

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ & ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ

1. Στα παρακάτω πολυώνυμα να βγάλετε κοινό παράγοντα τον ΜΚΔ των συντελεστών των όρων τους.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| i. $6x + 3$ | vi. $3x^2 - 9x + 12$ |
| ii. $2\alpha^5 - 10$ | vii. $14 + 49\beta + 70\alpha$ |
| iii. $24\kappa - 16\lambda$ | viii. $4\rho - 6\rho^3 + 8$ |
| iv. $15 + 20\mu$ | ix. $26\mu^2 - 39\nu$ |
| v. $220\omega^2 + 33t^3$ | x. $25z - 75t + 100$ |

2. Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω πολυώνυμα .

- | | |
|--|---|
| i. $6\alpha\chi + 3\alpha$ | vi. $3x^2 - 9x + 12x^3$ |
| ii. $2\alpha^5 - 10\alpha$ | vii. $14\alpha^2 + 49\alpha\beta + 70\alpha\beta^3$ |
| iii. $24\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda^2$ | viii. $4\nu\rho - 6\nu^2\rho^3 + 8\rho^2\nu$ |
| iv. $15\mu^2 + 20\mu$ | ix. $26\mu^2 - 39\mu$ |
| v. $220\omega^2 + 33\omega^3$ | x. $25z^2 - 75z$ |
| | xi. $\alpha^2 - \alpha$ |
| | xii. $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha$ |
| | xiii. $\chi^{2004} - \chi^{2003} - \chi^{2002}$ |

3. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα κάνετε τις πράξεις.

- | | |
|--|---|
| i. $2\chi(2\chi^2 - 4) + \chi^3 - 2\chi$ | vi. $(2\chi + 1)^2 - \chi(\chi - 2) - 1$ |
| ii. $(\alpha + 1)(\alpha - 1) - (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$ | vii. $(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta) - 4\alpha(\alpha - 3\beta)$ |
| iii. $(\chi + \psi)^3 - \chi^3 - \psi^3$ | viii. $(\alpha + \beta)^2 - \alpha(\alpha - \beta)$ |
| iv. $\chi^2(\chi + 6) - \chi^3 - 8\chi$ | ix. $(\alpha - \beta)^2 - \beta(\alpha + \beta)$ |
| v. $(\alpha + \beta)^3 - \alpha(\alpha - \beta)^2 - \beta(\beta - \alpha)^2$ | x. $(\alpha + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2 - (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)$ |

4. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| i. $\chi(\chi + 3) + 2(\chi + 3)$ | vi. $(2\psi + 2)(\psi - 6) - (3\psi + 3)(2 - \psi)$ |
| ii. $\chi^3(\chi + 1) - \chi(\chi + 1)$ | vii. $(\alpha - \beta)^3 + (\alpha - \beta)$ |
| iii. $\alpha(\chi + \psi) + \beta(\chi + \psi)$ | viii. $\chi(\chi - \alpha)^2(\chi + 2\alpha) - \chi^2(\chi - \alpha)(\chi + 2\alpha)^2$ |
| iv. $\chi(\alpha - \beta) + \psi(\beta - \alpha)$ | ix. $\alpha^2(\alpha - \beta)\beta^3 + \alpha(\alpha - \beta)^2\beta$ |
| v. $(\chi - 1)(\chi - 2) - (1 - \chi)(2\chi + 1)$ | x. $(\chi + \psi + 1) + (\chi + \psi + 1)\chi + (\chi + \psi + 1)\psi$ |

5. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : «Ομαδοποίηση»

- | | |
|--|--|
| i. $2\alpha + 4\alpha\beta + 6\beta + 3$ | vi. $\chi^2 - \chi - \psi\chi + \psi + \omega - \omega\chi$ |
| ii. $\alpha\beta - \beta\gamma + \chi\alpha - \chi\gamma$ | vii. $\chi^5 - 4\chi^4 + 3\chi^3 - 12\chi^2 - \chi + 4$ |
| iii. $\alpha^3\beta^2\gamma + \alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta + 2$ | viii. $\alpha^3 + \alpha^2 + (\alpha + 1)(\alpha + 2)$ |
| iv. $4\chi^2\psi + 10\chi - 6\chi\psi^2 - 15\psi$ | ix. $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma + \gamma^2 + (\beta + \gamma)(\alpha + \beta)$ |
| v. $\alpha\beta + \beta\chi + \alpha + \gamma\alpha + \gamma\chi + \chi$ | x. $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta$ |

6. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

(Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$)

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| i. $\alpha^2\beta^2 - 4$ | vi. $(\alpha + \beta)^2 - 1$ |
|--------------------------|------------------------------|

ii. $16\chi^4 - 81\psi^2$
 iii. $36\omega^2 - 10^4$

vii. $49\chi^2\psi^4 - 64$
 viii. $\frac{\chi^2}{4} - \frac{\psi^2}{9}$
 ix. $\frac{\alpha^3\beta^9}{27} + 1$

7. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\chi^2 - (\chi + 3\psi)^2$
 ii. $(\alpha + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2$
 iii. $(5\chi + 3\psi)^2 - (3\chi + 5\psi)^2$

8. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\alpha\chi^2 - \alpha\psi^2$
 ii. $32\nu^4 - 8\mu^2$
 iii. $75\alpha\beta^3 - 27\alpha\beta$
 iv. $\alpha\chi^4 - \alpha^4\chi$
 v. $2\chi^4 - 18\chi^2$

9. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\alpha(\chi - \psi) + \chi^2 - \psi^2$
 ii. $(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \beta^2$
 iii. $\chi^4 - \chi^2 + \chi + 1$
 iv. $\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3$
 v. $\chi^5 - 8\chi^2 + \chi^4 - 16$
 vi. $\chi^3 + \chi^2 + 5\chi + 125$
 vii. $4\chi^4 + 8\chi^6 + \psi^3 - \psi^2$
 viii. $\kappa^3 - 2\kappa^2 + -27\lambda^3 + 18\lambda^2$

10. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα)

i. $\chi^2 + 2\chi + 1$
 ii. $4\alpha^2 - 4\alpha + 1$
 iii. $25\kappa^2 + 20\kappa + 4$
 iv. $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4}$
 v. $18 + 12\chi + 2\chi^2$
 vi. $5\chi^4 - 100\chi^2 + 500$
 vii. $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha\beta + \beta^2) + \beta^2$
 viii. $(\chi + \psi + 1)^2 - 2(\chi + \psi + 1) + 1$
 ix. $\frac{1}{4}\chi^{10} + \chi^5 + 1$
 x. $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha$

11. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα, διαφορά τετραγώνων)

i. $\chi^2 + 2\chi + 1 - 9\psi^2$
 ii. $25\alpha^2 - \chi^2 + 4\chi\psi - 4\psi^2$
 iii. $49\chi^2 + 64\psi^2 - 112\chi\psi - \psi^4$
 iv. $\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$
 v. $\chi^2 + 6\chi\psi + 9\psi^2 - (9\chi^2 - 6\chi\psi + \psi^2)$

Παραγοντοποίηση τριωνύμων: Γράφουμε τον δεύτερο όρο του τριωνύμου σε άθροισμα δύο μονωνύμων τέτοιων ώστε, το γινόμενο των συντελεστών τους να ισούται με το γινόμενο των συντελεστών του πρώτου και τρίτου όρου των τριωνύμων. Κατόπιν παραγοντοποιούμε... «ανά δύο».

Παράδειγμα στο τριώνυμο $3\chi^2 - 5\chi\psi - 2\psi^2$,

θα γράψουμε το $-5\chi\psi$: $-6\chi\psi + 1\chi\psi$, εφ' όσον $-6 \cdot 1 = 3 \cdot (-2)$.

Έτσι έχουμε: $3\chi^2 - 5\chi\psi - 2\psi^2 = 3\chi^2 - 6\chi\psi + 1\chi\psi - 2\psi^2 = 3\chi(\chi - 2\psi) + \psi(\chi - 2\psi) = (\chi - 2\psi)(3\chi + \psi)$

Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω τριώνυμα ,

- | | |
|--|---|
| i. $2\alpha^2 - 7\alpha\beta + 3\beta^2$ | xi. $(\alpha + \beta)^2 - 5(\alpha + \beta) + 6$ |
| ii. $6\chi^2 - 5\chi - 1$ | xii. $\alpha^6 + 7\alpha^3 - 8$ |
| iii. $1\chi^2 + \chi - 2$ | xiii. $11\chi^2 - \chi - 10$ |
| iv. $\chi^2 - \chi - 2$ | xiv. $\chi^2 + \chi - 110$ |
| v. $\chi^3 - 3\chi + 2$ | xv. $\chi^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\chi + \sqrt{6}$ |
| vi. $\chi^2 - 10\chi + 16$ | xvi. $16(\chi^2 + 7\chi)^2 - 2(\chi^2 + 7\chi) - 3$ |
| vii. $-5\chi^2 + 2\chi + 3$ | xvii. $3(\chi^2 - 3)^2 - 7(\chi^2 - 3) + 2$ |
| viii. $4\chi^4 - 5\chi^2 + 1$ | xviii. $(\alpha^2 + 2\alpha)^2 - 2(\alpha^2 + 2\alpha) - 3$ |
| ix. $\chi^2 + 3\chi\psi - 4\psi^2$ | xix. $\chi^3 - 20\chi^2 + 64\chi$ |
| x. $2\chi^2 - \chi - 1$ | xx. $3 \cdot 2^{2v} + 2^{v+2} + 1$ |

12. Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες:

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$ και την διαφορά τετραγώνων).

- $\alpha^4 + \beta^4 - 7\alpha^2\beta^2$
- $\alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2$
- $\chi^4 + 1 - 3\chi^2$
- $\chi^8 + 4\psi^8$
- $\chi^4 + 4$

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $\psi^2 + 10\psi + 21$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\chi^2 + 5\chi + 4)(\chi^2 + 5\chi + 6) - 3$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\chi + 1)(\chi + 2)(\chi + 3)(\chi + 4) - 3$.

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi - 3)(\chi - 4) + 1$
- $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi - 3)(\chi - 4) + 1 - \chi^4$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^2 - 25y^2 \quad B = 12x^2 - 3$$

$$\Gamma = 3(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2) \quad \Delta = \alpha\beta - 3\alpha + 2\beta^2 - 6\beta$$

$$E = 21 + 4\alpha - \alpha^2 \quad Z = \alpha\chi - 2\alpha\psi + 2\beta\psi - \beta\chi$$

$$H = 2\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2 \quad \Theta = \alpha^3 + 1$$

$$I = 2\beta^2 - \beta + 2\beta\alpha - \alpha \quad K = 4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(1 - x^2)$$

$$\Lambda = x^4 - x^8 \quad M = x^2y^2 + xy - y^3 - x^2y$$

$$N = (x + y)^2 - w^2 + x + y + w \quad \Xi = x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$$

$$O = x^2 + 3xy + 2y^2 + xz + yz \quad \Pi = x^3 + x^2 - 2$$

$$P = 6x^2 + 5xy + y^2 \quad \Sigma = 64x^4 + y^4$$

$$T = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \quad Y = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$

$$\Phi = x^8 - 12x^4 + 16$$

$$X = (x - xy)^2 + (x - xy)^4 - (1 - y)^4$$

$$\Psi = x^7 - x^5 - x^3 + x$$

$$\Omega = 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$$

15. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i. } \frac{a}{a^2}$$

$$\text{vi. } \frac{14\alpha}{7(\alpha+1)}$$

$$\text{ii. } \frac{ax^3}{xa^3}$$

$$\text{vii. } \frac{9x(c-9)}{36(9-c)x^3}$$

$$\text{iii. } \frac{6(t+1)}{2(t+1)^2}$$

$$\text{viii. } \frac{3 \cdot 2^{v+1}(v+1)}{6 \cdot 2^v v}$$

$$\text{iv. } \frac{\alpha\beta^2\gamma^3}{\alpha^2\beta\gamma^2}$$

$$\text{ix. } \frac{(x-1)(x+1)}{x^2-1}$$

$$\text{v. } \frac{8(\chi+1)(\chi-2)^2}{24(\chi-2)(\chi+1)^2}$$

$$\text{x. } \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

16. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

$$\text{i. } \frac{2a-8}{a^2-4a}$$

$$\text{vi. } \frac{4x^2-4x+1}{1-4x^2}$$

$$\text{ii. } \frac{x^2-1}{x^2-x}$$

$$\text{vii. } \frac{15\alpha^2-6\alpha\beta}{25\alpha^3-4\alpha\beta^2}$$

$$\text{iii. } \frac{\alpha\beta-\alpha\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$$

$$\text{viii. } \frac{\chi^5-\chi}{\chi^3-\chi^2}$$

$$\text{iv. } \frac{\chi^2\psi+\chi\psi^2}{\chi^3\psi-\chi\psi^3}$$

$$\text{ix. } \frac{2\alpha^3-2\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$$

$$\text{v. } \frac{2\chi+4}{\chi^2+4\chi+4}$$

$$\text{x. } \frac{2\chi^3+16}{2\chi^2-8}$$

17. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

$$\text{i. } \frac{2\chi+3\psi\chi+6\psi+4}{3\psi\chi+3\psi+2\chi+2}$$

$$\text{iv. } \frac{x^2+2a+x+2ax}{x^4-x^2-4a^2x^2+4a^2}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha\beta+\alpha-4\beta-4}{\alpha\beta-4\beta-\alpha+4}$$

$$\text{v. } \frac{\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta^3}$$

$$\text{iii. } \frac{\chi\psi+\chi\beta-\alpha\psi-\alpha\beta}{\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2}$$

$$\text{vi. } \frac{\chi^3+\chi-\chi^2-1}{\chi^4-1}$$

18. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

i. $\frac{3\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2}{9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2}$

ii. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 27}$

iii. $\frac{\chi^6 - \psi^6}{(\chi^2 + \psi^2)^2 - \chi^2\psi^2}$

iv. $\frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^3 - 3\chi + 2}$

v. $\frac{5\chi^2 + 5\chi + 1}{5\chi^3 - 4\chi - 1}$

vi. $\frac{\chi^4 + 4}{\chi^3 + \chi^2 - 2}$

19. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

i. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2}$

ii. $\frac{2}{\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{\alpha}$

iii. $\frac{4}{\chi^3} \cdot \frac{\chi^2}{2\psi} \cdot \frac{\chi}{\psi}$

iv. $\frac{1}{-5\alpha} \cdot \left(-\frac{3\alpha^2}{10}\right) \cdot \left(-\frac{25}{\alpha\chi}\right)$

v. $\left(-\frac{9\alpha}{\chi\psi\omega}\right) \cdot \left(\frac{\chi}{\psi^2}\right) \cdot \left(-\frac{\psi}{3\alpha}\right)^2$

vi. $\frac{7}{(\chi-2)^2} \cdot \frac{\chi-2}{14\chi} \cdot (2-\chi)$

20. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i. $\frac{\alpha}{2} : \frac{2}{\alpha}$

ii. $\left(-\frac{3\alpha^2}{\beta}\right) : \frac{9\alpha}{\beta}$

iii. $1 : \frac{\alpha}{\beta}$

iv. $\frac{\alpha}{\beta} : \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$

v. $\frac{\alpha}{\beta} : (-\alpha)$

vi. $\frac{\alpha^5}{\beta^5} : \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^6$

21. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

i. $\frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}$

ii. $\frac{\chi}{\chi-1} \cdot \frac{\chi^2 - \chi}{\chi^3}$

iii. $\frac{2\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta - 2\alpha} \cdot \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^3}$

iv. $(\alpha - 2\alpha^2) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha - 2}\right)^2$

v. $\frac{\chi + \alpha}{\beta^2 - \chi^2} \cdot \frac{\chi + \beta}{\alpha^2 - \chi^2}$

vi. $\frac{1}{\alpha^3 + \beta^3} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}$

22. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i. $(16\chi\psi + 8\chi^2 - 4\psi) : 8\chi\psi$

ii. $(\alpha - \beta) : (\alpha^2 - \beta^2)$

iii. $(2\alpha + 3\beta) : (6\alpha^2 + 13\alpha\beta + 6\beta^2)$

iv. $\frac{6}{\chi + \psi} : \frac{3\chi - 9\psi}{\chi^2 - 2\chi\psi - 3\psi^2}$

v. $\frac{\chi^3}{\chi^3 - 1} : \frac{\chi^3 + \chi^2 + \chi}{3}$

vi. $\frac{1 - 9\chi^2}{8\chi} : \frac{9\chi^2 - 6\chi + 1}{12\chi^2 - 4\chi}$

23. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{\frac{\chi - \omega}{\chi + \omega}}{(\chi - \omega)^2} \\ \text{ii. } & \frac{\frac{\chi - \omega}{\chi + \omega}}{(\chi + \omega)^2} \\ \text{iii. } & \frac{\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha}}{\alpha^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } & \frac{\frac{\chi\psi - \chi\psi^3}{4 + 4\psi}}{\frac{\chi\psi - \chi^3\psi}{6 - 6\chi}} \\ \text{v. } & \frac{\frac{\chi + 1}{\chi - 1}}{\chi + 1} : \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2 - 2\chi + 1} \end{aligned}$$

1.

Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$ είναι ακέραιος. Να βρεθεί αυτός ο ακέραιος. (Ε.Μ.Ε. 1998)

13.

Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \chi, \psi$ ισχύει: $\alpha - \chi = \psi - \beta$ και $\chi \neq \pm\psi$ να δείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \frac{\alpha + \beta}{\chi^2 - \psi^2} : \frac{1}{\chi - \psi} \text{ είναι ίση με } 1.$$