot 1 + \lambda = -4$

$$\kappa^2-1+\frac{1}{2}(\kappa+1)+\kappa-1-3\kappa+\lambda=-4. \quad (2)$$

• αν $\kappa=1$ $\quad (2) \Leftrightarrow \cancel{1-1}+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}+\cancel{1-1}-3\cdot 1+\lambda=-4 \Leftrightarrow$

$$-2+\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

• $\kappa=-1$ $\quad (2) \Leftrightarrow \cancel{1}-\cancel{1}+0-2+3+\lambda=-4 \Leftrightarrow$

$$1+\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-5.$$

β

i) $\kappa=1$, $\lambda=-2$. $\quad P(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

$$P(x) \overset{(1)}{=} x^3-3x-2.$$

$P(x):(x-1)$

Horner

1	0	-3	-2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	-4	

$\underbrace{1 \quad 1 \quad -2}_{\text{συντελεστές του } \pi(x)}$ $\qquad$ $-4 = υ$

$$P(x)=(x-1)\cdot(x^2+x-2)-4$$

ii) $P(x)+4=x^2-1 \Leftrightarrow x^3-3x-2+4=x^2-1 \Leftrightarrow$

$$x^3-x^2-3x+3=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-3(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ ή \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 \\ ή \\ x=\pm\sqrt{3}. \end{matrix}$$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3-3x-2}{(x-1)^2(x+2)}-1 \geq 0$$

πρέπει $x-1\neq 0$ και $x+2\neq 0$ άρα $x\neq 1$ και $x\neq -2$

$$\frac{x^3-3x-2-(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

πράξεις

$$\frac{\cancel{x^3}-3x-2-\cancel{x^3}+2x^2+x-2}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$$

$(x-1)^2(x+2)=$
$(x^2-2x+1)\cdot(x+2)=$
$x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2=$
x^3-2x^2-x+2

$$2x^2-2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2-x-2)$$

$(x-1)\quad(x+2)$

$x^3+2x-2x^2-4x+x+2=$

x^3-2x^2-x+2

$$\frac{2x^2-2x-4}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$$

$\Delta = 1+8 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \langle {2 \atop -1}$

	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$2(x^2-x-2)$	+		+	0	−		−	0	+
$(x-1)^2$	+		+		+	0	+		+
$x+2$	−	0	+		+		+		+
[illegible]	−	x	+	0	−	x	−	0	+

άρα $\frac{2(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow x\in(-2,-1]\cup[2,+\infty)$.