4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Τρίτη, 26 Ιανουαρίου 2021 11:19 πμ

Έννοιες: Μονώνυμο: Έκφραση που αποτελείται από συντελεστή και κύριο μέρος

$3x$
$-2y^2$
$\frac{1}{2}x^3$
1
-2
0
x
x^4
xyw^2
$-x^8$ (συντ.: -1, κύριο μέρος x)

Βαθμός μονωνύμου είναι ο βαθμός της μεταβλητής ή το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών.

συμβ. με rank

πχ $\text{rank}(x^3) = 3$ $\quad \text{rank}(3x^4) = 4$

$\text{rank}(5) = 0$ ... $5x^0$

$\text{rank}(0) \notin \mathbb{R}$ ... $0x$, $0x^3$, $0x^5$, $0x^7$

$\text{rank}(3x^2y^4w) = 2+4+1 = 7.$

Πολυώνυμο: Το αλγεβρικό άθροισμα πολλών μονωνύμων

Τρόπος παρουσίασης:

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \; \dots \; a_0 x^0$$

$a_\nu, a_{\nu-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

συντελεστές του πολυωνύμου

ο δείκτης a_ν → δηλώνει την "τάξη" του όρου πχ

ένα 3ου βαθμού $P(x)$

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a_3: ο συντελεστής του μονωνύμου με rank=3

a_2: ο συντελεστής του μονωνύμου με rank=2

Μορφές Πολυωνύμων

Α. Ελλιπή (όταν τους λείπουν όροι και δεν είναι σε πλήρη διάταξη)

πχ $P(x) = 3x^4 + 2x + 5$
$Q(x) = x^5 - 1$
$S(x) = x^3 + x^7 - x$

Σημείωση: Επιθυμία (έως και απαίτηση...) της μαθ/κής κοινότητας είναι τα πολυώνυμα να είναι διατεταγμένα κατά φθίνουσα διάταξη για να μπορούν να ελέγχονται εύκολα

πχ αν $P(x) = x^2 + 2 + x^3 - x^5$

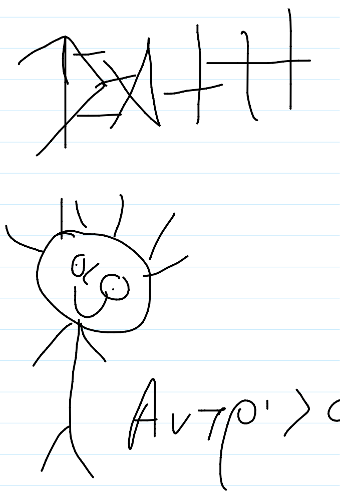
→ $P(x) = x^5 \dots x^3 \dots x^2 \dots 0$

είναι τα πολυώνυμα να είναι διατεταγμένα ώστε φθίνουσα διάταξη γιατί να μπορούν να ελεγχθούν εύκολα πχ αν $P(x) = x^2 + 2 + x^3 - x^5$
→ $P(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 2$

Πλήρη (Όταν είναι πλήρης σε όρους)

πχ $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$

$S(x) = -x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 2$ κτλ.



Ειδικά πολυώνυμα:

Τα σταθερά: $P(x) = $ αριθμός (διάφορος του μηδενός)

$P(x) = 3$
$P(x) = -2$
$P(x) = 1$

$3\cdot x^0$
$-2\cdot x^0$
$1\cdot x^0$

Σημείωση: για αυτά $rank(P) = 0$

Το μηδενικό πολ/μο: $P(x) = 0$

Σημείωση: για αυτό $rank(P) \notin \mathbb{R}$

$0\cdot x^2$
$0\cdot x^0$?
$0\cdot x^3$
$0\cdot x^{100000}$

Σχέσεις ...

• Πότε δύο πολυώνυμα θα είναι ίσα;

→ όταν οι βαθμοί τους είναι ίδιοι

Βαθμός πολ/μου: $rank(P)$ είναι ο βαθμός του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου πχ $P(x) = 3x^7 + 2x^5 + x - 1$ $rank(P) = 7$

και → όταν οι συντελεστές των ισοβάθμιων όρων είναι ίσοι

Πχ πότε $Q(x) = \alpha x^\kappa + \beta x^\lambda + \gamma x^\mu + \nu$ $(\kappa < \lambda < \mu \in \mathbb{N})$

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 1$ είναι ίσα

Πρέπει $\kappa = 3$ $\lambda = 2$ $\mu = 1$

και $\alpha = 2$ $\beta = 5$ $\gamma = 1$ $\nu = -1$.

Προσοχή: Βασιζόμαστε στον τρόπο έκφρασης των φαινομένων που αφορά στα πολυώνυμα διότι η ίδια σχέση μπορεί να περιγραφεί αλλά με 5 τρόπους!

Λεξικό:
- Το ρ είναι ρίζα του $P(x)$
- Ο ρ μηδενίζει το $P(x)$
- η εξίσωση $P(x)=0$ επαληθεύεται για $x=\rho$
- Η γραφική παράσταση του $P(x)$ τέμνει τον xx' στο ρ

$P(\rho) = 0$

Πράξεις με πολυώνυμα:

!

$P(x) = 3x^2+5x+6$

$Q(x) = x^4+2$

$P(x)+Q(x)$: $P(x)+Q(x) = x^4+3x^2+5x+8$ $\quad (\text{rank}(P+Q) = \text{rank}(Q))$

$P(x)-Q(x)$: $P(x)-Q(x) = 3x^2+5x+6-(x^4+2) = -x^4+3x^2+5x+4.$

$P(x)\cdot Q(x)$: $P(x)\cdot Q(x) = (3x^2+5x+6)\cdot(x^4+2) =$ $\quad \text{rank}(PQ)=\text{rank}(P)+\text{rank}(Q)$

$3x^6+6x^2+5x^5+10x+6x^4+12 =$

$3x^6+5x^5+6x^4+6x^2+10x+12.$

$Q(x):P(x)$ Θα το δούμε αμέσως τώρα!

Διαίρεση πολυωνύμων:

θυμηθείτε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο.

Έστω $\Delta(x)$ πολυώνυμο (διαιρετέος)

$\delta(x)$ —||— (διαιρέτης)

$\pi(x)$ —||— (πηλίκο)

$\upsilon(x)$ —||— (υπόλοιπο)

$$\begin{array}{c|c} \Delta & \delta \\ \hline \upsilon & \pi \end{array}$$

Θα ισχύει

$$\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$$

όπου $\text{rank}(\upsilon) < \text{rank}(\delta)$

Αριθμητικό παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline -15 & 5 \\ 2 & \end{array}$$

Άρα $17 = 3\cdot 5+2$ $(\upsilon<\delta)$

Για να γίνει διαίρεση στα πολυώνυμα

πρέπει $\text{rank}(\Theta) > \text{rank}(\delta)$

$P(x) = 3x^2+5x+6$

$Q(x) = x^4+2$

Θα κάνουμε την διαίρεση $Q(x):P(x)$

• γράφω τον διαιρετέο σε ΠΛΗΡΗ διάταξη (φθίνουσα)

$$\begin{array}{l|l} x^4+0x^3+0x^2+0x+2 & 3x^2+5x+6 \\ \hline -x^4-\frac{5}{3}x^3-2x^2 & \frac{x^2}{3}-\frac{5}{9}x+\frac{7}{27} \\ 0\ -\frac{5}{3}x^3-2x^2+0x+2 & \\ -(-\frac{5}{3}x^3)-(-\frac{15}{9}x^2)-(-\frac{3}{9}x) & \\ -2x^2+\frac{15}{9}x^2+\frac{3}{9}x & \\ \frac{7}{9}x^2+\frac{3}{9}x+2 & \\ -\frac{7}{9}x^2-\frac{7}{81}x\cdot\frac{27}{42} & \end{array}$$

$3x^2\cdot\frac{x^2}{3}$ (πηλίκο)

$5x\cdot\frac{x^2}{3} = \frac{5}{3}x^3$

$6\cdot\frac{x^2}{3} =$

(κατεβάζω τον υπόλοιπο)

1. συγκρίνω τις κεφαλές

$\frac{x^4}{3x^2} = \frac{x^2}{3}$ (πηλίκο)

2 συγκρίνω τις κεφαλές

$\frac{-\frac{5}{3}x^3}{3x^2} = -\frac{5}{9}x$ (πηλίκο)

$3x^2(-\frac{5}{9}x) = -\frac{5}{3}x^3$

$5x(-\frac{5}{9}x) = -\frac{25}{9}x^2$

$6\cdot(-\frac{5}{9}x) = -\frac{30}{9}x$

3. συγκρίνω τις κεφαλές

$\frac{\frac{7}{9}x^2}{3x^2} = \frac{7\cancel{x^2}}{27\cancel{x^2}} = \frac{7}{27}$

$\frac{7}{27}\cdot 3x^2 = \frac{7}{9}x^2$

$$-\frac{7}{9}x^2 - \frac{7}{81}x \cdot \frac{27}{42}$$

$$\frac{3}{9}x - \frac{7}{81}x + 2 - \frac{27}{42}$$

$$\frac{20}{81}x + \frac{57}{42}$$

Stop $rank(u) < rank(n)$

$$\frac{7}{27}3x^2 = \frac{7}{9}x^2$$

$$\frac{7}{27}\cdot\frac{3}{9}x = \frac{7}{81}x$$

$$\frac{7}{27}\cdot 6 = \frac{42}{27}$$

$$\frac{\frac{7}{9}x^2}{3x^2} = \frac{7}{27}$$

Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης: $(\Delta(x) = \delta(x)\,n(x) + u(x))$

$$x^4 + 2 = (3x^2 + 5x + 6)\left(\frac{x^2}{3} - \frac{5}{9}x + \frac{7}{27}\right) + \left(\frac{20}{81}x + \frac{57}{42}\right)$$

Η/ω: (παράδειγμα 29/1)

Ασκήσεις A/1, A/2, A/4, A/5

A/6.

A/1 iii / 139

Να γίνει η διαίρεση

iii) $(24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15) : (6x^2 + 5)$

τοποθετώ σε φθίνουσα διάταξη το $\Delta(x)$

$$\begin{array}{l|l} 24x^5 + 0x^4 + 20x^3 - 16x^2 + 0x - 15 & 6x^2+5 \\ \hline -24x^5 \qquad\quad -20x^3 & 4x^3 - \frac{8}{3} \\ 0 \qquad\qquad 0 \qquad -16x^2 + 0x - 15 & \\ \qquad\qquad\qquad -(-16x^2) \;\; -(-\frac{40}{3}) & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$-15 + \frac{40}{3} = \frac{-45+40}{3} = -\frac{5}{3}$$ Stop $rank(u) < rank(n)$

$$\frac{24x^5}{6x^2} = 4x^3$$

$$\frac{-16x^2}{6x^2} = -\frac{8}{3}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης:

$$24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15 = (6x^2 + 5)\cdot\left(4x^3 - \frac{8}{3}\right) - \frac{5}{3}.$$

Όμοια

ii) $(x^4 - 81) : (x - 3)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 81 & x - 3 \\ \hline -x^4 - (-3x^3) & x^3 + 3x^2 + 9x + 27 \\ 0 \quad 3x^3 + 0x^2 + 0x - 81 & \\ \quad -3x^3 - (-9x^2) & \\ \quad 0 \quad 9x^2 + 0x - 81 & \end{array}$$

Σύγκριση κορυφών. Πο...

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

$$\frac{9x^2}{x} = 9x$$

)

$\text{anx}(6x^2+15)$

+ | t wr

$$
\begin{array}{r}
0 \quad 9x^2 + 0x - 81 \\
-\,9x^2 - (-27x) \\
\hline
0 \quad 27x - 81 \\
-\,27x - (-81) \\
\hline
0 + 0 = 0 = \upsilon
\end{array}
$$

$\dfrac{9x^2}{x} = 9x$

$\dfrac{27x}{x} = 27$

Τέλεια διαίρεση!

Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$x^4 - 81 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$.

Παρατήρηση: όταν το $\upsilon = 0$ ο διαιρετέος έχει παράγοντα τον διαιρέτη!

Αντικατάσταση τιμών στα πολυώνυμα

Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο (πχ $P(x) = x^2 - 5x + 6$)

αντικαθιστώντας μια αριθμητική τιμή στο πολυώνυμο (στη θέση του x) προκύπτουν αριθμοί για το πολυώνυμο.

Ειδικά

- αν $x = \rho$ και $P(\rho) = 0$ το ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου

  (πχ $P(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$ άρα 2 ρίζα του P)

- αν $x = J$ και $P(J) = \kappa$ $(\kappa \in \mathbb{R})$

  τότε το κ λέγεται αριθμητική τιμή του πολ/μου για $x = J$

  (πχ $P(1) = 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 2$ άρα το 2 είναι η αριθμητική τιμή του πολ/μου P για $x = 1$

  ή $P(1) = 2$)

A/3

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4(\mu^2 - \tfrac{1}{4})x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση $P(x) = 0 \Leftrightarrow$

ζητάω μόνο κοινές λύσεις

$\begin{cases} 4\mu^3 - \mu = 0 \\ \text{και} \\ \ldots \end{cases}$ $\quad \mu(4\mu^2 - 1) = 0$ και

πρέπει οι συντελεστές του $P(x)$ (όλοι) ...

Ζητώ μόνο κοινές λύσεις

$$\begin{cases} 4\mu^3-\mu=0 \\ \text{και} \\ \mu^2-\frac{1}{4}=0 \\ \text{και} \\ -2\mu+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mu(4\mu^2-1)=0 \\ \text{και} \\ \mu=\pm\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Πρέπει οι συντελεστές του $P(x)$ (ΟΛΟΙ!) να είναι μηδέν

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu=0 \text{ ή } \mu=\pm\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=\pm\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \mu=\frac{1}{2}$$

(κοινή λύση)

4. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

$+0\cdot x$

Λύση

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-3\alpha=-2 \\ \text{και} \\ \alpha^2=1 \\ \text{και} \\ \alpha^3-1=0 \\ \text{και} \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Δύο πολ/μα είναι ίσα όταν οι συντελεστές των ισοβαθμών όρων είναι ίσοι

$$\begin{cases} \alpha^2-3\alpha+2=0 \quad (\Delta=1) \\ \text{και} \\ \alpha=\pm 1 \\ \text{και} \\ \alpha=1 \\ \text{και} \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{3\pm1}{2}= \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \\ \text{και} \\ \alpha=\pm1 \\ \text{και} \\ \alpha=1 \\ \text{και} \\ \alpha=1 \end{cases} \longrightarrow \alpha=1.$$

κοινή λύση

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k.$$

ρ ρίζα του $P(x)$ όταν $P(\rho)=0$

Λύση Αφού 2 ρίζα του $P(x)$

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-k\cdot2^2+5\cdot2+k=0$$

(το $x=2$)

$$\Leftrightarrow 8-4k+10+k=0$$
$$-3k=-18 \Leftrightarrow$$
$$k=6$$

η εύρεση παραμέτρων: προϋποθέτει τόσες πληροφορίες, όσες και οι παράμετροι που ψάχνουμε. πχ δύο παράμετροι ψάχνω, δύο πληροφορίες πρέπει να δώσουν

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x(x + 1) + \beta x + \gamma$.

&

κατόπιν "στήνω" 2 εξισώσεις με αγνώστους τις παραμέτρους και λύνω το σύστημα τους

Λύση

Πρέπει να φέρουμε το $f(x)$ (2ος τύπος) σε μορφή πολυωνύμου και να εξισώσω τους συντελεστές.

$$f(x)=\alpha x(x+1)+\beta x+\gamma=\alpha x^2+\alpha x+\beta x+\gamma=$$
$$\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ισοβαθμών όρων έχω:

$$\begin{cases} \alpha=3 \\ \text{και} \\ \alpha+\beta=-7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha=3 \\ \beta=-10 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \text{και} \\ \alpha+\beta = -7 \\ \text{και} \\ \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 3 \\ \beta &= -10 \\ \gamma &= 5 \end{aligned}$$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3.

$\alpha, \beta = ;$ $\quad P(-2) = 0$ και $P(3) = 0$

$P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow 3(-2)^3 + \alpha(-2)^2 + \beta(-2) - 6 = 0$

$P(3) = 0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^3 + \alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 3 - 6 = 0$

Άρα $\begin{cases} -24 + 4\alpha - 2\beta - 6 = 0 \\ 81 + 9\alpha + 3\beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 30 \\ 9\alpha + 3\beta = -75 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$+\begin{cases} 2\alpha - \beta = 15 \\ 3\alpha + \beta = -25 \end{cases}$$

$5\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -2$ και $-6 + \beta = -25 \Leftrightarrow \beta = -19$

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Έστω $9\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$

$\lambda(9\lambda^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{και} \\ (3\lambda - 2)(3\lambda + 2) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{και} \\ \lambda \neq \frac{2}{3} \\ \text{και} \\ \lambda \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$ Τότε $rank(P) = 3$

• Μεγιστοβάθμιος όρος:

→ θέτω τον συντ/στη $\neq 0$ (λύνω ως προς παράμετρο) τότε ο $rank(P) = $ βαθ. του μεγ. όρου

→ θέτω τον συντ/στη $= 0$ (λύνω ως προς παράμετρο)

• για κάθε τιμή της παραμέτρου αντικαθιστώ στο $P(x)$ και βρίσκω το βαθμό του

• Έστω $9\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & (1) \\ \lambda = \frac{2}{3} & (2) \\ \lambda = -\frac{2}{3} & (3) \end{cases}$

• για $\lambda = 0$, $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ γίνεται

$P(x) = -4x + 2 \qquad rank(P) = 1$

$P(x) = -4x + 2$ βαθμ$(P) = 1$

• Για $\lambda = \frac{2}{3}$ το $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ γίνεται

$$P(x) = \left(9\cdot\frac{8}{27} - 4\cdot\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(9\cdot\frac{4}{9} - 4\right)x - 3\cdot\frac{2}{3} + 2$$

$P(x) = 0$ βαθμ$(P) \notin \mathbb{R}$

• Για $\lambda = -\frac{2}{3}$ το $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ γίνεται

$$P(x) = \left(-9\cdot\frac{8}{27} + 4\cdot\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(9\cdot\frac{4}{9} - 4\right)x + 3\cdot\frac{2}{3} + 2$$

$P(x) = 4$ δηλ βαθμ$(P) = 0$