4.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Τρίτη, 23 Φεβρουαρίου 2021 11:18 πμ

Επίλυση ρητών ανισώσεων

Α/Δ ii. **ii)** $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$

Λύση πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

ρίζες $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

	$-\infty$	$-1/2$		3	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	$\times$	$+$
$(2x+1)(x-3)$ ή $\frac{2x+1}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$

άρα $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3$

1) πεδίο ορισμού
εξαιρώ τους αριθμούς που το μηδενίζουν.

2) όλα μεταφέρω και ομώνυμα

3) παραγοντοποιώ πλήρως χρησιμοποιώντας όλες τις γνωστές μεθόδους

4) κατασκευάζω τα πρόσημα των παραγόντων σε πίνακα προσήμων

5) οπότε στην τελική συναλήθευση με τους περιορισμούς

Α/Σ ii) **ii)** $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4$ (1)

Πρέπει $3x+5 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq -5 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-4(3x+5)}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2-12x-20}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow -11\,\frac{x+2}{3x+5} \leq 0$$

$$\overset{:(-11)}{\Leftrightarrow} \frac{x+2}{3x+5} \geq 0$$

ρίζα $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

	$-\infty$	-2		$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$3x+5$	$-$		$-$	$\times$	$+$
$\frac{x+2}{3x+5}$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$

Άρα $\frac{x+2}{3x+5} \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \leq -2$ ή $x > -\frac{5}{3}$.

Α/Σ λύστε

iii) $\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0$ (1) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10+2x-2}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-12}{x-1} \leq 0.$$

ρίζες $x^2-x-12=0$ $\Delta = 1+48 = 49$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} = 4, -3$

	-3	1	4

$x^2-x-12=0$ ... $\Delta = 1+48 = 49$ ... $x_{1,2} = \frac{1\pm 7}{2} = \ldots -3$

	-3		1		4	
x^2-x-12	$+$ 0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	‖	$+$		$+$
γινόμενο	$-$ 0	$+$	‖	$-$	0	$+$

Άρα (1) $\Leftrightarrow x \leq -3$ ή $1 < x \leq 4$.

$(x \in (-\infty,-3] \cup (1,4])$

B/5

5. Να λύσετε την εξίσωση $2ημ^4x - 3ημ^3x - 3συν^2x - 3ημx + 4 = 0$ (1)

$ημ^2x + συν^2x = 1$

$συν^2x = 1 - ημ^2x$

$(1) \Leftrightarrow 2ημ^4x - 3ημ^3x - 3(1-ημ^2x) - 3ημx + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$2ημ^4x - 3ημ^3x - 3 + 3ημ^2x - 3ημx + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$2ημ^4x - 3ημ^3x + 3ημ^2x - 3ημx + 1 = 0$.

Θέτω $ω = ημx$ πρέπει $-1 \leq ω \leq 1$

Έτσι προκύπτει $\boxed{2ω^4 - 3ω^3 + 3ω^2 - 3ω + 1 = 0}$ (2) $\pm 1, \pm 2$

Horner

2	-3	3	-3	1	1
↓	2	-1	2	-1	
2	-1	2	-1	0	

Άρα (2) $\Leftrightarrow (ω-1)(2ω^3 - ω^2 + 2ω - 1) = 0$

$(ω-1)\left(ω^2(2ω-1) + 2ω - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (ω-1)(2ω-1)(ω^2+1) = 0$

Συμπληρωματικά, αλλά δε βρήκαμε διαιρέτες π.χ. Μόνη επιλογή: παραγοντοποίηση

Άρα $\begin{cases} ω - 1 = 0 \\ ή \\ 2ω - 1 = 0 \\ ή \\ ω^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} ω = 1 \\ ή \\ ω = \frac{1}{2} \end{matrix}$ Δεκτές

Αδύνατη

$\begin{matrix} ημx = 1 \\ ή \\ ημx = \frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} ημx = ημ\frac{π}{2} \\ ή \\ ημx = ημ\frac{π}{6} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + \frac{π}{2} \\ ή \\ x = 2κπ + \frac{π}{6} \\ ή \\ x = 2κπ + π - \frac{π}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + \frac{π}{2} \\ ή \\ x = 2κπ + \frac{π}{6} \\ ή \\ x = 2κπ + \frac{5π}{6} \end{cases}$ $κ \in \mathbb{Z}$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολ/κές

A/1

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

πρέπει $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$
$x \neq 0$ και $x \neq 1$.

ΕΚΠ $x(x-1)$

- Παραγοντοποιούμε πλήρως τους παρονομαστές και
- παίρνουμε περιορισμούς
- βρίσκουμε ΕΚΠ παρονομαστών
- απαλοιφή παρονομαστών
- Επίλυση:
- παραγοντοποίηση ή πολυωνυμική επίλυση

Ισχύουν $x \neq 1$.
Επί $x(x-1)$

η εξίσωση γίνεται

$$\cancel{x(x-1)}\frac{3x^2-1}{\cancel{x-1}} - \cancel{x(x-1)}\frac{2}{\cancel{x(x-1)}} = \cancel{x}(x-1)\frac{x^2-3x+2}{\cancel{x}}$$

- Επιλέγω
- πολλαπλασιασμός ή πολυωνυμική επίλυση

απορρίπτω τις λύσεις εκτός πεδίου ορισμού.

$$\Leftrightarrow x(3x^2-1) - 2 = (x-1)(x^2-3x+2) \Leftrightarrow 3x^3 - x - \cancel{2} = x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - \cancel{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$\Delta = 4+12 = 16 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x = 0$ Απορ.
ή
$x = -3$ Δεκτή
ή
$x = 1$ Απορ.

Άρα $x = -3$

Άρρητες Εξισώσεις

3/

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3} = -4x$ (1)

Είναι άρρητες διάφορες εξισώσεις και αυτό γιατί σε κάθε βήμα επίλυσης πρέπει να γίνεται ανάλογος έλεγχος περιορισμών (οι οποίοι προκύπτουν!) και κάθε φορά που προκύπτουν νέοι, πρέπει να συναληθεύουν με τους παλιούς, δίνοντας νέο πεδίο.
Οι λύσεις ελέγχονται πάντα στο πεδίο ορισμού.

Πρέπει
$\begin{cases} x^3 \geq 0 & \text{(υπόρριζο)} \\ \text{και} \\ -4x \geq 0 & \text{(το δεύτερο μέλος)} \end{cases}$
(μη αρνητικοί τα μέλη αφού $\sqrt{x} \geq 0$)

$-\infty$ 0 $+\infty$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ x \leq 0 \end{cases}$

$x = 0$

Άρα $x = 0$ ικανοποιεί την (1)

ii) ii) $\sqrt{3x-2} = 4$ (1)

Πρέπει $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

$2/3$ 6.

Υψώνω στο 2

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}^{\,2} = 4^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 16 \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6.$
Δεκτή ($x \geq 2/3$)

iii) **iii)** $\sqrt{5x-1} = -4$
$+$ $-$

πρέπει
$5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$

Η εξίσωση είναι αδύνατη

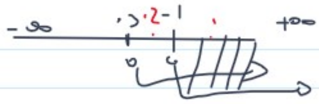
iv) iv) $\sqrt{x+3} = x+1$ (1)

Πρέπει $\begin{rcases} x+3 \geq 0 \\ \text{και} \\ x+1 \geq 0 \end{rcases} \Leftrightarrow \begin{rcases} x \geq -3 \\ \text{και} \\ x \geq -1 \end{rcases} x \geq -1.$

Υψώνω στο 2

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^{\,2} = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$



$\Delta = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} = 1$ ή -2

άρα $x=1$ ή $x=-2$

Δεκτή — Απορρίπτεται

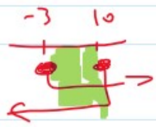
αφού $x\geq -1$.

v) $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x}+1$ (1)

Προσοχή!! η εξίσωση έχει τρεις όρους ετσι. το να υψώσω στο τετράγωνο για να φύγουν οι ρίζες δεν είναι αναγκαστικό!

Πρέπει

$x+3\geq 0$ και $10-x\geq 0 \Leftrightarrow$ $x\geq -3$ και $-x\geq -10 \Leftrightarrow$ $x\geq -3$ και $x\leq 10$



άρα $-3\leq x\leq 10$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 = \left(\sqrt{10-x}+1\right)^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2$

$x+3 = \sqrt{10-x}^2 + 2\sqrt{10-x}\cdot 1 + 1^2 \Leftrightarrow$

?

$x+3 = 10-x+2\sqrt{10-x}+1 \Leftrightarrow$

$x+3-10+x-1 = 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow$

$2x-8 = 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow x-4 = \sqrt{10-x}$

Λάθος κίνηση:

$\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x}+1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+3}^2 = \sqrt{10-x}^2 + 1^2$

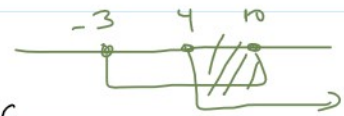
Λάθος!

Υψώνω καταμέλη και όχι κατά όρους!

νέος περιορισμός πρέπει $x-4\geq 0$ → συνδυάζω με το προηγούμενο πεδίο ορισμού

άρα η εξίσωση $x-4=\sqrt{10-x}$ ορίζεται στο $x\in[4,10]$

άρα $x\geq 4$ και $-3\leq x\leq 10$



υψώνω στο 2

$(x-4)^2 = \sqrt{10-x}^2 \Leftrightarrow$

$x^2-8x+16 = 10-x \Leftrightarrow$

$x^2-7x+6=0$

$\Delta = 49-24 = 25$

$x_{1,2} = \frac{7\pm 5}{2} = 6$ ή 1 Απορρίπτεται αφού $x\in[4,10]$

άρα $x=6$.

viii) $\sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}$ (1

πρέπει $1+2\sqrt{x}\geq 0$ (που ισχύει) και $x\geq 0$ και $x+1\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\geq 0$ και $x\geq -1$

άρα $x\geq 0$

υψώνω την (1) στο τετράγωνο

$\sqrt{1+2\sqrt{x}}^2 = \sqrt{x+1}^2 \Leftrightarrow \cancel{1}+2\sqrt{x} = x+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{x} = x$ πρέπει $x\geq 0$ (οκ)

$(2\sqrt{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow 4x = x^2 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$ Δεκτές

Ανισώσεις που ανάγονται σε πολ/κες

Α Λυκείου Άλγεβρα

Ανισώσεις που ανάγονται σε πολ/κές

Α Λυκείου Δ. ΑΤΑΞΗ

αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ με $\alpha\geq\beta$ τότε $\alpha^\nu \geq \beta^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

αν $\alpha<0$ και $\beta<0$ με $\alpha<\beta$ $\alpha^\nu > \beta^\nu$

$-3<-2$

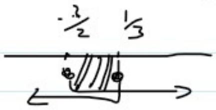
$(-3)^2>(-2)^2$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x}$ (1)

Πρέπει $2x+3\geq 0$ και $1-3x\geq 0$ $\Leftrightarrow$

$x\geq -\frac{3}{2}$ και $-3x\geq -1$ $\Leftrightarrow$ $x\geq -\frac{3}{2}$ και $x\leq \frac{1}{3}$



άρα $x\in\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right]$

υψώνω την (1) στο (2) και ως ανίσωση θετικών διατηρεί

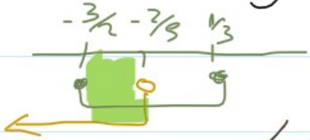
$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}^{\,2} < \sqrt{1-3x}^{\,2} \Leftrightarrow 2x+3 < 1-3x \Leftrightarrow$$

$$5x<-2 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{5}$$

συναληθεύω με το πεδίο ορισμού

$-\frac{2}{5} > -\frac{3}{2}$

$\frac{2}{5} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4<15$ που ισχύει



άρα $x\in\left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

Β4 λύστε.

ii) $\sqrt{4x^2+1} = 2x-\lambda$ (1) $\lambda\in\mathbb{R}$

πρέπει $4x^2+1\geq 0$ (που ισχύει) και $2x-\lambda\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\geq\frac{\lambda}{2}}$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}^{\,2} = (2x-\lambda)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4x^2}+1 = \cancel{4x^2}-4\lambda x+\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda x = \lambda^2-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}$$

(πρέπει να ταιριάζω τη λύση με το πεδίο ορισμού)

Ελέγχω $\frac{\lambda^2-1}{4\lambda} \geq \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow$ πρέπει $\lambda\neq 0$

$$\frac{\lambda^2-1}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2-1-2\lambda^2}{4\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-\lambda^2-1}{4\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \geq 0$$

$$\overset{(-1)}{\Leftrightarrow} \frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \leq 0$$

$(\lambda^2+1>0)$

$\lambda<0$

άρα πρέπει $\lambda<0$ ώστε

η λύση να είναι $x=\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}$.

Ασκήσεις Γραμμής σημάτων.