ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Παρασκευή, 22 Ιανουαρίου 2021 7:52 πμ

ΑΝΑΜΝΗΣΕΙΣ
ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΡΕΛΘΟΝ...

Πολυώνυμο 2ου βαθμού

$ax^2+\beta x+\gamma \quad (a\neq 0)$

(τριώνυμο: πολ/μο με 3 όρους)

Τι είχαμε κάνει με ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού όμως?

- Κατηγοριοποίηση με βάση την "εμφάνιση"

☑ • πλήρες: όταν έχει και τους 3 όρους πχ

$3x^2+5x-2$
x^2-2x+1
$-x^2-6x-8$

☑ • Ελλιπές: όταν του λείπει ένας όρος (εκτός του 1ου)

2 μορφές

- $ax^2+\beta x$ ($\gamma=0$)
  $3x^2+5x$
  x^2-2x
  $-x^2-6x$
- $ax^2+\gamma$ ($\beta=0$)
  $3x^2-2$
  x^2+1
  $-x^2-8$

- Παραγοντοποίηση με σκοπό από 3 ή 2 όρους να πάρω έναν

☑ πλήρες

- με διάσπαση του μεσαίου όρου

πχ $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 =$
$\{-2,-3\}$
$x(x-2)-3(x-2) =$
$(x-2)(x-3)$

- Τέλειο ανάπτυγμα $x^2-6x+9 = (x-3)^2$

HARD • με διερεύνηση του συντελεστή β και του συντελεστή γ

Δεν γίνεται σε όλα τα τριώνυμα!

Συνήθως τα τριώνυμα δίνονται στη μορφή

$ax^2-(x_1+x_2)x + x_1\cdot x_2 = a(x-x_1)(x-x_2)$

όπου x_1, x_2 οι τιμές παραγοντοποίησης

παραδείγματα

Παραγοντοποιήστε την παράσταση

x^2-5x+6

I Δυο αριθμοί με γινόμενο 6

II το άθροισμα

$1\cdot 6$ ✗
$(-1)\cdot(-6)$ ✗

II

το άθροισμα να είναι αντίθετο του -5

$-(-5)=5$

$1\cdot 6$ ×
$(-1)\cdot(-6)$ ×
$2\cdot 3$ ✓
$(-2)\cdot(-3)$ ×

Άρα οι αριθμοί είναι το 2 και το 3

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Όμοια παραγοντοποιήστε την παράσταση:

$$x^2+3x-4$$

$-1\cdot 4$ ×
$1\cdot(-4)$ ✓
$2\cdot(-2)$ ×

$-(+3)=-3$

$-1+4$, $1-4$, $2-2$

Συνεπώς $x^2+3x-4=(x-1)(x-(-4))=(x-1)(x+4)$.

IV/ Άλλες

- $$αx^2+βx = x(αx+β)$$

$$3x^2+5x = x(3x+5)$$

$$2x^2+4x = 2x(x+2)$$

! • $αx^2+γ$

→ αν $γ>0$ δεν παραγοντοποιείται $2x^2+1$ (>0)

→ αν $γ<0$ (σκεφτόμαστε $α^2-β^2=(α-β)(α+β)$)

$$x^2-16 = x^2-4^2 = (x-4)(x+4)$$
$$x^2-2 = x^2-\sqrt{2}^2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$
$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$5x^2-45 = 5(x^2-9) = 5(x-3)(x+3)$$

$$4x^2-1 = (2x)^2-1^2 = (2x-1)(2x+1).$$

Ένα παιχνίδι με το τριώνυμο:
"Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου"

Σ' αυτή προσπαθούμε να γράψουμε το τριώνυμο (εφ' όσον γίνεται...) σαν μορφή

$$αx^2+βx+γ = (\quad)^2 - (\quad)^2$$

διαφορά τετραγώνων

(αν δεν γίνεται) η μορφή είναι

$$αx^2+βx+γ = (\quad)^2 + (\quad)^2$$

Θυμόμαστε την ταυτότητα

$$α^2 \pm 2\cdot αβ + β^2 = (α \pm β)^2$$

[illegible] των ταυτότητα

$$a^2 \pm 2\cdot a\beta + \beta^2 = (a \pm \beta)^2$$

Παραγοντοποίηση: $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2 = (x-1)^2$

$a^2 \pm 2\cdot a\beta + \beta^2$

όμοια: 2×3 ?

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = (x-3)^2$$

$a^2 \pm 2\cdot a\beta + \beta^2$

όμοια: $x^2 - 4x + 1$

$a^2 \pm 2\cdot a\beta + \beta^2$

1ο βήμα: κατασκευή διπλασίου γινομένου

$$-4x = -2x\cdot 2$$

2ο βήμα: ψάχνω την περίσταση φτιάχνοντας τους όρους της "ταυτότητας"

$$x^2 - 2x\cdot 2 + 1$$

διπλάσιο γινόμενο

πλεονάζει και πρέπει η ύπαρξη του για β να κάνω ταυτότητα!

$$x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 1$$

νέα προσθήκη με (-)βάζω το διπλάσιο γινόμενο και τον παράγοντα που προέκυψε από αυτό

$$(x-2)^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1$$

$$= (x-2)^2 - 3 =$$

$$(x-2)^2 - \sqrt{3}^2 = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$

άλλο παράδειγμα

- $x^2 + 3x + 2$

$a^2 \pm 2\cdot a\beta + \beta^2$

ψάχνω για διπλάσιο γινόμενο

$$3x = \frac{2\cdot 3x}{2} = 2x\left(\frac{3}{2}\right)$$

Έχω $x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{3}{2} + 2$?

προσθαφαιρώ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$= x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 =$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\right)=(x+1)(x+2).$$

§3.1 Η διερεύνηση της εξίσωσης 2ου βαθμού ως προς x.

Μορφή: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) $(\alpha\neq 0)$

όπου οι $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ λέγονται "συντελεστές" της εξίσωσης (1)

ή "συντελεστές" του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

(τριώνυμο λέγεται γιατί έχει 3 όρους)

Εφαρμόζουμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (1)$$

[διαιρώ με $\alpha\neq0$.] $\alpha\neq0$

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \iff$$

[κατασκευή διπλάσιου γινομένου (εμφάνιση του 2...)]

$$x^2+\frac{2\beta}{2\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \iff$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \quad \left(\text{προσθαφαιρώ } \pm\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right)$$

ταυτότητα

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \quad (\text{ομώνυμα})$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0 \iff \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=0$$

$$\iff \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) \quad (\text{ορίζω } \Delta \text{ (Διακρίνουσα)})$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

$$\iff \boxed{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (2)}$$

το $4\alpha^2>0$ οπότε το πρόσημο του β' μέλους εξαρτάται από το πρόσημο του Δ.

Επιλύω περιπτώσεις της

$x^\nu=\alpha$ (ν άρτιο $\nu=2$, $\alpha>0$ ή $\alpha<0$ ή $\alpha=0$)

- $\alpha>0$ $x^\nu=\alpha \iff x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
- $\alpha=0$ $x^\nu=0 \iff x=0$
- $\alpha<0$ $x^\nu=\alpha \iff x\notin\mathbb{R}$.

- αν $\Delta>0$

Η $(2)\iff x+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}$

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\iff x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- αν $\Delta=0$

$$(2)\iff\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{0}{\cdot}\iff \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{0}{4α^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 = 0$$

Επομένως $\left(x+\frac{β}{2α}\right)\left(x+\frac{β}{2α}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{β}{2α}$ ή $x=-\frac{β}{2α}$ άρα

$x=-\frac{β}{2α}$ (Διπλή)

6 $Δ<0$

τότε $(2) \Leftrightarrow \left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 = \frac{Δ}{4α^2}<0$ ΑΔΥΝΑΤΗ

Συνοπτικά:

Η $αx^2+βx+γ=0$ (1) έχει διακρίνουσα $Δ=β^2-4αγ$

και

- αν $Δ>0$ η (1) έχει 2 διαφορετικές πραγματικές ρίζες τις $x_1=\frac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}$ ή $x_2=\frac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$
- αν $Δ=0$ η (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $x=-\frac{β}{2α}$
- αν $Δ<0$ η (1) δεν έχει ΚΑΜΙΑ ρίζα πραγματική (αδύνατη εξίσωση)

Ορισμένα παραδείγματα:

- Λύστε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$

$α=1$ $β=-5$ $γ=6$ Βρίσκω $Δ=β^2-4αγ=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$

Συνεπώς η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες $x_{1,2}=\frac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}=$

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2.\end{cases}$$

- Να λυθεί η εξίσωση $x^2-6x+9=0$

$α=1$ $β=-6$ $γ=9$ Βρίσκω $Δ=β^2-4αγ=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$

Τότε η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική λύση $x=-\frac{β}{2α}=-\frac{-6}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$ (διπλή)

Ορισμένη σημείωση: όταν η εξίσωση έχει $Δ=0$ το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο!

- Λύστε την εξίσωση

$-2x^2+x-1=0$

Βρίσκω $Δ=β^2-4αγ=1-4(-2)(-1)=1-8=-7<0$

$α=-2$ $β=1$ $γ=-1$

βρίσκω $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

$\alpha = -2 \quad \beta = 1 \quad \gamma = -1$ $\quad = 1 - 4(-2)(-1) = 1 - 8 = -7 < 0$

άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

Όταν κάνουμε πράξεις απλοποιήσεις καταλήγουμε σε μία μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού, πρέπει να αποφασίσουμε πως θα λυθεί

(!) Δεν είναι πάντα η διαδικασία της διακρίνουσας η πιο αποτελεσματική προσέγγιση της λύσης (αφού μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλη!)

οι μορφές είναι!

- Ελλιπείς εξισώσεις 2ου βαθμού

- $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\alpha x + \beta = 0$

  συντελεστή ή παραγοντοποίηση για γρήγορη επίλυση...

πχ λύστε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$3x = 0$ ή $x - 2 = 0$

$x = 0$ ή $x = 2$

με διακρίνουσα:

$\alpha = 3 \quad \beta = -6 \quad \gamma = 0 \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

$= (-6)^2 - 4\cdot 3\cdot 0 = 36 > 0$ άρα δυο λύσεις πραγμ.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{36}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm 6}{6} = \begin{cases} \frac{6+6}{6} = 2 \\ \frac{6-6}{6} = 0 \end{cases}$$

- $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = -\gamma \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

• $\alpha x^2+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha x^2=-\gamma \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$

για να λυθεί πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha}<0$

Άρα $x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$

• πχ Λύστε $3x^2-27=0 \Leftrightarrow 3x^2=27 \Leftrightarrow x^2=9$

$x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=\pm 3.$

με διακρίνουσα

$\alpha=3$ $\beta=0$ $\gamma=-27$ $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$

$=0^2-4\cdot 3(-27)=$

$=324>0$

Άρα έχει 2 πραγμ. ρίζες

$x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{324}}{2\cdot 3}=\frac{\pm 18}{6}=\left\langle{3 \atop -3}\right.$

πχ Λύστε $2x^2+8=0 \Leftrightarrow 2x^2=-8 \Leftrightarrow x^2=-4$

$\Leftrightarrow x\notin\mathbb{R}.$

Α/3/ii/93.

νδο η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

$\lambda x^2+2x-(\lambda-2)=0$ $\lambda\neq 0$

Δεν ζητάει να λυθεί! Ζητά να βρεθεί αν έχει ρίζες!

Η διακρίνουσα είναι

$\alpha=\lambda$ $\beta=2$ $\gamma=-(\lambda-2)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot\lambda\cdot(-(\lambda-2))$

$=4+4\lambda(\lambda-2)$ (θα βρω το πρόσημο της)

$\Delta=4+4\lambda^2-8\lambda=4(1+\lambda^2-2\lambda)$

$=4(\lambda-1)^2\geq 0$

Αφού $\Delta\geq 0$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

.../...

1/4/93

$\mu x^2 + 2x + \mu = 0 \quad (1), \quad \mu \neq 0$

$\mu = ;$ ώστε η (1) να έχει διπλή ρίζα → ισχύει

Αφού η (1) έχει διπλή ρίζα πρέπει από θεωρία

$\Delta = 0$. Έτσι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha = \mu$

$\beta = 2$

$\gamma = \mu$

$2^2 - 4\mu\cdot\mu = 0 \Leftrightarrow$

$4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow$

$-4\mu^2 = -4 \Leftrightarrow$

$4\mu^2 = 4 \overset{:4}{\Leftrightarrow} \mu^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\mu = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \mu = \pm 1.$

4/5/93

$\alpha \neq \beta$.

να δείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2 + 2(\alpha+\beta)x + 2 = 0$

είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Αρκεί νδο $\Delta < 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

$\alpha = (\alpha^2+\beta^2)$

$\beta = 2(\alpha+\beta)$

$\gamma = 2$

$= \left(2(\alpha+\beta)\right)^2 - 4\cdot(\alpha^2+\beta^2)\cdot 2 =$

$= 4(\alpha+\beta)^2 - 8(\alpha^2+\beta^2) =$

$4(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) - 8\alpha^2 - 8\beta^2 =$

$4\alpha^2 + 8\alpha\beta + 4\beta^2 - 8\alpha^2 - 8\beta^2 =$

$-4\alpha^2 + 8\alpha\beta - 4\beta^2 = -4(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$

$= -4(\alpha-\beta)^2 < 0$ (αφού $\alpha \neq \beta$)

άρα $\Delta < 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

Ασκήσεις **8.**/94 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$

Στην επίλυση τριωνύμων βασιζόμαστε στο Δ.
Αυτή η τιμή "φιλτράρει" κάτω από ρίζα και φροντίζω θα ήταν να απλοποιηθεί.

Αναζητώ για την Δ τρόπους γραφής ώστε να εμφανίζεται υπό μορφή τετραγώνου

$$\Delta = \Big(\underbrace{-(\sqrt{5}+\sqrt{3})}_{\beta^2}\Big)^2 - \underbrace{4\cdot 1\cdot\sqrt{15}}_{-4\alpha\gamma}$$

φεύγει

$$= (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{15} =$$

$$\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - 4\sqrt{15} =$$

δεύτερη / νίκη

$$\cancel{\sqrt{5}^2} + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}^2} - 4\sqrt{15}$$

$$5 + 2\sqrt{15} + 3 - 4\sqrt{15} =$$

$$8 - 2\sqrt{15} > 0 \quad (\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4)$$

$$\Delta > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-(\sqrt{5}+\sqrt{3})) \pm \sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2\cdot 1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - 4\sqrt{15} =$$

$\{3\cdot 5\}$

$$\sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5\cdot 3} + \sqrt{3}^2 =$$

$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-(\sqrt{5}+\sqrt{3})) \pm \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}+\cancel{\sqrt{3}}+\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \\[2ex] \dfrac{\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

2./94 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 1{,}69 = 0$ **ii)** $0{,}5x^2 - x = 0$ **iii)** $3x^2 + 27 = 0$

i) $x^\nu = \alpha$

$13^2 = 169$
$(1{,}3)^2 = 1{,}69$

$$x^2 - 1{,}69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}69 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1{,}69}$$
$$x = \pm 1{,}3$$

ii) $0{,}5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0{,}5x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $0{,}5x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1}{0{,}5} \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

iii) $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -27 \quad x \notin \mathbb{R}$

9./94 Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Ο φέρνω την εξίσωση στην βασική σε σωστή μορφή)

$$x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x \Leftrightarrow \boxed{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0} \quad (1)$$

$$\Delta = (2\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot(\alpha^2-\beta^2) = \cancel{4\alpha^2} - \cancel{4\alpha^2} + 4\beta^2 = 4\beta^2 \geq 0$$

$\beta^2 - 4\ \alpha\ \gamma$

$$x_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm\sqrt{4\beta^2}}{2\cdot 1} = \frac{-2\alpha \pm 2|\beta|}{2} = \frac{-2(\alpha\pm|\beta|)}{2} =$$

$$\alpha \pm |\beta| = \alpha \pm \beta$$

Το $|\beta| = \pm\beta$ ($\beta>0$, $\beta<0$)
Το ± προστατεύει από το μείον εξασφαλίζει
το σύμβολο του $|\beta|$ έτσι
δεν το γράφω ως $|\beta|$ πια

1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ και $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

Λύση

Σημείωση: Η εξίσωση έχει άγνωστο το x όχι το α.
Έτσι η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ΩΣ ΠΡΟΣ x.

i) $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$ με $\alpha\neq 0$.

$\alpha = \alpha^2 \quad \beta = -2\alpha^3 \quad \gamma = \alpha^4-1$

$$\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\cdot\alpha^2\cdot(\alpha^4-1) = \cancel{4\alpha^6} - \cancel{4\alpha^6} + 4\alpha^2 = 4\alpha^2 \geq 0$$

ii) Αφού $\Delta \geq 0$ έχουμε ρίζες

$$\left(x = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \quad x_{1,2} = \frac{-(-2\alpha^3)\pm\sqrt{4\alpha^2}}{2\cdot\alpha^2} = \frac{2\alpha^3 \pm 2|\alpha|}{2\alpha^2} =$$

$$= \frac{2\alpha^3 \pm 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{\cancel{2\alpha}(\alpha^2\pm 1)}{\cancel{2\alpha^2}} = \frac{\alpha^2\pm1}{\alpha} = \begin{cases}\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\\[2mm] \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}\end{cases}$$

να φτιάξω εξίσωση με άγνωστο το α
και να τη λύσω

3/95

3. Να βρείτε τις τιμές του α ∈ R για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

πραγματική ρίζα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Είναι $2x^2 + (\alpha-9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ (1). $\alpha\in R$

$\alpha = 2$, $\beta = \alpha - 9$, $\gamma = \alpha^2+3\alpha+4$

Για να έχει η (1) διπλή ρίζα πρέπει $\Delta_x = 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha-9)^2 - 4\cdot 2\cdot(\alpha^2+3\alpha+4) = 0$$

προκύπτει εξίσωση

Στόχος
αναζητώ τις τιμές της παραμέτρου α και όχι των λύσεων της (1)

Όταν ζητώ διερεύνηση παραμέτρου, χρησιμοποιώ σχέση για αυτήν προηγούμενη εξίσωση ως προς α ... των οποίων και λύνω για να τα βρω

Πλεονέκτημα, χρησιμοποιώ σχέση για αυτήν που ο προηγούμενη όλους τη πληροφορίες (δεδομένα)

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7\alpha^2 - 42\alpha + 49 = 0 \overset{:-7}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4\cdot 1\cdot(-7)$

$\alpha=1$
$\beta=6$
$\gamma=-7$

λύνω την εξίσωση ως προς α, αφού αυτόν ψάχνω!

$= 36 + 28 = 64$

$\boxed{\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$

$\alpha_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-6+8}{2} = 1 \\ \frac{-6-8}{2} = -7 \end{cases}$

Επίλυση εξισώσεων που ανάγονται στην επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού

Υπάρχουν κατηγορίες εξισώσεων που δεν ανήκουν στις 2ου βαθμού λόγω της μορφής τους. Εμείς ξέρουμε να λύνουμε ΜΟΝΟ εξισώσεις 1ου ή 2ου βαθμού.

Πρέπει να κάνουμε ΕΞΥΠΝΟΥΣ μετασχηματισμούς (ΜΑΣΚΑΡΙΛΙΚΙΑ) στις εξισώσεις για να κάνουμε να μοιάσουν με εξισώσεις 2ου βαθμού

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ **ii)** $x^2 + 2|x| - 35 = 0$ **iii)** $x^2 - 8|x| + 12 = 0$.

i) Λύση. $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ (1) (Το |x| αλλάζει τη μορφή της εξίσωσης και δεν μπορώ να την χαρακτηρίσω ως 2ου βαθμού!)

2ου βαθμού ως προς x — ως προς |x|

ΜΑΣΚΑΡΕΥΩ την εξίσωση για να "μοιάσει" με 2ου βαθμού

$x^2 = |x|^2$

$(1) \Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| + 12 = 0$

(κατορθώνω να φτιάξω μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού με κύρια μεταβλητή |x|)

Θέτω $u = |x|$ και $u \geq 0$

Άρα $u^2 - 7u + 12 = 0$ και $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 12$

$\alpha=1 \quad \beta=-7 \quad \gamma=12$

$\Delta = 49 - 48 = 1$

$u_{1,2} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \text{ δεκτή} \\ 3 \text{ δεκτή} \end{cases}$

Έχουμε $|x| = 4$ ή $|x| = 3$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$ ή $x = -4$ ή $x = 3$ ή $x = -3$

Α/

12./ 94 Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0$.

Είναι $\underbrace{(x-1)^2 + 4|x-1|}_{\text{ίδια γράμματα}} - 5 = 0$ (1)

$(x-1)^2 = |x-1|^2$

$(1) \Leftrightarrow |x-1|^2 - 4|x-1| - 5 = 0$ θέτω $u = |x-1| \geq 0$

$u^2 - 4u - 5 = 0$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

$\alpha = 1$ $\beta = -4$ $\gamma = -5$

$u_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ απορρίπτεται αφού $u \geq 0$

Δηλ. $u = 5 \Leftrightarrow |x-1| = 5 \Leftrightarrow$

$x - 1 = 5$ ή $x - 1 = -5$ $\Leftrightarrow$ $x = 6$ ή $x = -5+1$ $\Leftrightarrow$ $x = 6$ ή $x = -4$.

Άσκηση Βιβλίου:

Λύστε $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ (1) θέλω τόνο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

(1) $(x^4)^2 - 15(x^4) - 16 = 0$

θέτω $u = x^4 \geq 0$ άρα $u^2 - 15u - 16 = 0$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289 > 0$

$u_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 16 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$ Απορ. $u \geq 0$

άρα $u = 16 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$

$x = \pm \sqrt[4]{2^4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Ομοίως:

Λύστε

ii) $(x - 1)^6 - 9(x - 1)^3 + 8 = 0$ (1)

παρατηρώ $(1) \Leftrightarrow \left((x-1)^3\right)^2 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

θέτω $u = (x-1)^3$ (ΔΕ γνωρίζω πρόσημο άρα δεν βάζω περιορισμό)

$u^2 - 9u + 8 = 0$ $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 81 - 32 = 49$

$u_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$ άρα

$= \langle \begin{matrix} \cdot \\ 1 \end{matrix}$ άρα

Άρα $(x-1)^3 = 8$ ή $(x-1)^3 = 1$ $\Big\} \Leftrightarrow$ $x-1 = \sqrt[3]{8}$ ή $x-1 = \sqrt[3]{1}$ $\Big\} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 1+2 \\ \text{ή} \\ x = 1+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$

13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$ (1)

Πρέπει $x \neq 0$. Θέτω $u = x + \frac{1}{x}$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\alpha = 1 \quad \beta = -5 \quad \gamma = 6$

Τότε $(1) \Leftrightarrow u^2 - 5u + 6 = 0$ $\quad \Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

$$u_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

άρα $x + \frac{1}{x} = 3 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 3x$ ή $x + \frac{1}{x} = 2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 2x$ $\Big\} \Leftrightarrow$ $x^2 - 3x + 1 = 0$ και $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 5 > 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2\cdot 1} = \langle \begin{matrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{matrix} \\ x_{3,4} = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1 \\ \text{(διπλή)} \end{cases}$

Άρα $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ή $x = 1$.

4/15/94

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$

Οι εξισώσεις της μορφής

$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0)$

λέγονται ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ

Τις γράφω στη μορφή $\alpha(x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0$

Θέτω $\boxed{u = x^2 \geq 0}$ (βοηθητικός περιορισμός)

Έτσι προκύπτει $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ και λύνω την εξίσωση ως προς u απορρίπτοντας τις αρνητικές ρίζες

$x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ (1) θέτω $u = x^2$

$(1) \Leftrightarrow (x^2)^2 + 6x^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 6u - 40 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = 6 \quad \gamma = -40$

$\Delta = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 40 = 196 > 0$

$u_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2} = \langle \; \frac{8}{2} = 4$

$$\Delta = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 40 = 196 > 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2\cdot 1} = \frac{-6 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ -\frac{20}{2} \ (\text{απορ.})\ u \geq 0 \end{cases}$$

Έτσι $u = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow$

$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Α/14/34 Λύση

ii) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{2-x^2}{x^2-2x} = 0.$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$ ΕΚΠ: $x(x-2)$

Πρέπει $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ x \neq 2$

$(1) \Leftrightarrow \cancel{x}(x-2)\dfrac{2}{\cancel{x}} + x\cancel{(x-2)}\dfrac{2x-3}{\cancel{x-2}} + \cancel{x(x-2)}\dfrac{2-x^2}{\cancel{x(x-2)}} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2) + x(2x-3) + 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -2$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ → απορρίπτεται λόγω περιορισμού

Άρα $x = -1$.

Επίλυση – Διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων 2ου βαθμού

Αρκετά δύσκολο θέμα με "απροβλημάτιστες" εξετάσεις που βασίζεται στην καλή γνώση των κανόνων επίλυσης της 2ου βαθμού εξίσωσης.

3/3/95.

παράμετρος

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα. (1)

{ Δεν ζητούν την επίλυση της (1) αλλά την εύρεση (λύση) εξίσωσης ως προς α (άγνωστος) }

Άρα οι εργασίες είναι δύο
1. να βρω τη σχέση που περιγράφει το α
2. να την λύσω για να προσδιορίσω το α
(φαίνεται άμεσα στην εκφώνηση)

(Δε φαίνεται άμεσα στην εκφώνηση) → Είναι πληροφορία μέσα στην εκφώνηση

Λύση

αφορά όλη την εξίσωση) → είναι η πληροφορία για τους όρους εξίσωσης

Λύση

αφού η (1) έχει διπλή ρίζα $\Delta = 0$

η πληροφορία έγινε σχέση.

$\alpha = 2 \quad \beta = \alpha - 9 \quad \gamma = \alpha^2 + 3\alpha + 4$

$$\Delta = (\alpha-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\alpha^2 + 3\alpha + 4)$$

$$= \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32$$

$$= -7\alpha^2 - 42\alpha + 49 = 0 \overset{:-7}{\iff} \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$$

πρέπει $\Delta = 0 \iff \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = 6 \quad \gamma = -7$

$$\Delta_1 = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{14}{2} = -7 \end{cases}$$

Άσκηση 2/3 (ασκήσεις βιβλίου Γεω)

Λύσεις

2ος τρόπος: αν δυσκολευτώ να παραγοντοποιήσω την βάζω σε τριώνυμο

v. $2(x-3) = x^2 - 6 \iff$

$$x^2 - 6 - 2(x-3) = 0 \iff x^2 - 2x + 6 - 6 = 0$$

$$\iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$$

vi. $2x(x-3) = x^2 \iff x^2 - 2x(x-3) = 0 \iff$

$$x^2 - 2x^2 + 6x = 0 \iff -x^2 + 6x = 0 \iff$$

$$-x(x-6) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 6$$

4/6/3

6. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $6x^2 + 7x + \kappa = 0$ έχει μια ρίζα διπλή;

Για να έχει μία "διπλή" ρίζα η εξίσωση πρέπει

$\alpha = 6, \beta = 7, \gamma = \kappa$

$$\Delta = 0 \iff 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot \kappa = 0 \iff 49 - 24\kappa = 0 \iff$$

$$\kappa = \frac{49}{24}$$

4/18/4

i. $\underbrace{(x^2 - x)}_{u}^2 - 8\underbrace{(x^2 - x)}_{u} + 12 = 0$ (1)

Θέτω $u = x^2 - x$

$\alpha = 1 \quad \beta = -8 \quad \gamma = 12$

η (1) $\iff u^2 - 8u + 12 = 0$

$$\Delta_u = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$$

Άρα $x^2 - x = 6, \quad x^2 - x - 6 = 0,$

$$u_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

$= 64 - 48 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-(-8)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

Δηλ

$\left.\begin{array}{l} x^2 - x = 6 \\ x^2 - x = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1+24 = 25 > 0 \\ \Delta_2 = (-1)^2 - 4\cdot 1(-2) = 1+8 = 9 > 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$ απορρίπτεται

$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Α/ησ/iii/4

iii. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{16}{x^2+2x} = \frac{2}{x}$ (1)

Εκπ: $x(x+2)$

περιορισμοί:

πρέπει $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -2$.

Η (1) $\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+2} - \frac{16}{x(x+2)} = \frac{2}{x} \overset{\cdot Εκπ}{\Leftrightarrow}$

$\cancel{x}(\cancel{x+2})\frac{x+3}{\cancel{x+2}} - \cancel{x}(\cancel{x+2})\frac{16}{\cancel{x(x+2)}} = \cancel{x}(x+2)\frac{2}{\cancel{x}}$.

$x(x+3) - 16 = 2(x+2) \Leftrightarrow x^2+3x-16 = 2x+4 \Leftrightarrow$

$x^2+3x-2x-16-4 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-20 = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = -20$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-20) = 81 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 9}{2} = \begin{cases} 4 \\ -5 \end{cases}$.

Οι Τύποι του Vieta

Στόχοι:

1) να μπορώ ουσιαστικά να "εικάσω" τις ρίζες του τριωνύμου απλά παρατηρώντας τους συντελεστές α, β, γ

2) να μπορώ να γράφω με δύο αριθμούς της αρεσκείας μου το τριώνυμο που τους έχει για ρίζες

πχ 2, 3 είναι ρίζες του $x^2-5x+6=0$

$\Delta = 25-24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

3) να μπορώ να διαχειρίζομαι μια σειρά προβλημάτων που προκύπτουν από το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου.

Οι πράξεις αυτές έχουν πολύ χαρακτηριστική μορφή, και πρέπει να αποτυπωθούν στον μαθηματικό κώδικα ώστε κάθε φορά που τις βλέπουμε να μπορούμε μέσω της διαδικασίας αυτής να "οδηγούμε" τις πράξεις σε ασφαλές συμπέρασμα.

\# Εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. (1) $(\alpha\neq0)$

Vieta: Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) $(\alpha\neq0)$ τότε

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

για απλούστευση του τύπου διαιρούμε την (1) με α $(\alpha\neq0)$

και η (1) γίνεται $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$

$$x^2-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

Καλώ $S=-\frac{\beta}{\alpha}$ $\quad P=\frac{\gamma}{\alpha}$ $\quad$ [S = Summit: άθροισμα, P = Product: γινόμενο]

$$x^2-Sx+P=0$$

όπου $S=x_1+x_2$ $\quad P=x_1\cdot x_2$

Ασκήσεις:

Στόχος 1:

\#1 Βρείτε με το μάτι  τις ρίζες της

• $x^2+9x-10=0$

$S=-9$ (άθροισμα ριζών)

$P=-10$ (γινόμενο)

άρα $x_1=-10$, $x_2=1$

HELL-EN'S THOUGHTS!

-5 · 2 ☒
-2 · 5 ☒
-10 · 1 ☑ → δίνει άθροισμα -9
-1 · 10 ☒

• Βρείτε με το μάτι τις ρίζες της

$x^2-14x-32=0$ → με πόσους τρόπους γινομένου εκφράζεται το -32

-2 · 16 ☑
-16 · 2 ☒
-8 · 4 ☒
-4 · 8 ☒
-1 · 32 ☒
-32 · 1 ☒

Επιλέγω το γινόμενο που δίνει άθροισμα 14

Στόχος 2

να δίνω 2 αριθμούς ... που γνωρίζουμε την εξίσωση 2ου βαθμού με αυτούς για λύση

με τους αριθμούς 1, 5 φτιάξτε εξίσωση που να τους έχει ως λύση

Αν $x^2 - Sx + P = 0$ η εξίσωση πρέπει $S = 1+5 = 6$, $P = 1\cdot 5 = 5$

Η εξίσωση είναι $x^2 - 6x + 5 = 0$

ομοίως με τους -15, -3

Έστω $x^2 - Sx + P = 0$ η εξίσωση $S = -15-3 = -18$, $P = (-15)(-3) = 45$

άρα $x^2 - (-18)x + 45 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + 18x + 45 = 0.$

ομοίως με $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}+1$

Αν $x^2 - Sx + P = 0$ η εξίσωση $S = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$

$P = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 1$

Έτσι $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$

Στόχος 3.

Διατήρηση των πράξεων x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$ προς κατασκευή παραστάσεων.

Έστω τριώνυμο της μορφής

$$x^2 - Sx + P = 0$$

τότε αν x_1, x_2 οι ρίζες του θα αρκεί να ισχύει

$\boxed{x_1 + x_2 = S \quad (1)}$ $\boxed{x_1 \cdot x_2 = P \quad (2)}$

Έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε μία σειρά παραστάσεων όπως οι πιο κάτω.

$A = x_1^2 + x_2^2$, $B = x_1^3 + x_2^3$, $\Gamma = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $\Delta = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

για την A:

(1) $\Rightarrow$ υψώνω στο 2 $(x_1+x_2)^2 = S^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = S^2$

(2) $\Leftrightarrow x_1^2 + 2P + x_2^2 = S^2 \Leftrightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P}$ (3)

για την B:

(1) $\Rightarrow$ υψώνω στον κύβο $(x_1+x_2)^3 = S^3 \Leftrightarrow x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = S^3$

$\Leftrightarrow x_1^3 + 3x_1x_2(x_1+x_2) + x_2^3 = S^3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^3 + 3P\cdot S + x_2^3 = S^3$

$\underline{\quad\quad}$ $\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (x_1+x_2)^3 = S^3 \Leftrightarrow x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3 = S^3$

$\Leftrightarrow x_1^3 + 3x_1x_2(x_1+x_2) + x_2^3 = S^3 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} x_1^3+3P\cdot S+x_2^3 = S^3$

$\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3 = S^3-3P\cdot S.$

για την Γ $\quad \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \dfrac{S}{P}.$

για την Δ $\quad \dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} \overset{(3)}{=} \dfrac{S^2-2P}{P}$

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

i) $x^2+2\lambda x-8=0$ (1) $\quad$ Είναι $\Delta = (2\lambda)^2-4\cdot1\cdot(-8) = 4\lambda^2+32 > 0$

άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και $x_1 = x_2^2$

$x^2+2\lambda x-8$
$x^2-Sx+P \rightarrow S=-2\lambda$, $P=-8$

$x_1=;\ x_2=;\ \lambda=;$

Από την (1) έχω: $x_1+x_2 = -2\lambda$, $x_1\cdot x_2 = -8$ $\Big\}\Leftrightarrow$

$x_1 = x_2^2$

$x_2^2\cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2^3 = -8 \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow \boxed{x_2=-2}$

$x^3 = a$

Αφού ισχύει αυτό $\quad x_1 = (-2)^2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 4.}$

Επί. $\quad$ Αφού $x_1+x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow 4-2 = -2\lambda$

$2 = -2\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}$

φυλλάδιο
Δ/14/4

14.Ποιο είναι το κ, όταν η εξίσωση $\kappa x^2 - 4x - 35 = 0$ έχει άθροισμα ριζών ίσο με 1;

Πρέπει να φέρω την εξίσωση σε κανονική μορφή $(x^2-Sx+P=0)$

• $k \neq 0$ $\quad x^2-\frac{4}{k}\cdot x-\frac{35}{k} = 0$ (1)

$S=\frac{4}{k}$, $P=-\frac{35}{k}$ $\quad$ Αν x_1,x_2 ρίζες της (1) τότε $x_1+x_2 = \frac{4}{k}$

$x_1\cdot x_2 = -\frac{35}{k}$

Ισχύει $x_1+x_2 = 1$ άρα $\frac{4}{k} = 1 \Leftrightarrow k=4.$

15. Ποιο είναι το κ όταν η εξίσωση $2x^2 + \kappa(x - 6) = 0$ έχει ρίζες των οποίων το γινόμενο είναι $-\frac{1}{2}$;

Λύση: Φέρνω την εξίσωση σε μορφή $x^2 - Sx + P = 0$

$2x^2 + k(x-6) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + kx - 6k = 0 \overset{:2}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + \frac{k}{2}x - 3k = 0 \qquad S = -\frac{k}{2} \qquad P = -3k$

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες $\quad x_1 + x_2 = -\frac{k}{2}$ και $x_1 \cdot x_2 = -3k$

ισχύει $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$ άρα $-3k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$

Τράπεζα Θεμάτων

ΘΕΜΑ 2ο

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-481 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

$\alpha = 1, \quad \beta = -2\lambda, \quad \gamma = 4(\lambda - 1)$

$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$

β) Αφού $\Delta \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ οι ρίζες της (1)

$;\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

άρα $2\lambda = 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow$

$2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow$

$\lambda = 2$.

από Vieta

$x_1 + x_2 = 2\lambda \ (= S)$

$x_1 \cdot x_2 = 4(\lambda - 1) \ (= P)$

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-1275 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 + 5x - 1 \quad (1)$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

Για α) Δε ζητά να λύσει τη (1), αλλά ζητά ΠΛΗΘΟΣ ριζών

α) $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2(-1) = 25 + 8 = 33 > 0$

Άρα το (1) έχει δύο λύσεις πραγματικές ρίζες.

β) Από Vieta αν x_1, x_2 ρίζες του (1).

Τότε $2x^2+5x-1 = 2\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\right)$

$x_1+x_2=-\frac{5}{2}$ $(=S)$ $\boxed{\begin{matrix}S\\ -\frac{5}{2}\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}P\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}}$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$ $(=P)$

Έτσι $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_2+x_1}{x_1x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) Έστω $x^2-S_1x+P_1=0$ η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ πρέπει $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=S_1$

$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=P_1$

Άρα από (β) $S_1=5$

και $P_1=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

Η εξίσωση είναι $x^2-5x-2=0$

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-3863 §3.2-§3.3

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση

$\alpha+\beta=-1$ και $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

$\alpha\beta(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=-12 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta(\alpha+\beta)^2=-12 \xRightarrow{\alpha+\beta=-1}$

$\alpha\beta(-1)^2=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta=-12$

β) Έστω $x^2-Sx+P=0$ η εξίσωση με ρίζες τους α, β

άρα $S=\alpha+\beta=-1$, $P=\alpha\beta=-12$

Επομένως η εξίσωση γίνεται: $x^2+x-12=0$ (1)

Λύνω την (1) $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49>0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

Άρα $\alpha=3$, $\beta=-4$ ή $\alpha=-4$, $\beta=3$

29) ΑΣΚΗΣΗ 2-13153 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - κx - 2$, με $κ \in IR$

α) Να αποδείξετε ότι $Δ > 0$ για κάθε $κ \in IR$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. (Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1). (Μονάδες 6)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$, όπου $ρ_1 = 2x_1$ και $ρ_2 = 2x_2$. (Μονάδες 12)

α) $α=1 \quad β=-κ \quad γ=-2$

$Δ = (-κ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = κ^2 + 8 > 0.$

β) i) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1) τότε αν x_1, x_2 οι ρίζες

$x_1 + x_2 = 3 \ (=S) \qquad x_1 \cdot x_2 = -2 \ (=P)$

ii) Έστω $x^2 - S_1 x + P_1 = 0$ η εξίσωση με ρίζες $ρ_1 = 2x_1$, $ρ_2 = 2x_2$

τότε $S_1 = ρ_1 + ρ_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) \overset{(i)}{=} 2 \cdot 3 = 6$

$P_1 = ρ_1 \cdot ρ_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 \overset{(i)}{=} 4 \cdot (-2) = -8$

Έτσι $x^2 - S_1 x + P_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 8 = 0.$

37) ΑΣΚΗΣΗ 4-4665 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - λx - (λ^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $λ \in IR$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $λ \in IR$. (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $λ \in IR$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$. (Μονάδες 10

α) $Δ = (-λ)^2 - 4 \cdot 1 \left(-(λ^2+5) \right) = λ^2 + 4(λ^2+5) = 5λ^2 + 20$

β) Αφού $Δ > 0$ η (1) έχει 2 πραγματικές κ' άνισες ρίζες για $λ \in IR$

γ) Έστω x_1, x_2 ρίζες της (1)

$x_1 + x_2 = λ \ (=S), \quad x_1 \cdot x_2 = -(λ^2+5) \ (=P)$

λ; ώστε να ισχύει $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4.$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = -8 \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda = -8 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 5 - 2\lambda = -8$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta_\lambda = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Στόχος
είναι μέσα
στην σχέση και
ψάχνω στις πράξεις
να εμφανιστούν
οι $x_1 + x_2$
$x_1 \cdot x_2$
για να αντικαταστήσω
από τους τύπους
του