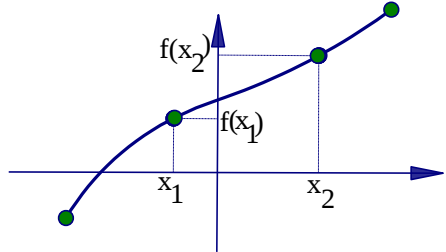
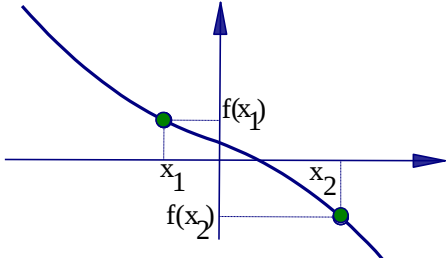
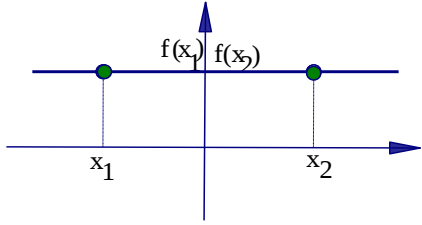


ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

ΓΕΛ ΝΕΑΣ ΑΡΤΑΚΗΣ

A. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

• Ορισμός: Η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο A όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Συμβολίζουμε $f \nearrow$ στο A <u>Σχόλιο:</u> Παρατηρούμε ότι αν $f \nearrow$ στο A τότε ο λόγος $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι θετικός (γιατί;)	 • καθώς το x αυξάνεται το $f(x)$ επίσης αυξάνεται • η γραφ. παράσταση ανεβαίνει από αριστερά προς δεξιά
• Ορισμός: Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Συμβολίζουμε $f \searrow$ στο A <u>Σχόλιο:</u> Παρατηρούμε ότι αν $f \searrow$ στο A τότε ο λόγος $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι αρνητικός (γιατί;)	 • καθώς το x αυξάνεται το $f(x)$ μειώνεται • η γραφ. παράσταση κατεβαίνει από αριστερά προς δεξιά
• Ορισμός: Η f λέγεται σταθερή στο A όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ <u>Σχόλιο:</u> Παρατηρούμε ότι αν f σταθερή στο A τότε ο λόγος $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι μηδέν (γιατί;)	

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ –ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = -2x+5$

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ
(ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ)**

Από την ανισότητα $x_1 < x_2$ και με την βοήθεια του τύπου της συνάρτησης σχηματίζουμε ανισότητα με τις τιμές $f(x_1)$ και $f(x_2)$

Ασκ. 1 , 2

2. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x-7}$

3. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [1, +\infty)$

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ
ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ $f(x_1) - f(x_2)$**

Υποθέτουμε $x_1 < x_2$, σχηματίζουμε την διαφορά $f(x_1) - f(x_2)$, την αναλύουμε σε γινόμενο και βρίσκουμε το πρόσημό της

4. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$

Απόδειξη

$A = \mathbb{R}^* \cdot$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)x_1 x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2}$$

Επειδή το πρόσημο του λόγου λ δεν προκύπτει άμεσα διακρίνουμε περιπτώσεις

• Αν $x_1 < 0$ και $x_2 < 0$ τότε $\lambda < 0$ άρα f στο $(-\infty, 0)$

• Αν $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$ τότε $\lambda < 0$ άρα f στο $(0, +\infty)$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

Σχηματίζουμε τον λόγο

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

και βρίσκουμε το πρόσημό του οπότε:

• Αν $\lambda > 0$ τότε f

• Αν $\lambda < 0$ τότε f

Β. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

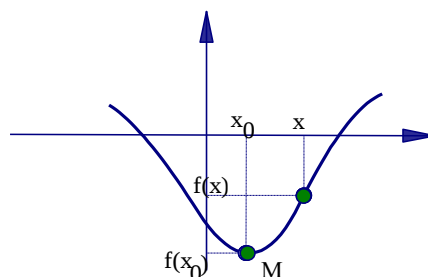
Τα ακρότατα μιας συνάρτησης είναι η μεγαλύτερη ή η μικρότερη τιμή που ενδέχεται να έχει μία συνάρτηση όταν το x διατρέχει το πεδίο ορισμού της. Η έννοια των ακροτάτων αποδίδεται με τους παρακάτω ορισμούς.

• **Ορισμός:** Η f παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$

όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Το $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστο** της f στο A

Το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι το χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης

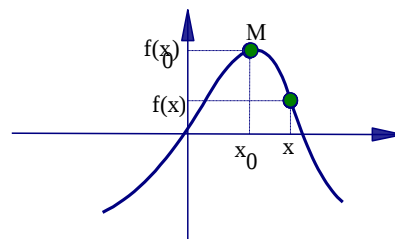


• **Ορισμός:** Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 \in A$

όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

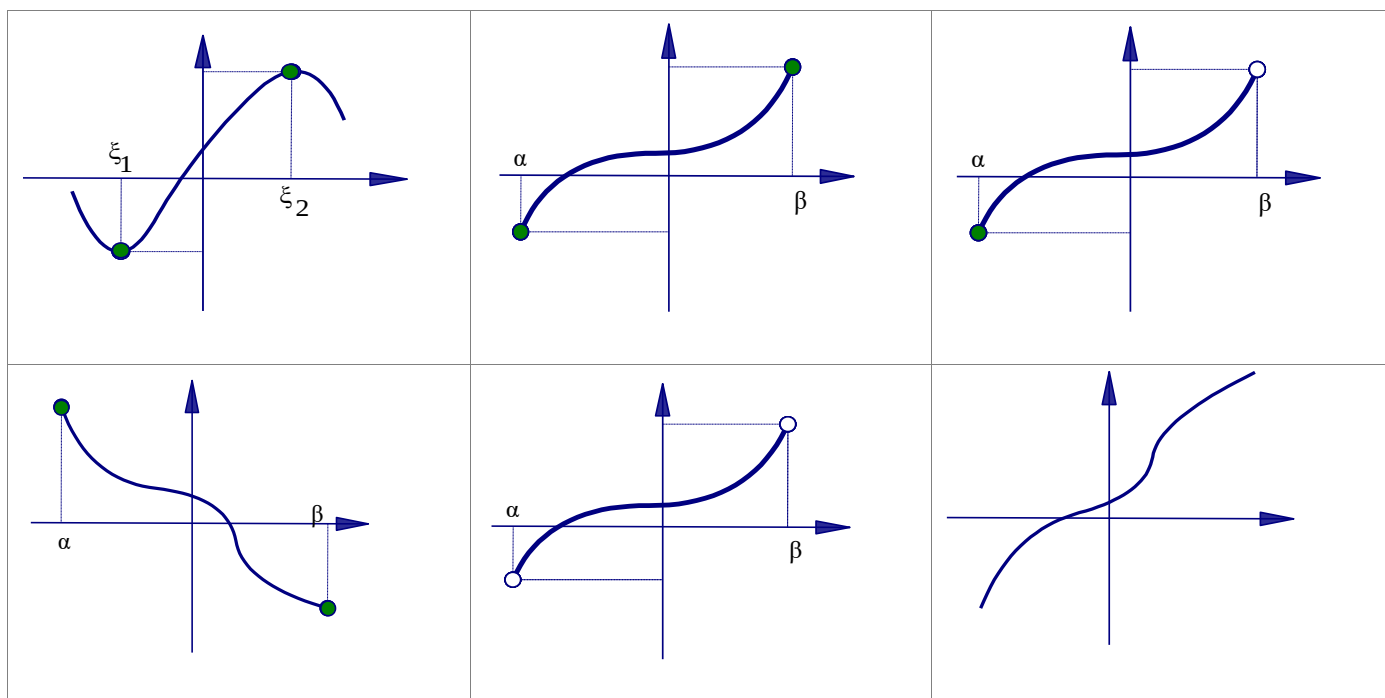
Το $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστο** της f στο A

Το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι το υψηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης



• Το μέγιστο της f και το ελάχιστο της f λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης f

Παράδειγμα: Παρατηρώντας την μορφή των παρακάτω γραφικών παραστάσεων να βρείτε τα ακρότατα (αν υπάρχουν) , και τις τετμημένες x_0 που παρουσιάζονται.



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2(3x-1)^2 - 4$

2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = -|x-2| + 3$

3. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3x-2$, $x \in [-1,4]$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ (ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ)

Παίρνουμε τυχαίο x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και με την βοήθεια του τύπου της f σχηματίζουμε ανισότητα της μορφής $f(x) \geq \theta$ ή $f(x) \leq \theta$

Ασκ. 1 , 2 , 3 , 4

4. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3x - 2$, $x \in (-1, 4)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετηθεί η μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

Απόδειξη

α) Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ Έχουμε:

$$f(x_1) - f(x_2) = \dots\dots\dots = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) \quad (\text{MONOTONIA Ασκ.3})$$

$$\text{Έπειδή } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$$

$$\text{και } \begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 < 0$$

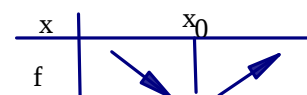
$$\text{Άρα } f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ οπότε } f \text{ } \square \text{ στο } (-\infty, 1]$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } f \text{ } \square \text{ στο } [1, +\infty) \quad (\text{MONOTONIA Ασκ.3})$$

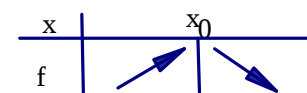
ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Μελετάμε αρχικά την μονοτονία της συνάρτησης. Μετά κατασκευάζουμε έναν πίνακα μονοτονίας από τον οποίο διαπιστώνουμε αν έχει ακρότατα ή όχι.

π.χ.



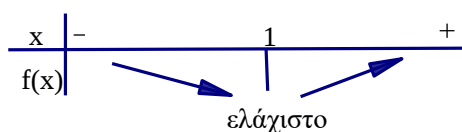
Η f έχει ελάχιστο στο x_0



Η f έχει μέγιστο στο x_0

Ασκ. 5, 6, 7, 8

β) Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας



Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ που είναι ίσο με $f(1) = -1$

6. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x}$ έχει ακρότατα

Απόδειξη

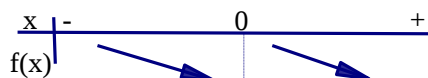
Σύμφωνα με την Ασκ. 4. μονοτονίας έχουμε

$$f \text{ } \square \text{ στο } (-\infty, 0) \text{ και } f \text{ } \square \text{ στο } (0, +\infty)$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας

Επειδή η f δεν ορίζεται στο 0 **δεν** υπάρχει η τιμή $f(0)$

Επομένως η f **δεν** έχει ακρότατα



7. Να μελετηθεί ως προς **α)** την μονοτονία και **β)** τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in (-\infty, 0] \\ 1-x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$

Απόδειξη

α) Μελετάμε τη μονοτονία για κάθε τύπο χωριστά:

•

•

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας

β) Από τον πίνακα μονοτονίας προκύπτει

8. Να εξετάσετε αν έχει ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$

Απόδειξη

Το πεδίο ορισμού είναι $A = \mathbb{R}$ Μελετάμε την μονοτονία:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ }
και αφού $x_1 < x_2$ } (+)

.....

Γ. ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μερικές φορές η γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν συμμετρία ως προς άξονα ή ως προς σημείο. Για την συμπεριφορά τους αυτή οι συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως άρτιες ή περιττές. Οι έννοιες αυτές αποδίδονται με τους εξής ορισμούς.

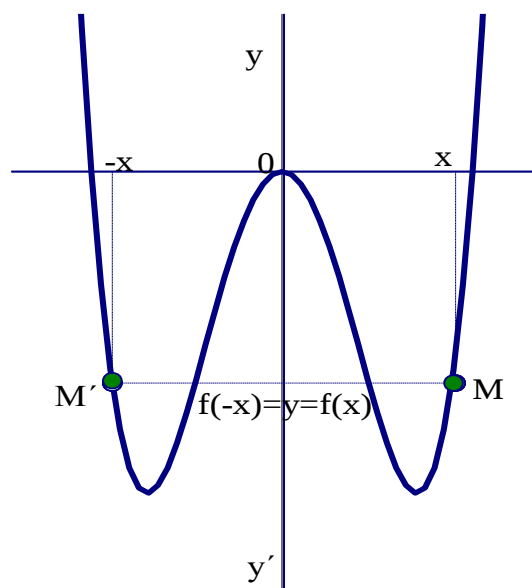
• **Ορισμός:** Η συνάρτηση f λέγεται **άρτια** στο A όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια άρτια συνάρτηση σε αντίθετες μεταβλητές έχει τις ίδιες τιμές άρα

Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$

π.χ. Τα σημεία $M(x, f(x))$, $M'(-x, f(-x))$ ανήκουν στην γραφική παράσταση και αφού $f(-x) = f(x)$ έχουν μορφή $M(x, y)$, $M'(-x, y)$, οπότε είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$



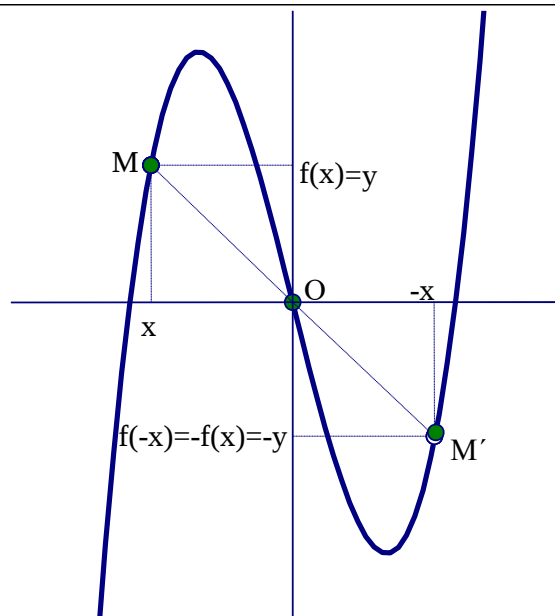
• **Ορισμός:** Η συνάρτηση f λέγεται **περιττή** στο A όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια περιττή συνάρτηση σε αντίθετες μεταβλητές έχει αντίθετες τιμές άρα

Η γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή O των αξόνων

π.χ. Τα σημεία $M(x, f(x))$, $M'(-x, f(-x))$ ανήκουν στην γραφική παράσταση και αφού $f(-x) = -f(x)$ έχουν μορφή $M(x, y)$, $M'(-x, -y)$, οπότε είναι συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων



Προσοχή! Το πεδίο ορισμού άρτιας ή περιττής συνάρτησης είναι κατ' ανάγκη **συμμετρικό σύνολο** ως προς την αρχή O του άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών . Τέτοια σύνολα είναι για παράδειγμα της μορφής:

$$(-a, a), \quad [-a, a], \quad \emptyset, \quad (-a, -\beta) \cup (\beta, a), \quad [-a, -\beta] \cup [\beta, a]$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

1. $f(x) = 3x^6 - 2x^2 + 1$

Κατ' αρχήν εξετάζουμε αν το πεδίο ορισμού A είναι συμμετρικό σύνολο.

• Αν δεν είναι συμμετρικό σύνολο , τότε η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή στο A .

• Αν είναι συμμετρικό σύνολο βρίσκουμε το $f(-x)$ για το τυχαίο $x \in A$ οπότε.....

2. $f(x) = x^3 + 2x$, $A = (-2008, 2008)$

3. $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 27}$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$5. f(x) = |x-2| + |x-2|$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -x^2, & \alpha\nu \ x < 0 \\ x^2, & \alpha\nu \ x > 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$ (συμμετρικό σύνολο)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } x < 0 \\ \text{με } f(x) = -x^2 \end{array} \right\} \text{ τότε } -x > 0 \text{ οπότε } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$
- $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } x > 0 \\ \text{με } f(x) = x^2 \end{array} \right\} \text{ τότε } -x < 0 \text{ οπότε } f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$

Ωστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ $f(-x) = -f(x)$ Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση

1. Θεωρήστε την γραφική παράσταση της f . Ζωγραφίστε τις συναρτήσεις

	$C_{f(-x)}$ 	$C_{-f(x)}$
$C_{f(x)}$ 	Η συμμετρική της C_f ως προς xx' 	$C_{-f(-x)}$

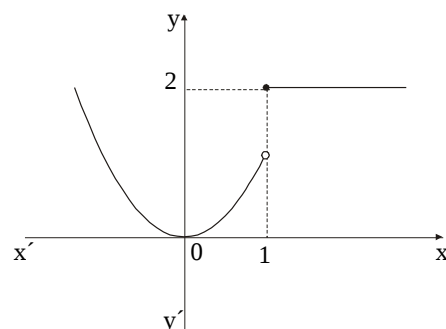
2. Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

A. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Ε. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$



Δ. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

3. Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Απαντήστε στις ερωτήσεις:

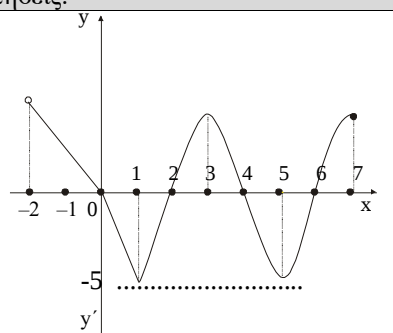
$f(x) \geq 0$

f γν. αυξουσα

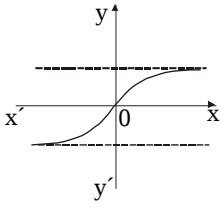
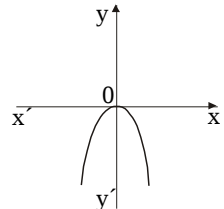
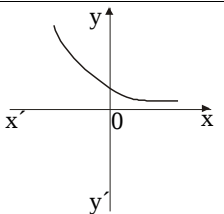
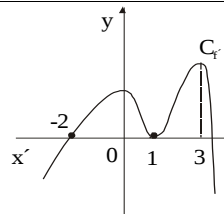
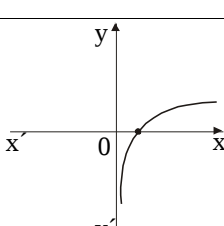
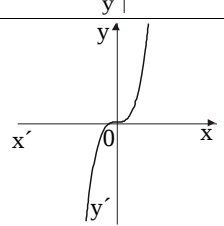
(πεδίο ορισμού)

$A_f =$

$f(x) \geq -5$

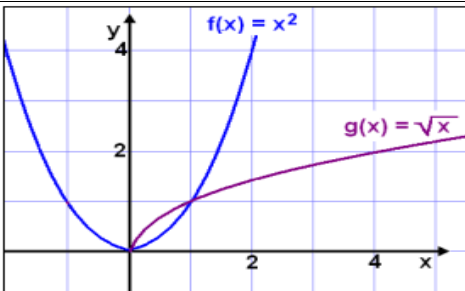


4. Απαντήστε στις ερωτήσεις

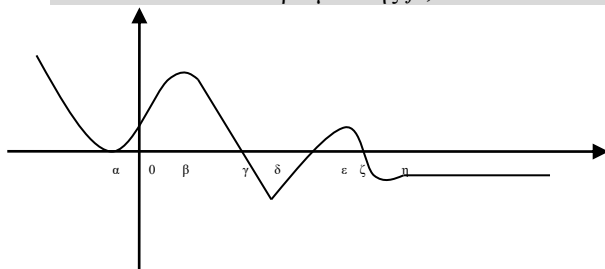
Πεδίο ορισμού		Πεδίο ορισμού	
Συνολο τιμων		Συνολο τιμων	
Πεδίο ορισμού		Πεδίο ορισμού	
Συνολο τιμων		Συνολο τιμων	
Πεδίο ορισμού		Πεδίο ορισμού	
Συνολο τιμων		Συνολο τιμων	

5. Απαντηστε στις ερωτήσεις

1. $f(x)=g(x)$
2. $f(x) < g(x)$
3. $f(x) = 4$
4. $g(x) = 2$



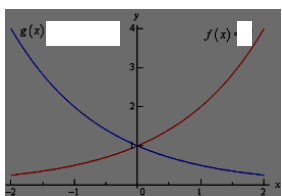
6. Απο πόσες συναρτήσεις αποτελείται η γραφική παράσταση της f ; Σε ποιά σημεία του $\mathbb{R}$ αλλάζει ο τύπος της f ; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;



7. Αν ήθελα να σχεδιάσω την γραφική παράσταση της $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, πως θα την έκανα;

8. Όμοια την $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

9. Πώς μπορεί να γραφεί η g σε σχέση με την f ;



22. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο το διάγραμμα της συνάρτησης κόβει τους άξονες.
i. $f(x) = |x-3| + |x| - 2$ ii. $f(x) = 2x + 3$ iii. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
ii. $f(x) = \sqrt{x+16}$ v. $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{2-x}$
26. Να εξεταστεί αν είναι άρτια η συνάρτηση:
a) $f: [-4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, b) $g: g(x) = x^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = \sqrt{x^6 + x^2 + 1}$, d) $f(x) = \begin{cases} x+6 & (1) \quad x \in [4, +\infty) \\ -x+6 & (2) \quad x \in (-\infty, -4] \end{cases}$
27. Να εξετάσετε αν είναι περιττή η συνάρτηση
a) $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x(3-x)(x+3)$
c) $f(x) = \frac{x(x^2 - 25)}{x^2 + 25}$
28. Δείξτε ότι η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 3x+5, & (1) \quad x \leq 0 \\ -3x+5, & (2) \quad x > 0 \end{cases}$$
 είναι άρτια.
29. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης:
i. $f(x) = -3x^3 + 4$ ii. $f(x) = 3x^3 + 4$
30. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:
i. $f(x) = -3x^2 + 1$ ii. $f(x) = 3x^2 - 1$ iii. $f(x) = \frac{2}{x}$
31. Να μελετηθεί η μονοτονία της κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:
i. $f(x) = \sqrt{x+4}$ ii. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$
32. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση:
$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$
33. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης
$$f(x) = 2 - \frac{5}{x^2}$$
34. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης
$$f: f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 2 \\ x+4, & x > 2 \end{cases}$$
35. Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης
$$f: f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 3 \\ x-3, & x > 3 \end{cases}$$
37. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης:
$$f(x) = |2x| + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$
38. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης
i. $f(x) = |x-4|$ ii. $f(x) = x^8 + x^4 - 12$
39. Να εξεταστεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση:

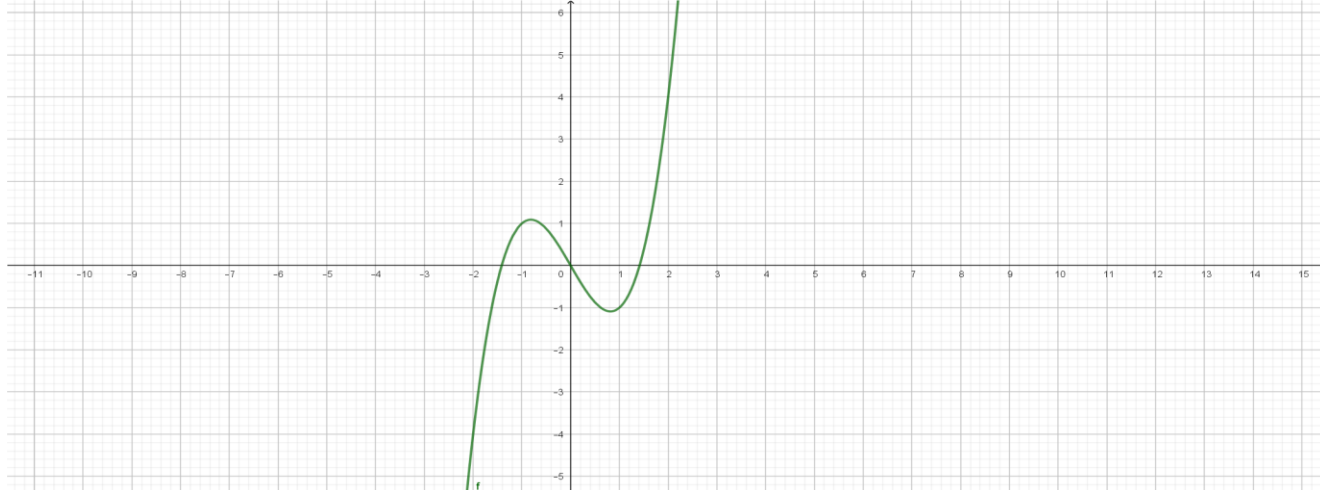
i. $f(x) = 2x + 3$ ii. $f(x) = 6x^2$ iii. $f(x) = -\frac{2}{x}$ iv. $f: [1, 5]$, $f(x) = \frac{2}{x}$

40. Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση:

i. $f(x) = 4 - \sqrt{2-x}$ ii. $f(x) = |x-2| + 1$ iii. $f(x) = x^2 - 4x + 12$

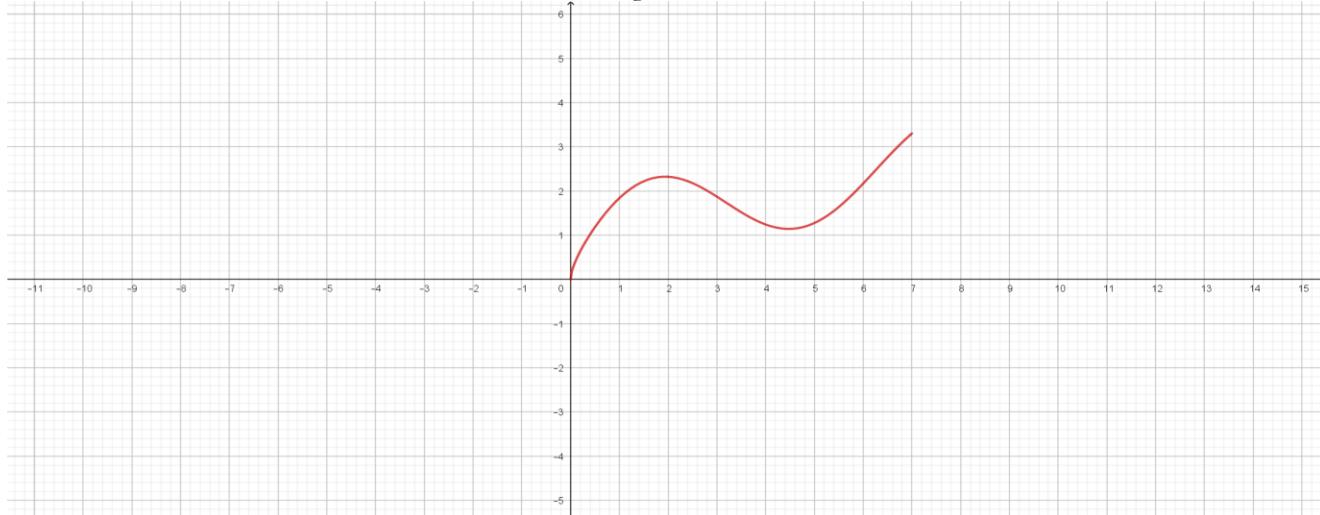
41. Δίνεται το γράφημα της συνάρτησης f

Να χαράξετε επί του σχήματος τις συναρτήσεις $g(x) = f(x)-1$, $h(x) = f(x+2)$, $t(x) = f(x-1)$



42. Δίνεται το γράφημα της συνάρτησης f

Να χαράξετε επί του σχήματος τις συναρτήσεις $g(x) = f(x)+1$, $h(x) = f(x-2)$, $t(x) = f(x+1)$



43. Δίνεται το γράφημα της συνάρτησης f

Να χαράξετε επί του σχήματος τις συναρτήσεις $g(x) = f(x)-21$, $h(x) = f(x-3)$, $t(x) = f(x+1)$

