4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

(ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, (1) με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

προσοχή: οι συντελεστές είναι ακέραιοι!

Δηλαδή οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι ΠΙΘΑΝΕΣ ΡΙΖΕΣ

Απόδ

Έστω $\rho \neq 0$ ρίζα της εξίσωσης

θα δείξω $\alpha_0 = \rho \cdot \text{κάτι}$

για $x=\rho$ η εξίσωση (1) ⟺

$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$ ⟺

$\alpha_0 = -\alpha_\nu \rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} \dots - \alpha_1 \rho$

$\alpha_0 = \rho \cdot (-\alpha_\nu \rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \dots - \alpha_1)$

άρα ρ παράγοντας του α_0 ή διαιρέτης του α_0

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $5x^4 = 6x^2$ ⟺ $5x^4 - 6x^2 = 0$ ⟺ $x^2(5x^2-6)=0$

⟺ $x^2=0$ ή $5x^2-6=0$ ⟺ $x=0$ ή $x^2=\frac{6}{5}$

⟺ $x=0$ ή $\left(\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{6}{5}} \iff |x| = \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ άρα $x=0$ ή $x=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

απαγορευμένη

όλα στο ίδιο μέλος
ό παραγοντοποιώ

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ ⟺ $x^2(x+2) - 9(x+2) = 0$

4 όροι: ομαδοποίηση

$(x+2)(x^2-9)=0$ ⟺

$(x+2)(x-3)(x+3)=0$ ⟺ $x=-2$ ή $x=3$ ή $x=-3$

$\frac{\alpha\beta}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha} = \alpha(\beta+\gamma)$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$ ⟺

$3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0$ ⟺

⟺ $3x^3(x^2-1) + 5x^2(x^2-1) = 0$ ⟺ $(x^2-1)(3x^3+5x^2) = 0$ ⟺ $x^2(x^2-1)(3x+1)=0$

⟺ $x^2(x-1)(x+1)(3x+1) = 0$ ⟺ $x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$ ή $x=-\frac{1}{3}$

Διπλή

iv) $x^6 - 64 = 0$ ⟺ $x^6 = 64$ ⟺ $|x| = \sqrt[6]{64}$ ⟺ $x = \pm\sqrt[6]{64}$ ⟺

⟺ $x = \pm 2$

$x^\nu = \alpha$ διώνυμες

$\sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64}$

σύνολο $-1-1$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ ⟺ $x^3 - 1 + x^2 - 1 = 0$ ⟺ $(x-1)(x^2+x+1) + (x-1)(x+1) = 0$

3 όροι → 4 όροι

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1+x+1)=0$$

$$(x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\Delta=4-8=-4<0$$

$x^2+2x+2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

vii) $(x+1)^3+1=0$ $\Leftrightarrow (x+1)^3=-1 \Leftrightarrow x+1=-\sqrt[3]{|-1|} \Leftrightarrow x+1=-\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow$

$$x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2.$$

$x^\nu=a$, ν περιττός, α αρνητικός

$x^\nu=a \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{|a|}$

ix) $x^3+8=7(x^2+5x+6)+9x^2-36$ $\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+2)=7(x-(-2))(x-(-3))+9(x^2-4)$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+2)=7(x+2)(x+3)+9(x-2)(x+2)$$

$\Delta=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+2)-7(x+2)(x+3)-9(x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+2-7x-21-9x+18)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-15x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=\frac{15-\sqrt{229}}{2}$$

ή $x=\frac{15+\sqrt{229}}{2}$

$\Delta=225+4=229$

$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{229}}{2}$

4/2 Να βρεθούν οι ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΡΙΖΕΣ

ii) $3x^3+8x^2-15x+4=0$ (1)

σταθερός όρος: 4

Διαιρέτες σταθερού όρου $\pm1, \pm2, \pm4$

Δοκιμάζω με αντικατάσταση στην (1) των διαιρετών:

για $x=1$ (1) $\Leftrightarrow 3\cdot1^3+8\cdot1^2-15\cdot1+4=0 \Leftrightarrow 15-15=0$ αληθής

$x=1$ ρίζα

για $x=-1$ (1) $\Leftrightarrow 3(-1)^3+8(-1)^2-15(-1)+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3+8+15+4=0 \Leftrightarrow 24=0$ αδύνατη

για $x=2$ (1) $\Leftrightarrow 3\cdot2^3+8\cdot2^2-15\cdot2+4=0 \Leftrightarrow$

$24+32-30+4=0 \Leftrightarrow 30=0$ αδύνατη

για $x=-2$ (1) $\Leftrightarrow 3(-2)^3+8(-2)^2-15(-2)+4=0$

$\Leftrightarrow -24+32+30+4=0$ αδύνατη

για $x=4$ (1) $\Leftrightarrow 3\cdot4^3+8\cdot4^2-15\cdot4+4=0 \Leftrightarrow 759+128-60+4=0$ αδύνατη

για $x=-4$ (1) $\Leftrightarrow -759+128+60+4=0$ αδύνατη

Άρα $x=1$ ακέραια ρίζα

Η διαδικασία επίλυσης – παραγοντοποίησης μιας πολ/μου συνεχίζεται

Η διαδικασία επίλυσης - παραγοντοποίησης μιας πολ/κης εξίσωσης με χρήση του σχήματος Horner.

- ως γνωστόν ο Horner εκτελώντας διαίρεση με 1ου βαθμού διαιρέτη "κατεβάζει" το πηλίκο κατά ένα βαθμό. Έτσι
  - Επιλέγω ακέραια ρίζα όπως στην άσκηση 1/2 την τοποθετώ στο σχήμα Horner και βρίσκω το πηλίκο της διαίρεσης
  - Επαναλαμβάνω τη διαδικασία για το πηλίκο έως ότου $\text{βαθμ}(\pi) \leq 2$
  - γράφω την παραγοντοποιημένη μορφή της πολ/κης εξίσωσης και λύνω όπως άσκηση 1.

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, **ii)** $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Ζητώ $f(x)=0$

Η εξίσωση του x'x
$y=0$

(i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

Ζητώ $f(x)=0$ πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 2$

Σχήμα Horner

3	−3	−5	−2	2
↓	6	6	2	
3	3	1	0	

Δοκιμές για $x=2$
$3\cdot 8 - 3\cdot 4 - 5\cdot 2 - 2 =$
$24 - 12 - 10 - 2 = 0$
$x=2$ ρίζα

Οπότε $f(x) = (x-2)(3x^2+3x+1)$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(3x^2+3x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \text{ή} \\ 3x^2+3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x \notin \mathbb{R} \end{matrix}$$

$\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$

Άρα η f τέμνει τον $x'x$ στο $(2,0)$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ **ii)** $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

Λύση

ΜΚΔ εκθετών: 4

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^4)^2 - 15x^4 - 16 = 0$ (1)

Θέτω $u = x^4 \geq 0$.

Έτσι (1) $\Leftrightarrow u^2 - 15u - 16 = 0$ $\quad \Delta = 225 + 64 = 289$

$u_{1,2} = \frac{15 \pm 17}{2} = 16$ ή -1 Απορρίπτεται $(u \geq 0)$

ΜΚΔ εκθετών 3

Άρα $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16}$

$x = \pm 2$.

ii) $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$ (1)

Θέτω $u = (x-1)^3$

(1) $\Leftrightarrow ((x-1)^3)^2 - 9(x-1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 9u + 8 = 0$

$\Delta = 81 - 32 = 49 > 0$ $\quad u_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{2} = 8$ ή 1

Αλλιώς

$\boxed{x^\nu = \alpha,\ \nu \text{ περιττό},\ \alpha > 0,\ x^\nu = \alpha,\ x = \sqrt[\nu]{\alpha}}$

Άρα $\left.\begin{array}{l}(x-1)^3 = 8 \\ (x-1)^3 = 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x-1 = \sqrt[3]{8} \\ x-1 = \sqrt[3]{1}\end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-1 = 2 \\ x-1 = 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = 2\end{array}$

iii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$ (1)

Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Θέτω $u = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$

(1) $\Leftrightarrow 6u^2 + 5u - 6 = 0$ $\quad \Delta = 25 + 144 = 169$

$u_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ή $-\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$

$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{x}{x+1} = -\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 2(x+1) \\ \text{ή} \\ 2x = -3(x+1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 2x + 2 \\ \text{ή} \\ 2x = -3x - 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ \text{ή} \\ 5x = -3\end{array}\right.$

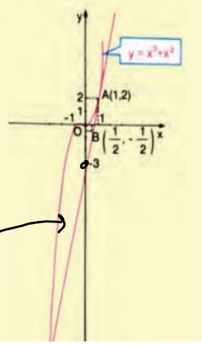
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = -\frac{3}{5}\end{array}\right.$.

12. **i)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A (1,2) και B $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία αυτή τέμνει την καμπύλη $y = x^3 + x^2$ για τα x που είναι ρίζες της εξίσωσης.

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση και να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.



i) Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας που περνά από το A, B.

A(1,2) $\quad 2 = \lambda \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \lambda + \beta = 2$

B$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $\quad -\frac{1}{2} = \lambda \frac{1}{2} + \beta \Leftrightarrow \lambda + 2\beta = -1$

Έτσι AB: $y = 5x - 3$

$B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $-\frac{1}{2} = \lambda \cdot \frac{1}{2} + \beta$ $\quad \lambda + 2\beta = -1$

Αφαιρώ κατά μέλη $\quad \beta - 2\beta = 2+1$

$-\beta = 3$

$\beta = -3$

άρα $\lambda = 5$.

Έτσι $AB: y = 5x - 3$

ii) (η ζητούμενη σχέση να δηλώνει ότι το σύστημα $\begin{cases} y = 5x-3 \\ y = x^3 + x^2 \end{cases}$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$)

Πράγματι η λύση και η εξίσωση ταυτίζονται στα σημεία που προκύπτουν ως λύση του

$$\begin{cases} y = 5x-3 \\ y = x^3 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 5x - 3 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (1)$$

πιθ. ακέραιες $\pm 1, \pm 3$

Horner

1	1	−5	3	1
	1	2	−3	
1	2	−3	0	

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \nearrow 1, \searrow -3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{cases}$

iii) οι συντεταγμένες των σημείων τομής:

για $x = 1 \quad y = 5x - 3 \quad y = 2 \quad A(1, 2)$

για $x = -3 \quad y = 5x - 3 \quad y = -18 \quad \Gamma(-3, -18)$

Επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων

- Αρχικά παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο σε παράγοντες το πολύ 2ου βαθμού
- βρίσκουμε ρίζα(ες) και πρόσημο κάθε παράγοντα
- καταγράφω τα πρόσημα και τις ρίζες σε πίνακα κατά γραμμές (μία για κάθε παράγοντα)
- στην τελευταία γραμμή καταγράφουμε το γινόμενο των προσήμων όλων των παραγόντων για το πρόσημο του πολυωνύμου.
- Απαντάμε σε ότι ρωτάμε.

Α/σ καλή.

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$

ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

Horner

2	-5	-6	9	1
	2	-3	-9	
2	-3	-9	0	

$2x^3-5x^2-6x+9=(x-1)(2x^2-3x-9)$

Ρίζες $2x^3-5x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ 2x^2-3x-9=0 \end{cases}$

$\Delta=9+72=81>0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{4}$: $\frac{12}{4}=3$, $-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

	$-\infty$	$-3/2$		1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-3x-9$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(2x^2-3x-9)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $2x^3-5x^2-6x+9>0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<1$ ή $x>3$

Άσκηση 6

Λύστε ii) $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \le 0$ (1) πιθανές ρίζες $\pm1, \pm13$

Horner

1	-6	22	-30	13	1
	1	-5	17	-13	
1	-5	17	-13	0	

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^3-5x^2+17x-13) \le 0$

για το $\Pi(x)=x^3-5x^2+17x-13$ πιθανές $\pm1, \pm13$

Horner

1	-5	17	-13	1
	1	-4	13	
1	-4	13	0	

το $\Pi(x)=(x-1)(x^2-4x+13)$

η $(1) \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x^2-4x+13) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-4x+13) \le 0$

$\Delta=16-4\cdot 13=16-52=-36<0$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$
$x^2-4x+13$	$+$		$+$
$(x-1)^2(x^2-4x+13)$	$+$	0	$+$

Άρα $(x-1)^2(x^2-4x+13) \le 0 \Leftrightarrow x=1$.

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

Λύση $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+x \Leftrightarrow f(x)=x(x^3-5x^2+3x+1)$

Horner για το x^3-5x^2+3x+1 πιθανές: ±1

1	-5	3	1	1
	1	-4	-1	
1	-4	-1	0	

Άρα $f(x)=x(x-1)(x^2-4x-1)$.

	1			
		-4	-1	
1	-4	-1	0	

Άρα $f(x) = x(x-1)(x^2-4x-1)$.

$\Delta = 16+4 = 20$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} 2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \end{cases}$.

		$2-\sqrt{5}$		0		1		$2+\sqrt{5}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4x-1	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα για να'ναι η C_f κάτω από τον $x'x$ πρέπει

$f(x) < 0 \iff x \in (2-\sqrt{5}, 0) \cup (1, 2+\sqrt{5})$

ή $(2-\sqrt{5} < x < 0$ ή $1 < x < 2+\sqrt{5})$.