



ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

Ασκήσεις

ΓΕΛ Ν.Αρτάκης

Ορφανός Αντώνης

ΕΚΘΕΤΙΚΗ

A' Ομάδα

1.11. Για ποιες τιμές του α η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha^2-7}{\alpha-1}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

[Απ. $\alpha \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$]

1.12. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3-\lambda}{\lambda+2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

[Απ. $\lambda \in (\frac{1}{2}, 3)$]

1.13. Να βρείτε τις τιμές του κ , για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3-\kappa^2}{\kappa+1}\right)^x$ έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Ox' .

[Απ. $\kappa \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$]

1.14. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{8-\alpha}{\alpha^2+2}\right)^x$ έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Ox .

[Απ. $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (2, 8)$]

1.15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x = \frac{1}{625}$

ii) $(3^{x+2})^{4-x} = 1$

iii) $2^{3x^2-1} = \frac{1}{2^{5x-1}}$

iv) $3^{x-2} = 9^{6-x}$

v) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2x+1}$

vi) $3^{2|x|+1} = 27^{x^2}$

[Απ. i) -4 ii) -2, 4 iii) -2, $\frac{1}{3}$ iv) $\frac{14}{3}$ v) 0 vi) -1, 1]

1.16. Για να πάρουμε τον αριθμό 8^8 , σε ποια δύναμη πρέπει να υψώσουμε τον 4^4 ;

[Απ. 3]

1.17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sqrt[3]{4^{x-2}} = \sqrt[6]{2^{3x-1}}$

ii) $100 \cdot 10^x = 1000^{\frac{5}{x}}$

[Απ. i) 7 ii) -5, 3]

1.18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x \cdot \sqrt[2]{27^{x+1}} = 3^{2x-4}$

ii) $x \cdot \sqrt[3]{81} = 27 \cdot x \cdot \sqrt[3]{3^{-8}}$

[Απ. i) 5 ii) 3]

1.19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$

ii) $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-3}}$

iii) $8 \cdot 4^x + 15 \cdot 2^x = 2$

iv) $2^x + 2^{4-x} = 10$

v) $8^x = 3 \cdot 2^x + 2$

vi) $25^{-x} + 5^{-x+1} = 50$

vii) $3^x - 4 \cdot \sqrt{3^x} + 3 = 0$

[Απ. i) 2 ii) 3 iii) -3 iv) 1, 3 v) 1 vi) -1 vii) 0, 2]

1.20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

ii) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4}$

iii) $4 \cdot 3^x + 2 \cdot 12^x = 9 \cdot 6^x$

iv) $25 \cdot 4^x + 21 \cdot 10^x = 4 \cdot 5^{2x}$

[Απ. i) 3 ii) 6 iii) -1, 2 iv) 2]

1.21. Να λυθεί στο σύνολο των φυσικών αριθμών η εξίσωση: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^x = 510$.

[Απ. 8]

1.22. Αν $f(x) = 2^x$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+9) = 8184$.

[Απ. 3]

1.23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 9 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x$ και $g(x) = 4 \cdot 9^x$. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

[Απ. Α(2,324)]

1.24. Σ' έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$$\Theta(t) = 36 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \text{ σε βαθμούς Κελσίου.}$$

- α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
 β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των $36,5^\circ \text{C}$.
 γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 6 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου;

[Απ. α) 40°C β) 3 γ) $36,06^\circ \text{C}$]

1.25. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a-1}{5}\right)^x$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.
 ii) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 iii) Αν $a = 11$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 6.$$

[Απ. i) $a \in (1, 6) \cup (6, +\infty)$ ii) $a > 6$ iii) $x = 1$]

1.26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η f να ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
 ii) Αν $a = \frac{1}{3}$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η ισότητα: $f(2x) + f(x+1) = 3$.

[Απ. i) $0 < a < 1$ ii) $x = 0$]

1.27. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) δίνονται: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu\theta$, $a_3 = \sigma\upsilon\nu\theta$, $a_4 = \sigma\phi\theta$, με

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

- i) Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 ii) Να βρείτε το λόγο λ και τον 1° όρο της προόδου.
 iii) Να βρείτε τον όρο της προόδου ο οποίος ισούται με $\frac{128}{81}$.

[Απ. ii) $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $a_1 = \frac{2}{9}$ iii) $v = 11$]

1.28. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 16^{\frac{x-9}{2}} \cdot 2^{3y-2} = 1024 \\ 3^x \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 9^{x-1} \cdot 3^y = 243 \\ 2^{x+3} \cdot 2^{y-5} = 16 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} \sqrt[5]{4^x} \cdot \sqrt[3]{4^y} = 2^{y+5} \\ \sqrt[3]{3^y} \cdot \sqrt[5]{9^x} = 3^{2y+1} \end{cases}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{8^y} = 2 \\ \sqrt[6]{27^x} \cdot \sqrt{81^y} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

[Απ. i) $x=21, y=-18$ ii) $x=1, y=5$ iii) $x=15, y=3$ iv) $x=3, y=0$]

1.29. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2 \cdot 5^x + 3^y = 53 \\ 5^{x+1} - 3^{y+1} = 116 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 49 \\ 2^y - 3^{x-3} = 1 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} 2^{x+y} + 3^{2x-y-1} = 11 \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 3^{2x-y} = -17 \end{cases}$$

[Απ. i) $x=2, y=1$ ii) $x=4, y=2$ iii) $x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}$]

1.30. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 3^x + 4^y = 13 \\ 9^x - 16^y = 65 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 10 \\ 3^{2x-1} + 2 \cdot 5^{y+1} = 13 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} 3^x = 4^y + 77 \\ \sqrt{3^x} = 2^y + 7 \end{cases}$$

[Απ. i) $x=2, y=1$ ii) $x=1, y=0$ iii) $x=4, y=1$]

1.31. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2^x = 3^y \\ 3^x = 2^y \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 2^x = 3^y \\ 3^x = 2^y \end{cases}$$

[Απ. i) $x=-1, y=\frac{1}{6}$ ii) $x=y=0$]

1.32. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \sqrt[3]{x+y} = 4 \\ 3^x(x+y) = 12 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 3^y \cdot \sqrt[3]{64} = 36 \\ 5^y \cdot \sqrt[3]{512} = 200 \end{cases}$$

[Απ. i) $x=1, y=3$ ii) $x=3, y=2$]

1.33. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i)} 3^{x-5} < 1$$

$$\text{ii)} 2^{4x-1} > \frac{1}{32}$$

$$\text{iii)} \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3} > 25$$

[Απ. i) $x < 5$ ii) $x > -1$ iii) $-1 < x < 1$]

1.34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i)} \left(\frac{1}{64}\right)^x > \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ii)} 5^{\sqrt[3]{64}} \geq 625$$

$$\text{iii)} 512 - \frac{16}{\sqrt[4]{2^x}} \geq 0$$

$$\text{iv)} 9^{5^x} \geq 59049$$

[Απ. i) $x < \frac{1}{4}$ ii) $x=1, 2, 3$ iii) $x \geq 20$ iv) $x \geq 1$]

1.35. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i)} \frac{6^{x^2}}{2^{-15}} \leq \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$$

$$\text{ii)} 5^{x-3} \geq 7^{3-x}$$

$$\text{iii)} 3^{x+2} - 3^x - 72 > 0$$

$$\text{iv)} 2^x - 2^{x-4} - 15 < 0$$

[Απ. i) $3 \leq x \leq 9$ ii) $x > 3$ iii) $x > 2$ iv) $x < 4$]

1.36. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[4]{10 \cdot 3^x - 9^x - 9}$.

[Απ. $A = \{0, 2\}$]

1.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3 - a)^x$ με $a \in \mathbb{N}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του a που θα βρείτε προηγούμενα, ορίζονται δύο εκθετικές συναρτήσεις: η $f_1(x) = 2^x$ και η $f_2(x) = 3^x$. Μετά να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f_1 βρίσκεται “ψηλότερα” από αυτή της f_2 .

[Απ. i) $0, 1$ ii) $x < 0$]

1.38. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0$

ii) $2^{x+1} + 4^x \leq 80$

iii) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \leq 0$

[Απ. i) $x > 13$ ii) $x \leq 3$ iii) $-1 \leq x \leq 0$]

1.39. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, με $0 < a \neq 1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

ii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

iii) $g(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.

iv) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται “ψηλότερα” από τη γραφική παράσταση της g .

v) Η εξίσωση: $f^2(x) + g^2(x) = \frac{a+a^{-1}}{2}$ έχει λύσεις δύο αντίθετους αριθμούς.

[Απ. v) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]

* * * * *

B' Ομάδα

1.40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2^x - 2|$.

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που έχει εξίσωση $y = 2$.

[Απ. ii) $(2, 2)$]

1.41. Να λύσετε την εξίσωση: $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$.

[Απ. $\frac{22}{17}$]

1.42. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 - 5x + 7)^{x^2 - x} = 1$

ii) $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$

[Απ. i) $0, 1, 2, 3$ ii) $-1, 2$]

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

A' Ομάδα

2.5. Να βρεθούν τα x στις επόμενες ισότητες:

α) $\log_4 x = -1$ β) $\log_{\sqrt{2}} x = 3$ γ) $\log_3 \frac{1}{27} = x$ δ) $\log_{\frac{1}{3}}(9\sqrt{3}) = x$ ε) $\log_x \frac{4}{9} = 2$

[Απ. α) $x = \frac{1}{4}$ β) $x = 2\sqrt{2}$ γ) $x = -3$ δ) $x = -\frac{5}{2}$ ε) $x = \frac{2}{3}$]

2.6. Να αποδείξετε ότι:

α) $\log 3 + 2 \cdot \log 4 - 2 \cdot \log 2 = \log 12$

β) $\log 32 + 2 \cdot \log 4 - 6 \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 2$

γ) $\frac{1}{2} \cdot \log 25 + \frac{1}{3} \cdot \log 8 + \frac{1}{5} \cdot \log 32 = 1 + \log 2$

δ) $\log_3 \sqrt{81\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{2}$

2.7. Αν $\log 2 = 0,3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \log \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \cdot \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \cdot \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

[Απ. $A = 0, 3$]

2.8. Αν $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) \log \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}} \quad \beta) \log \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{500\sqrt{3}} \quad \gamma) \log_3 \frac{12}{5 \cdot \sqrt[3]{2}}$$

[Απ. $\alpha) -0,278$ $\beta) -1,82$ $\gamma) 0,6$]

2.9. Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ να αποδείξετε ότι: $\log(\alpha^2-1) + \log(\beta^2-1) - \log[(\alpha\beta+1)^2 - (\alpha+\beta)^2] = 0$

2.10. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι: $\log\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

2.11. Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha+\beta)$ να αποδείξετε ότι: $\log\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

2.12. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = \log 3 + \log 3^2 + \log 3^3 + \dots + \log 3^{50}$.

[Απ. $S = 1275 \cdot \log 3$]

2.13. Θεωρούμε μία Γ.Π. (α_n) με θετικούς όρους και την ακολουθία (β_n) με $\beta_n = \log \alpha_n$.

α) Να αποδείξετε ότι η (β_n) είναι Α.Π.

β) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας $\beta_n = \log 2^n$.

[Απ. $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \log 2$]

2.14. Θεωρούμε μία Α.Π. με $\alpha_1 = \log \alpha$, $\alpha_2 = \log \beta$ τότε να αποδείξετε ότι

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}} \right), \text{ όπου } \alpha, \beta > 0.$$

2.15. Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$.

γ) Έστω (β_n) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

[Απ. $\beta) 225 \log 5$ $\gamma) \frac{1}{3} (4^{1001} - 1) \log 5$]

2.16. Αν $x, y > 0$ να αποδείξετε ότι $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log x + \log y}{2}$

2.17. Αν $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι: $\log(\alpha+1) - \log \alpha < \log \alpha - \log(\alpha-1)$.

2.18. Να βρεθεί ο φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ αν $2 < \log_{\alpha} 30 < 3$.

[Απ. $\alpha=4$ ή $\alpha=5$]

2.19. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{1}{\log_{\nu} x} + \frac{1}{\log_{\mu} x} = \frac{1}{\log_{\mu\nu} x}, \quad 0 < \mu, \nu, x \neq 1.$$

$$\beta) \frac{1}{\log_{\alpha}(\alpha\beta\gamma)} + \frac{1}{\log_{\beta}(\alpha\beta\gamma)} + \frac{1}{\log_{\gamma}(\alpha\beta\gamma)} = 1, \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1.$$

$$\gamma) \log_{\alpha\beta} x = \frac{\log_{\beta} x}{1 + \log_{\beta} \alpha}, \quad 0 < \alpha, \beta \neq 1, \quad x > 0.$$

$$\delta) \log_{\alpha} x \cdot \log_{\alpha^2} x = \frac{1}{2} \cdot (\log_{\alpha} x)^2, \quad 0 < \alpha \neq 1, \quad x > 0.$$

2.20. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \dots + \frac{1}{\log_{100} a} = \frac{1}{\log_{100!} a}, \quad \text{όπου } 0 < a \neq 1 \quad (100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100).$$

2.21. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_6 5}{\log_2 5 \cdot \log_3 5}$.

[Απ. $\Pi=1$]

2.22. Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ τότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν οι αντίστροφοι των αριθμών $\log_\alpha x, \log_\beta x, \log_\gamma x$ ($0 < x \neq 1$) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

2.23. Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = at + \beta$, $t \geq 0$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής.

γ) Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής.

[Απ. β) 2 γ) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$]

B' Ομάδα

2.24. Αν α, β, γ είναι όροι μιας γεωμετρικής πρόοδου, με θετικούς όρους, τάξεων λ, μ, ν αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(\mu - \nu) \cdot \log \alpha + (\nu - \lambda) \cdot \log \beta + (\lambda - \mu) \cdot \log \gamma = 0.$$

2.25. Να αποδείξετε ότι: $\frac{7}{16} \cdot \log(3+2\sqrt{2}) - 4 \cdot \log(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8} \cdot \log(\sqrt{2}-1)$

2.26. Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$, να αποδείξετε ότι $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

2.27. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί και διαφορετικοί ανά δύο. Αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta} \quad \text{να αποδείξετε ότι } \alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c = 1.$$

2.28. Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο και κατέχουν τις θέσεις κ, λ, μ σε μια αριθμητική και σε μια γεωμετρική πρόοδο, οι οποίες έχουν θετικούς πρώτους όρους, διαφορά και λόγο θετικό. Να αποδείξετε ότι

$$(\beta - \gamma) \cdot \log \alpha + (\gamma - \alpha) \cdot \log \beta + (\alpha - \beta) \cdot \log \gamma = 0.$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.9. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{3a+1}{a-1}} x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

[Απ. $a \in (-1, -\frac{1}{3})$]

3.10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \log_{x-1}(3-x)$ ii) $g(x) = \log(\log x - 1)$

[Απ. i) $A = (1, 2) \cup (2, 3)$ ii) $A = (10, +\infty)$]

3.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log|\log x|$.

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Για ποιες τιμές του x μηδενίζεται η συνάρτηση;
- iii) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x ώστε $f(x) < 0$.

[Απ. i) $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ii) $10, \frac{1}{10}$ iii) $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$]

3.12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2)$

β) $\log(4x-1) = 2\log 2 + \log(x^2-1)$

γ) $\frac{1}{2} \cdot \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

δ) $\frac{1}{2} \cdot \log(x^2-10x+25) + 2\log(x+5) - \log(x^2-25) = \log(2x-108)$

ε) $\log(x^3+1) - \log(x^2-3x+2) = \log(x^2-x+1)$

[Απ. α) $3, 5$ β) $\frac{3}{2}$ γ) 18 δ) 113 ε) $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$]

3.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + \log(1+2^x) = x \cdot \log 5 + \log 6$

β) $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$

[Απ. α) 1 β) 2]

3.14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$

ii) $\frac{3+\log x}{3-\log x} + \frac{2+\log x}{2-\log x} = 5$

[Απ. α) $10, \sqrt{10}$ β) $10, 10^{18/7}$]

3.15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log^2 x - \log x^6 = \log^2 3 - 9$

ii) $\log^2 x^3 - 10\log x + 1 = 0$

[Απ. i) $\frac{1000}{3}, 3000$ ii) $10, \sqrt[4]{10}$]

3.16. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ο πρώτος όρος είναι $a_1 = \log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $a_2 = \log_3 81$, τότε

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_{10} x^3} - 9 \cdot 3^{\log_{10} x^2} - 9 \cdot 3^{\log_{10} x} + 81 = 0$.

[Απ. α) $\omega=3$ β) $3, 9$]

3.17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^{1-\log x} = 0,01$

ii) $x^{1+\log x} = 100$

iii) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$

[Απ. i) $100, \frac{1}{10}$ ii) $\frac{1}{100}, 10$ iii) $10, \frac{1}{10^4}$]

3.18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

β) $\frac{x^{\log x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{10}$

γ) $x^{\log_2 x + 2} = 256$

[Απ. α) 100, $\frac{1}{100}$ β) 100, $\sqrt{10}$ γ) 4, $\frac{1}{16}$]

3.19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$

ii) $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

[Απ. i) 100, 1000 ii) 100]

3.20. i) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{3}}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$.

[Απ. ii) 10]

3.21. i) Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$.

[Απ. ii) 1000]

3.22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 0$.

[Απ. i) $A = (-3, 3)$ iii) $f(0) > f\left(\frac{1}{3}\right)$ iv) $x = -\frac{1}{2}$]

3.23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $f(10) = 25$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Για την τιμή $\alpha = 1$:

i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

[Απ. β) ii) 1, 10^{-4}]

3.24. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\log_3(x-5) - \log_3 2 - \frac{1}{2} \cdot \log_3(3x-20) < 0$

ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) + 2$

[Απ. i) $x \in (7, 15)$ ii) $x \in (1, \frac{4}{3}]$]

3.25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \cdot \ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

[Απ. α) $A = (0, +\infty)$ β) $\ln 7$ γ) $x > \ln 3$]

3.26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

[Απ. α) $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = (0, +\infty)$ β) $\ln 2$, $\ln 3$ γ) $0 < x < \ln \frac{3}{2}$]

3.27. Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}.$$

[Απ. Α. $[0, \frac{\log 2}{\log 5}]$ Β. $x=3$]

3.28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$

β) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

γ) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

δ) $\log x + \log_x 10 = \frac{5}{2}$

[Απ. α) $-\frac{7}{2}$, 3 β) 16 γ) 27 δ) 100, $\sqrt{10}$]

3.29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} \log_4 x = 54$

β) $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

γ) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

[Απ. α) 8, $\frac{1}{8}$ β) $\sqrt{2}$ γ) 8]

3.30. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log_2(\log_3 x) \leq 1$

β) $x^{\log_5 x} \leq 4x$

γ) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 2$

3.31. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \log(x \cdot y) = 3 \\ \log(\frac{x}{y}) = 1 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \log x^3 + \log y^2 = 1 \\ \log x^2 - \log y = -4 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \log \frac{1}{x^2} + \log y = 2 \\ \log x^3 + \log \sqrt{y} = 5 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$

[Απ. i) $(x, y) = (100, 10)$ ii) $(x, y) = (\frac{1}{10}, 100)$ iii) $(x, y) = (10, 10^4)$

iv) $(x, y) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{1000})$, $(x, y) = (1000, 10)$]

3.32. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x + y = 65 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

[Απ. α) $(x, y) = (\frac{7}{2}, 6)$ β) $(x, y) = (40, 25)$ ή $(x, y) = (25, 40)$ γ) $(x, y) = (20, 5)$ ή $(x, y) = (5, 20)$]