

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x . (το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f). Το σύνολο Β λέγεται σύνολο τιμών της f και περιέχει όλες τις τιμές της $f(x)$ για τα αντίστοιχα $x \in A$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$
- ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$
- iii. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$
- iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6 - x}$
- v. $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3} + \sqrt{x - 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$
- vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
- viii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{\sqrt{5 - |x|}} + \frac{|x - 1| - 5}{x^3 + 27}$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
- ii. Πρέπει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
- iv. Πρέπει : $6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$

v. Πρέπει : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$

vi. Πρέπει : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2]$. Άρα $D_f = [1, 2]$

vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1 - x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

viii. Πρέπει

• $x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ καθώς :

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	+	0	-	0	+

• $5 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

• $x^3 + 27 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq -27 \Leftrightarrow x \neq -3$

Τελικά : $D_f = (-5, -3) \cup [2, 5)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$ ii) $f(x) = \frac{x - x^2}{12 + 3x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2 - 7}{2x - 8}$ iv) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

v) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{14 - 2x}$ vi) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ vii) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5}$ ii) $f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4}$ iii) $f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{5}{2}$

iv) $f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5}$ v) $f(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|}$ vi) $f(x) = \frac{2x+7}{5+|1-3x|}$ vii) $f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

4. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{x+3}{x^3+8}$ ii) $f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x}$ iii) $g(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

iv) $g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$ v) $h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$ vi) $h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$

iii) $g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$

iv) $g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$

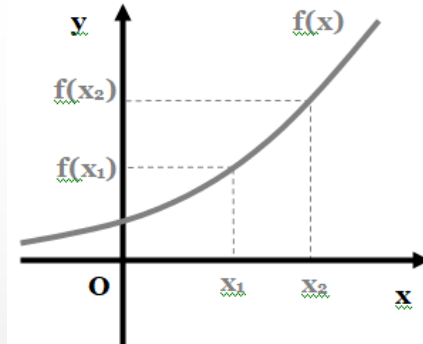
v) $h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$

vii) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

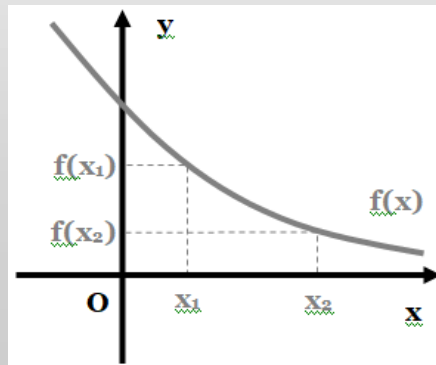
➤ Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$

(Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$)



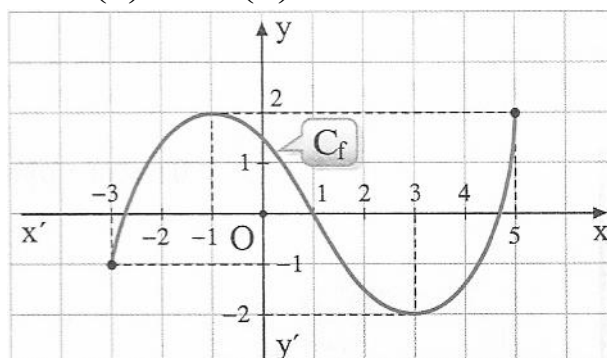
➤ Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$

(Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2Α : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ****ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

6. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς :

i) $f(\pi)$ και $f(4)$ ii) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$



Λύση :

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, 5]$

i) $\pi, 4 \in [3, 5]$ όπου η $f \uparrow [3, 5]$, έτσι : $\pi < 4 \Rightarrow f(\pi) < f(4)$

ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \in [-1, 3]$ όπου η $f \downarrow [-1, 3]$, έτσι : $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2B : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n$
(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n < \beta^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \alpha^n > \beta^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$)
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$
- Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7. Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 4x - 7$ ii. $f(x) = -4x - 7$ iii. $f(x) = \sqrt{1-x}$ iv. $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1$.

Λύση :

i. $f(x) = 4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 7 < 4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = -4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow -4x_1 - 7 > -4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

(Γενικά γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha < 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha = 0$ η $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$)

iii. Πρέπει : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

iv. $D_f = (-\infty, 1]$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow[\substack{x_1 - 1 \leq 0, \& \\ x_2 - 1 \leq 0}]{\text{Επειδή, } x \leq 1} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow$ (Όταν υψώνω στο τετράγωνο

αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 3 + 5x$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- $f(x) = x^2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 + 2x + 1$
- $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}$

9. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$
- $f(x) = x^3 - \sqrt{3 - 2x}$

- iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- iv. $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$
- v. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- vi. $f(x) = 1 - 2x^3 - 3x$
- vii. $f(x) = x^3 - \sqrt{2 - x} + 5x$

10. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση :

- i. $f(x) = (2\lambda - 8)x + 3$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. $f(x) = (6 - 3\lambda)x - 25$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii. $f(x) = (7 - |3 - 2\lambda|)x - 9$ είναι γνησίως αύξουσα.
- iv. $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x + 72$ είναι γνησίως αύξουσα.
- v. $f(x) = (-2\lambda^2 + 6\lambda - 9)x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda - 15)x - 2018$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = (|2\lambda - 1| - |\lambda + 2|)x + 2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

13. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty, 1)$

14. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + 3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

15. Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x + 3)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - \sqrt{x} + \frac{\alpha + 6}{x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4, -33)$ να δείξετε ότι $\alpha = -2$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- 2) θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
- 3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
- 4) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x} = x^3 + 2$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x} - x^3 - 2 = 0$, έστω $f(x) = \sqrt{10-x} - x^3 - 2$. Πρέπει $10-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$, δηλ. $D_f = (-\infty, 10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση $\sqrt{10-x} - x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω : $\sqrt{10-1} - 1^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 10]$, με : $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 10-x_1 > 10-x_2 \Rightarrow \sqrt{10-x_1} > \sqrt{10-x_2}$

(1) Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 - 2 > -x_2^3 - 2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1} - x_1^3 - 2 > \sqrt{10-x_2} - x_2^3 - 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 10]$, άρα η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

18. Να λυθεί η εξίσωση : $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $M(6,1)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = -6$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} - 1$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) + f(4) = 12$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 12$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- 2) θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$
- 3) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
- 4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\rho)$
- 5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 + \sqrt{x} < 2$.

Λύση : Έχω : $x^3 + \sqrt{x} - 2 < 0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Έστω $h(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$, με $A_h = [0, +\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x) < 0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1) = 0$ άρα η $x = 1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x) < h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1, x_2 \in A_h$ με :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} - 2 < \sqrt{x_2} - 2 \quad (3)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2), (3) και (4) και έχω :

$$x_1^3 + \sqrt{x_1} - 2 < x_2^3 + \sqrt{x_2} - 2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η $h \uparrow$ για κάθε $x \in A_h = [0, +\infty)$, οπότε $h(x) < h(1) \Leftrightarrow x < 1$ δηλ. $x \in [0, 1)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$.

Λύση: Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2x^2 - x + 3 < 3x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$. Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$.

24. Αν η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση : $2(x^2 - 3x + 2) > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}$.

Λύση:

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 3x + 2) > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 > \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 1} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{x^4 + 1} > 6x - 4 + \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} &\Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{x^4 + 1} > 2(3x - 2) + \sqrt{(3x - 2)^2 + 1} \\ \Leftrightarrow f(x^2) > f(3x - 2) &\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 > 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

25. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(2, 3)$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3$.

Λύση:

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$, άρα ισχύει $f(-1) = 6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$, άρα ισχύει $f(2) = 3$. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ τότε $-1 < 2 \Rightarrow x_1 < x_2$. Επίσης $f(-1) = 6 \Leftrightarrow f(x_1) = 6$ και $f(2) = 3 \Leftrightarrow f(x_2) = 3$.

Έχουμε δηλ. $x_1 < x_2$ με $f(x_1) > f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

- $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3 \stackrel{f(2)=3}{\Leftrightarrow} f(f(x^2 - 17) - 4) < f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) - 4 > 2 \Leftrightarrow f(x^2 - 17) > 6 \stackrel{f(-1)=6}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) > f(-1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 17 < -1 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\bullet \quad x < x+3 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x+3) \quad (1)$$

$$\bullet \quad x+5 < x+7 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x+5) > f(x+7) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x} + x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5} - \sqrt{3|x|+1} < 2|x| - 4$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + x$.

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να λυθεί η ανίσωση : $(x^2 - 3)^3 - (2x + 1)^3 < \frac{-x^2 + 2x + 4}{3}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -2x^3 - 3x + 5$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4) < f(3x)$ β) $f(|x|) > 0$ γ) $f(x^2 - 5) - f(3 - 2x) > 0$.

31. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθούν οι ανισώσεις :

- $f(2x+3) < f(4x-1)$
- $f(x^2 - 2x) < f(x-2)$

32. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008) < f(2004)$.

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x) \leq f(x^2+x)$.

33. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007) < f(2000)$.

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2) \geq f(x^2)$.

34. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1) < 2$,

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

35. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

- $f(x) + f(5x) < f(3x) + f(6x)$, για κάθε $x > 0$
- $f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^5)$, για κάθε $x \in (0,1)$.

36. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(\alpha^2+1) \leq f(2\alpha)$.

37. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(3,5)

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση: $f(|x| - 3) \geq 2$

38. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(-2,7).

- Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$.

39. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^{2019} + 2x^{2017} + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) < 6$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(13) - f(12) < f(14) - f(11)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία M(-2,5) και N(-4,3).

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να δείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = -1$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x) = 2 - \frac{3}{x + 1}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta = (-1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι: $f(3) - f(2) < f(4) - f(1)$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο** όταν: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν: $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$.

Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

➤ Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο

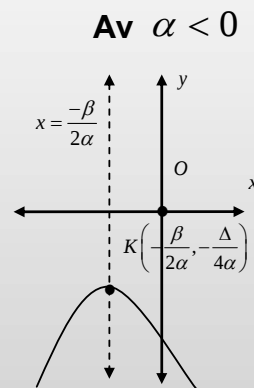
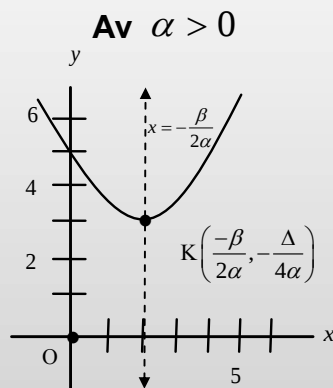
$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right).$$

- Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο**

$$\text{στο } x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ το } f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

- Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ το } f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$



➤ Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ

- αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
- αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

➤ Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq M$ ή $m \leq f(x) \leq M$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το "=" λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = M$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**41.** (Άσκηση 3 σελ. 38 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$
 ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 10$ Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
 Για να παρουσιάζει η $f(x)$ ελάχιστο για $x = 3$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(3)$ για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$. Έχω :

$$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 9 - 18 + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$
- ii. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$
 Για να παρουσιάζει η $f(x)$ μέγιστο για $x = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$. Έχω :

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \stackrel{x^2 + 1 > 0}{\Leftrightarrow} 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

42. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 2x^4 + 1$
 ii. $f(x) = -2x^4 + 1$
 iii. $f(x) = (x - 3)^2 - 5$
 iv. $f(x) = x^2 - 4x + 7$
 v. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
 vi. $f(x) = 5 - 4|x - 1|$
 vii. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}}$
 viii. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$
 ix. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
 x. $f(x) = 3 - 5x, x \in [-2, 5]$

Λύση :

- i. $f(x) = 2x^4 + 1$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.
 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^4 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ (1)
 Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^4 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, δηλ. $f(0) = 1$
 άρα η (1) γίνεται $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$.
 Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.

ii. $f(x) = -2x^4 + 1$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^4 \leq 0 \Leftrightarrow -2x^4 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 1 \Leftrightarrow -2x^4 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, δηλ. $f(0) = 1$

άρα η (1) γίνεται $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0)$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.

iii. $f(x) = (x-3)^2 - 5$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 5 \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq -5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -5 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 5 = -5 \Leftrightarrow x = 3$, δηλ. $f(3) = -5$

άρα η (1) γίνεται $f(x) \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq f(3)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$ το $f(3) = -5$.

iv. $f(x) = x^2 - 4x + 7$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha = 1 > 0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2} = 2$

το $f(x_0) = f(2) = 3$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

v. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha = -1 < 0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$

το $f(x_0) = f(1) = 4$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 4$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

vi. $f(x) = 5 - 4|x-1|$, είναι $A_f = \mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -4|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 5 \Leftrightarrow 5 - 4|x-1| = 5 \Leftrightarrow -4|x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλ. $f(1) = 5$

άρα η (1) γίνεται $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 5$.

vii. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}}$, πρέπει

- $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$

- $2 + \sqrt{4-x} \neq 0$, που ισχύει άρα,

είναι $A_f = (-\infty, 4]$. Έχουμε για κάθε $x \in (-\infty, 4]$ έχουμε

$$\sqrt{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}} \geq -\frac{10}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq -5$$
 (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -5 \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4-x}} = -5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$, δηλ.

$f(4) = -5$ άρα η (1) γίνεται $f(x) \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 4$ το $f(4) = -5$.

viii. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow f(x) = (|x| - 1)^2 + 2$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $(|x| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$,

δηλ. $f(1) = 2$ και $f(-1) = 2$ άρα η (1) γίνεται :

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow (f(x) \geq f(1) \text{ και } f(x) \geq f(-1)).$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ το $f(-1) = f(1) = 2$.

ix. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$, είναι $A_f = (-\infty, 2]$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow (-\infty, 2]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = \sqrt{4 - 2 \cdot 2} = 0$ δηλ. για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

x. $f(x) = 3 - 5x$, είναι $A_f = [-2, 5)$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow [-2, 5)$ άρα η f παρουσιάζει :

- Μέγιστο στο $x_0 = -2$ το $f(-2) = 3 - 5 \cdot (-2) = 13$ δηλ. για κάθε $x \in [-2, 5)$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(-2) \Leftrightarrow f(x) \leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

43. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Αν για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
- Αν $A = (\alpha, \beta)$, $x_0 \in A$, η f είναι γν. φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$, και γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το $f(x_0)$.
- Αν $A = [\alpha, \beta]$ και η f είναι γν. φθίνουσα, τότε η f έχει μέγιστο το $f(\alpha)$ και ελάχιστο το $f(\beta)$.
- Αν $f(A) = [κ, λ)$, τότε η μέγιστη τιμή της f είναι το $κ$.
- Αν $A = (\alpha, +\infty)$ και η f είναι γν. μονότονη, τότε η f έχει ολικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

44. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

45. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1 = 1$ και ελάχιστο για $x_2 = -1$.

46. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x - 2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

47. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

48. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^3 + 3$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

49. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 1.

50. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^6 + 5$
- ii. $f(x) = 3|x-1| - 2$
- iii. $f(x) = 2 - 3|x-1|$
- iv. $f(x) = 5 - (x+2)^4$
- v. $f(x) = 7 - \frac{4}{|x+3| + 2}$
- vi. $f(x) = \sqrt{6-2x} - 3x$
- vii. $f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}$
- viii. $f(x) = -x^2 + 4|x| - 1$
- ix. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

51. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$
- ii. $f(x) = -3x^2 + 18x - 5$
- iii. $f(x) = x^2 + 6x$
- iv. $f(x) = -x^2 + 2x$

52. Να βρείτε :

- i. το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$.
- ii. το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_g = (-\infty, 0)$.

(Υπόδειξη : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις

- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για $\alpha > 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $\alpha = 1$
- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ για $\alpha < 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $\alpha = -1$)

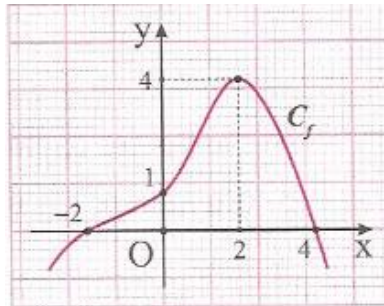
53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .
- iv. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

54. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 4$ και $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

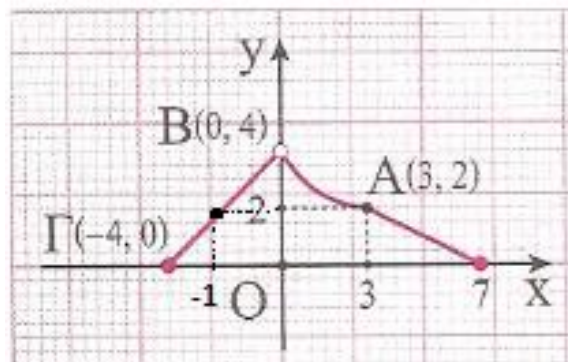
- Να βρείτε το ελάχιστο της f .
- Να βρείτε το μέγιστο της g .
- Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $7f(\alpha) - 5g(\beta) \geq 20$

55. Για τη συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος, να βρείτε :



- τα ακρότατα
- τα διαστήματα μονοτονίας
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- την τιμή $f(0)$
- Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(3)$ και $f(\pi)$

56. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :



- να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ.
- να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.
- να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 2$.
- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει το πεδίο ορισμού της να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. να ισχύει $x, -x \in A$ για κάθε $x \in A$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

57. (Άσκηση 4 σελ. 38 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

i. $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii. $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii. $f_3(x) = |x + 1|$
 iv. $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v. $f_5(x) = \frac{x^2}{1+x}$ vi. $f_6(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Λύση :

- i. $D_{f_1} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_1}$ είναι και $-x \in D_{f_1}$. Επίσης :
 $f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x)$ για κάθε $x \in D_{f_1}$. Άρα η f είναι άρτια.
- ii. $D_{f_2} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_2}$ είναι και $-x \in D_{f_2}$. Επίσης :
 $f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x)$ για κάθε $x \in D_{f_1}$. Άρα η f είναι άρτια.
- iii. $D_{f_3} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_3}$ είναι και $-x \in D_{f_3}$. Επίσης :
 $f_3(-x) = |-x + 1| = |-(x - 1)| = |x - 1|$ δεν βγαίνει ούτε $f(x)$ ούτε $-f(x)$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- iv. $D_{f_4} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_4}$ είναι και $-x \in D_{f_4}$. Επίσης :
 $f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -x^3 + 3x^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)$ για κάθε $x \in D_{f_4}$. Άρα η f είναι περιττή.
- v. Πρέπει $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $D_{f_5} = \mathbb{R} - \{-1\}$, για κάθε $x \in D_{f_5}$ δεν είναι και $-x \in D_{f_5}$ καθώς αν $x = 1 \in D_{f_5}$, το $x = -1 \notin D_{f_5}$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή καθώς το πεδίο ορισμού της δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0.
- vi. Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_{f_6} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_6}$ είναι και $-x \in D_{f_6}$. Επίσης : $f_6(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f_6(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

58. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

- Αν η f είναι άρτια, τότε για κάθε $x \in A$, είναι $f(-x) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x \in A$, είναι $f(-x) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή και $0 \in A$, τότε $f(0) = \dots\dots\dots$
- Αν η f είναι άρτια, τότε η C_f έχει $\dots\dots\dots$ συμμετρίας $\dots\dots\dots$
- Αν η f είναι περιττή, τότε η C_f έχει $\dots\dots\dots$ συμμετρίας $\dots\dots\dots$

59. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

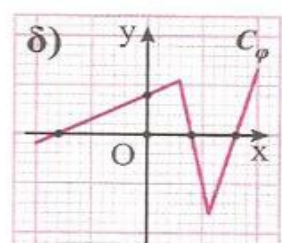
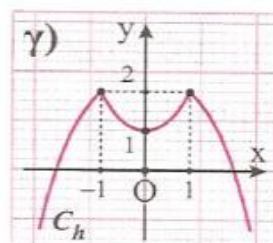
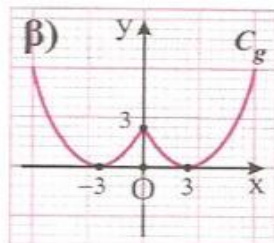
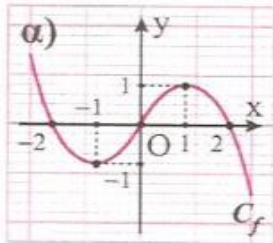
- Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε $f(x) + f(-x) = 0$, για κάθε $x \in A$.
- Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει, $f(x) - f(-x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι άρτια.
- Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, τότε είναι περιττή.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f δεν είναι άρτια.

60. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- Η συνάρτηση $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι άρτια.
- Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι περιττή.
- Αν μια συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε $\alpha + \beta = 0$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

61. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



62. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

- $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$
- $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 2x$
- $f(x) = |2x - 1| - |2x + 1|$
- $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{x}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

64. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι άρτιες ούτε περιττές.

- $f : (-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $f(x) = x^2 + x$

65. Δίνεται η περιττή συνάρτηση : $f(x) = \alpha x^2 + (\alpha - 2)x^3 + (\alpha - 1)x$.

- i. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 3$.
- iv. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία $A(-\kappa, \lambda)$ και $B(\kappa, 36 - 3\lambda)$ να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- iii. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

68. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + \alpha|x|}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$.

- i. Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 \leq \frac{f(999)}{f(-999)}x$.

66. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x) + c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα πάνω.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα κάτω.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

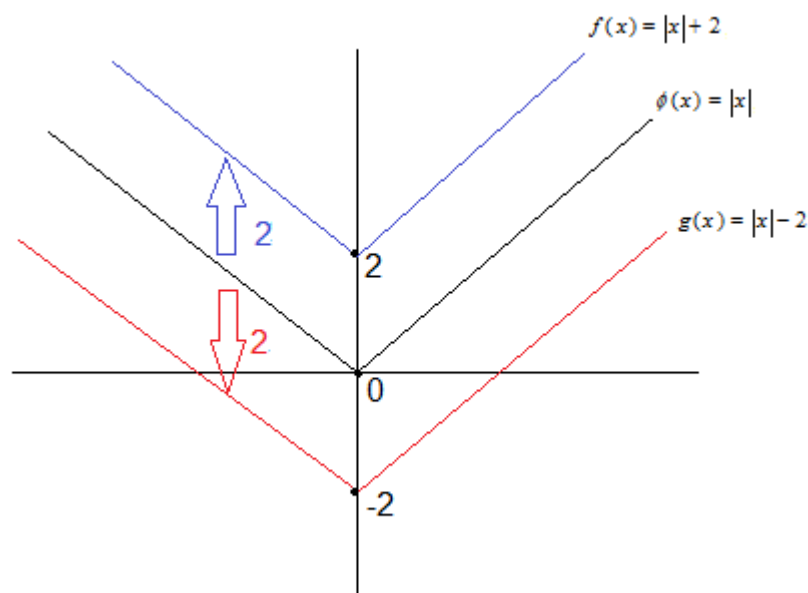
1. (Άσκηση 1 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad f(x) = |x| + 2, \quad g(x) = |x| - 2$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |x| - 2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x - c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = \phi(x + c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

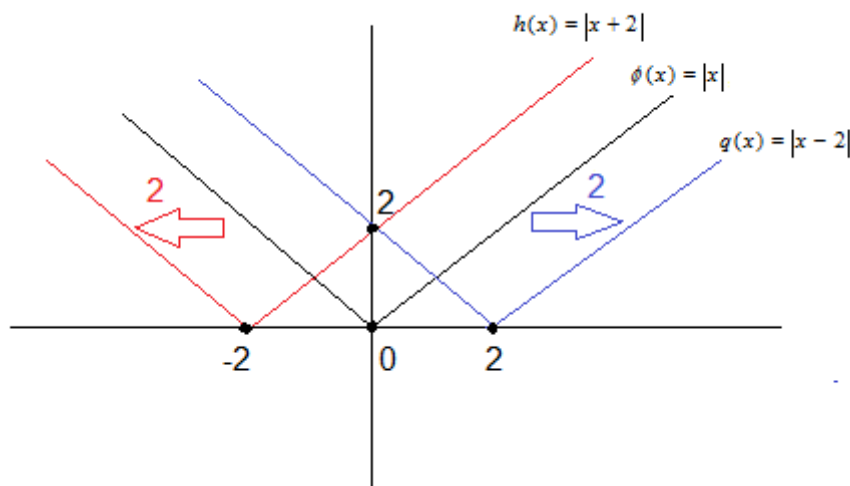
2. (Άσκηση 2 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad h(x) = |x + 2|, \quad q(x) = |x - 2|$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x) = |x - 2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

- Αν έχω $f(x) = \phi(x - c) + \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x - c) - \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες κάτω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x + c) + \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x) = \phi(x + c) - \kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της ϕ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες κάτω

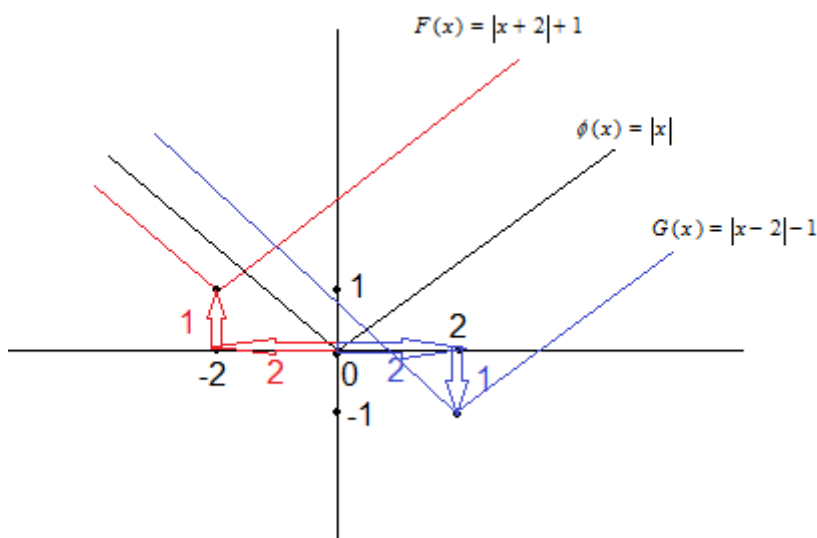
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**3. (Άσκηση 3 σελ. 45 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)**

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad F(x) = |x + 2| + 1, \quad G(x) = |x - 2| - 1$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = |x + 2| + 1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x) = |x - 2| - 1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x|+3$$

$$h(x)=|x|-3$$

5. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x-2|$$

$$h(x)=|x+3|$$

6. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|$$

$$f(x)=|x-2|+1$$

$$g(x)=|x+3|-2$$

7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=|x-1|+2$$

$$h(x)=|x+3|-4$$

$$\varphi(x)=-|x-1|+3$$

8. Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση f ώστε να προκύψει η συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $g(x) = f(x-1) + 2$ ii. $g(x) = f(x+2) + 3$ iii. $g(x) = f(x+3) - 5$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαφορετικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

- i. κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω
- ii. κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
- iii. κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω
- iv. κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 5 μονάδα προς τα κάτω

10. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|-1 & x \in [-4, -1) \\ x^2 - 1 & x \in [-1, 2] \\ \frac{6}{x} & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

- i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- iii. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

11. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=|x|-1$ και $g(x)=1-|x|$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .

12. i. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=|x+1|$

ii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=|x+1|$$

iii. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x-2| < |x+1|$ και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

13. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_φ :

- i. κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά,
- ii. κατά 3 μονάδες προς τα κάτω,
- iii. διαδοχικά κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω,
- iv. διαδοχικά κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 7 μονάδες προς τα κάτω.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 2^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 1 14971**

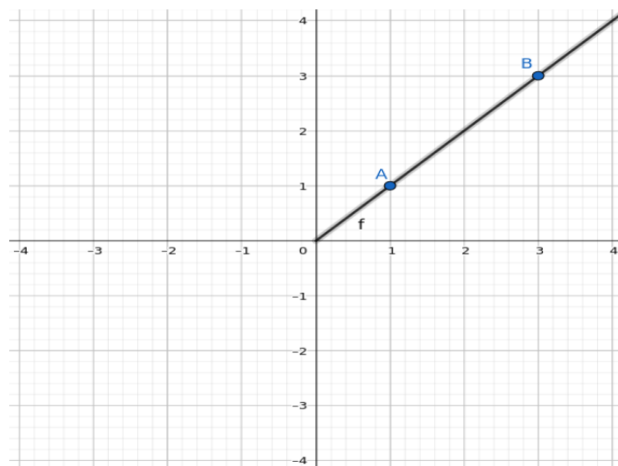
Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μια συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

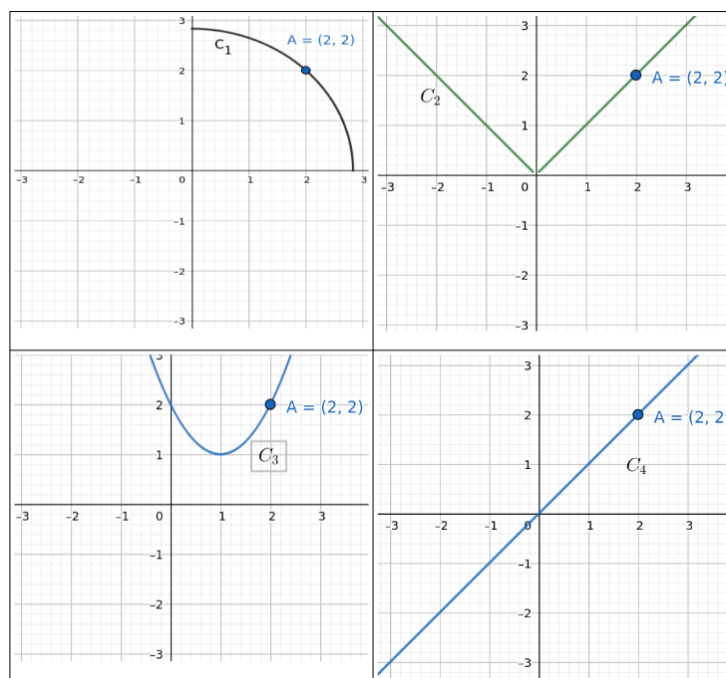
- i) είναι σταθερή συνάρτηση ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A , B και είναι περιττή. (Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 2 14976**

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα

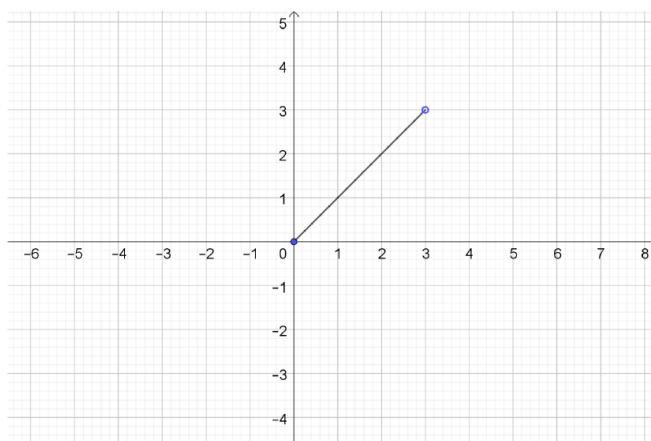


- α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μια είναι άρτια και τουλάχιστον μια είναι περιττή. (Μονάδες 12)
- β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, \kappa)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 15017

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

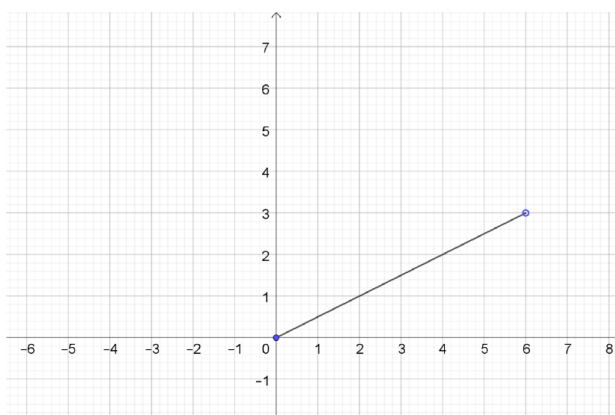
- α) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)
- γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4 15018

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

- α) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 8)
- γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 5 15019

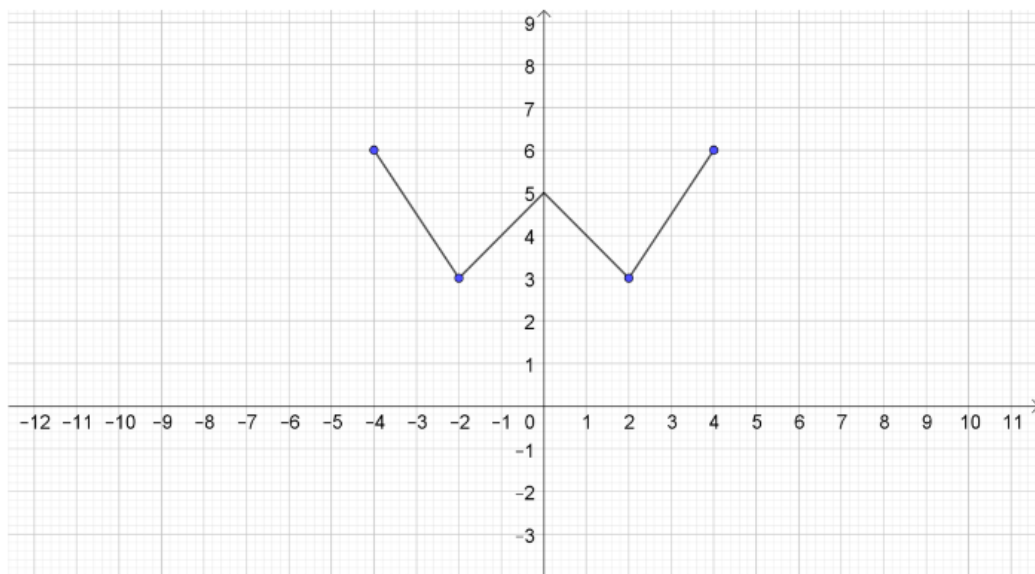
Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

- α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια. (Μονάδες 8)
 β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)
 γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6 15024

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4, 4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

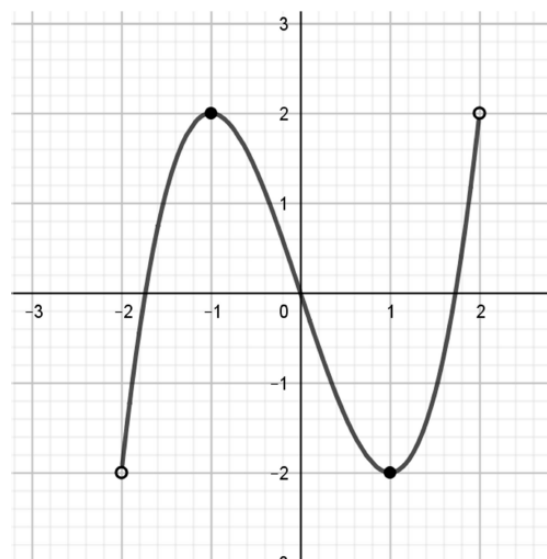
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 7 15112

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(-2, 2)$.

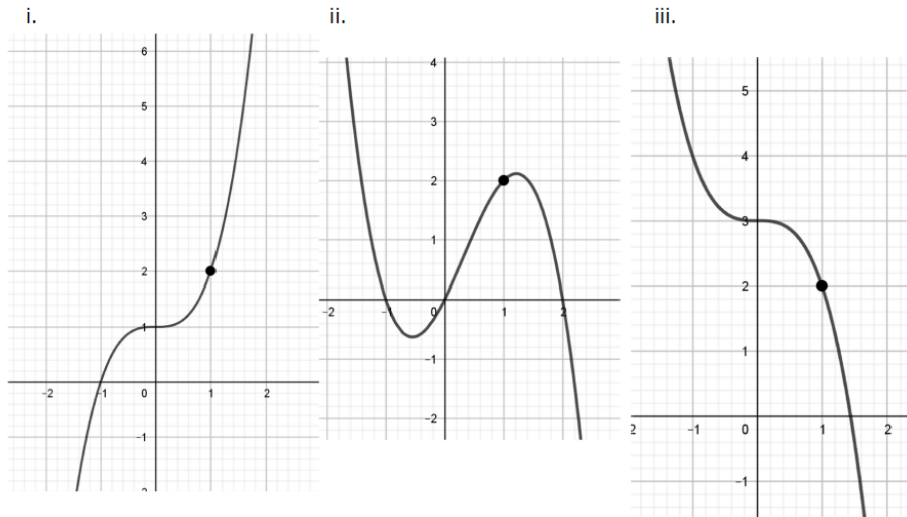
- α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 8 15114

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

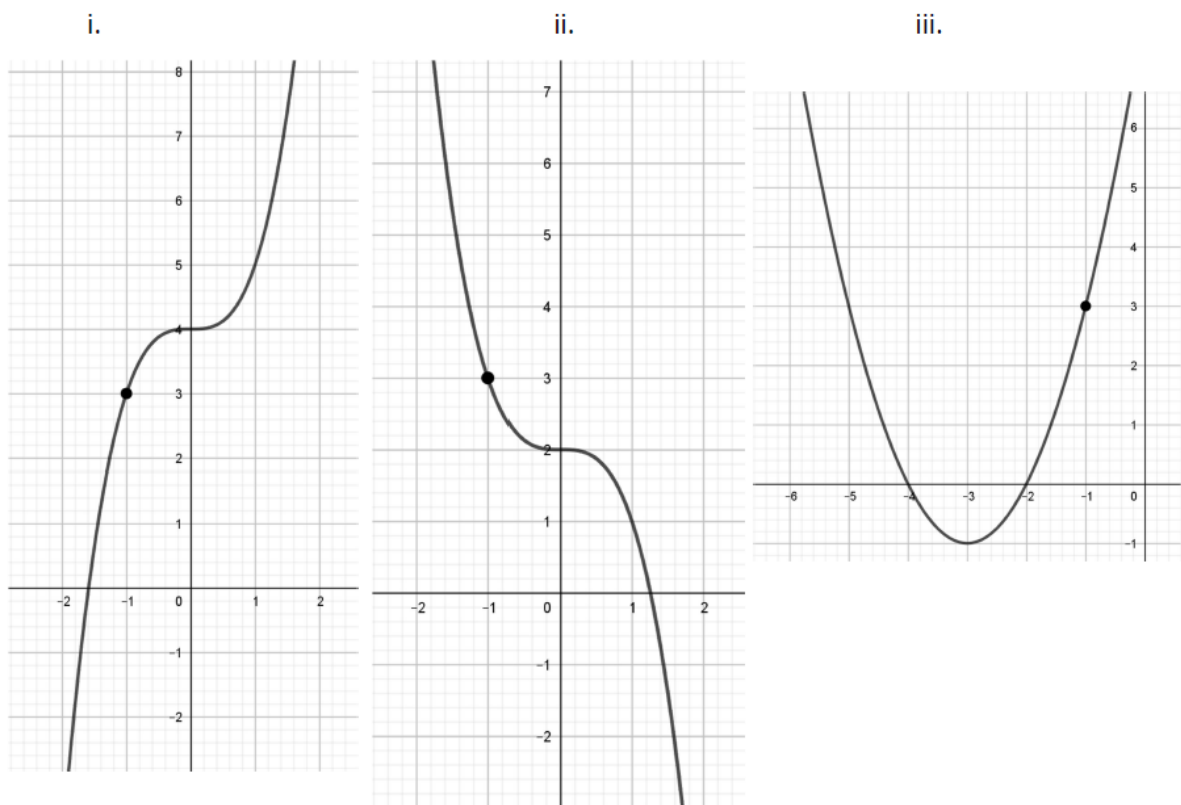
- α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 9 15115

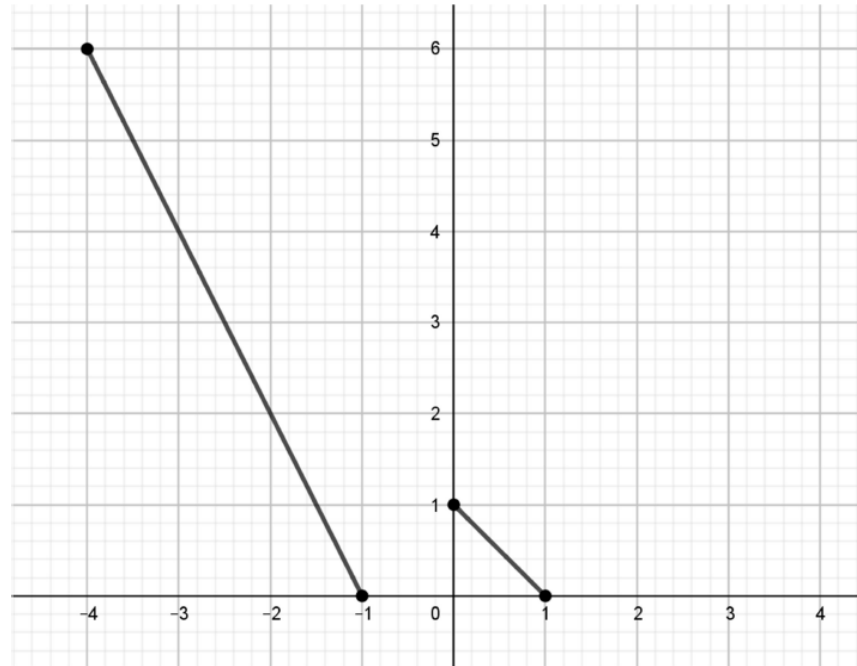
Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

- α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 10 15116

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίου ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.



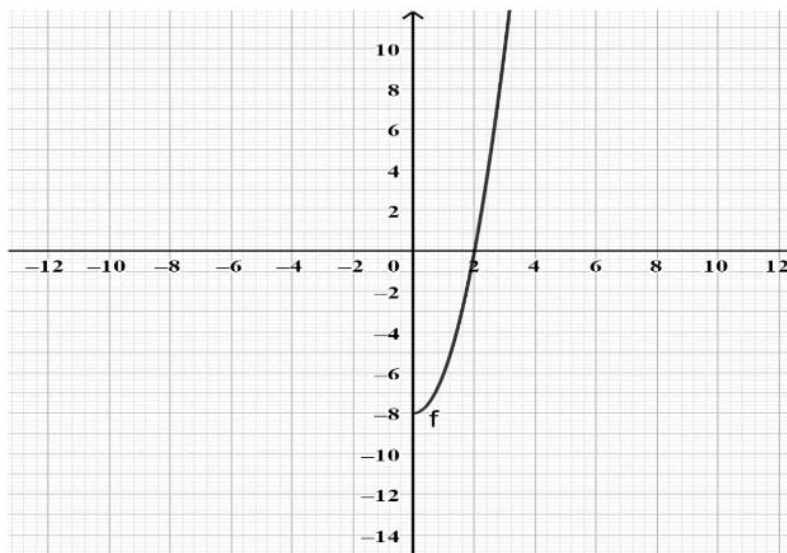
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 11 15372



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

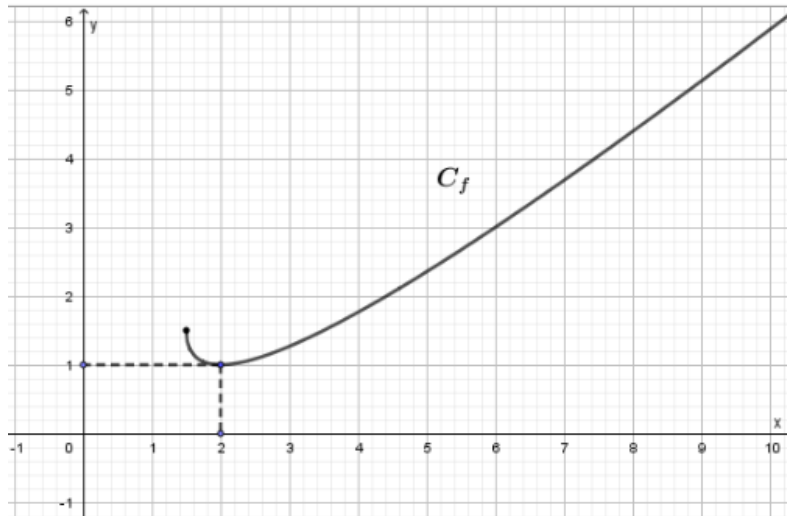
β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12 15437

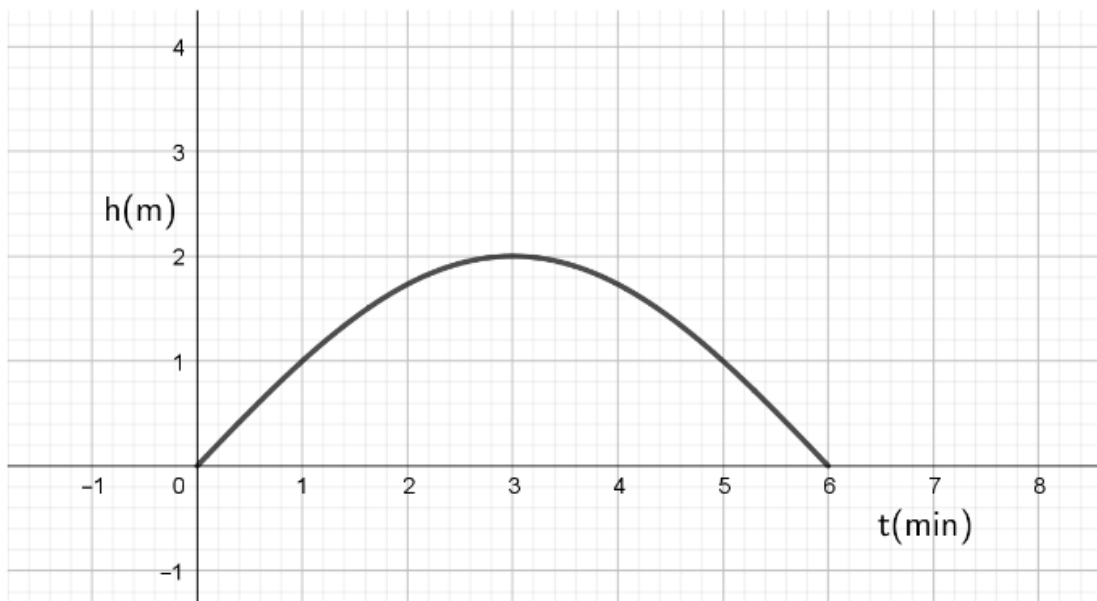
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 7)
- β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι
- I. γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 5)
 - II. γνησίως αύξουσα (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 13 15645

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:

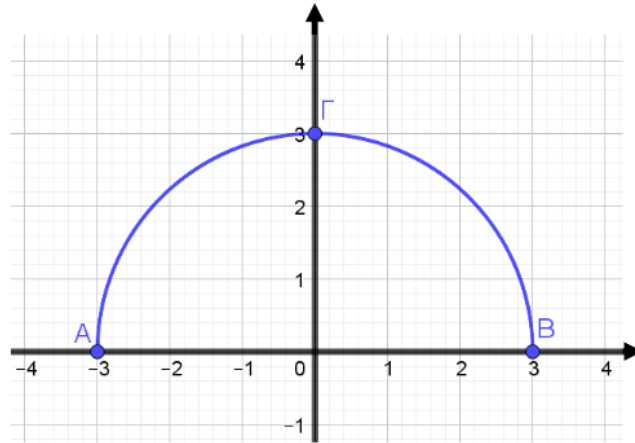


- α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. (Μονάδες 5)
- β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. (Μονάδες 10)
- γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14 16129

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 6)
 β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4^ο

ΘΕΜΑ 15 15022

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$. (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. (Μονάδες 6)
 δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωτό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

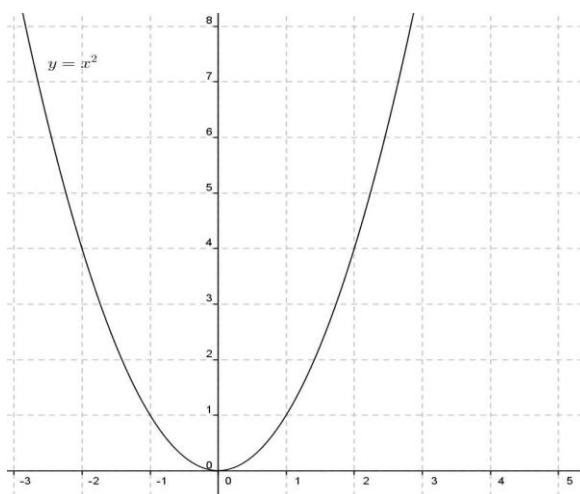
α. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ δ. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

(Μονάδες 6)

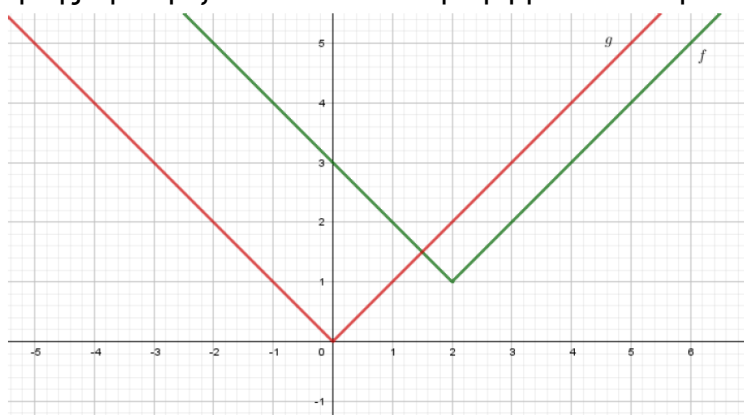
2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ**ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 16 14230**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ (Μονάδες 10)
- β) Να αναφέρετε τις μετατοπίσεις της $y = x^2$ ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί. (Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑ 17 14325**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

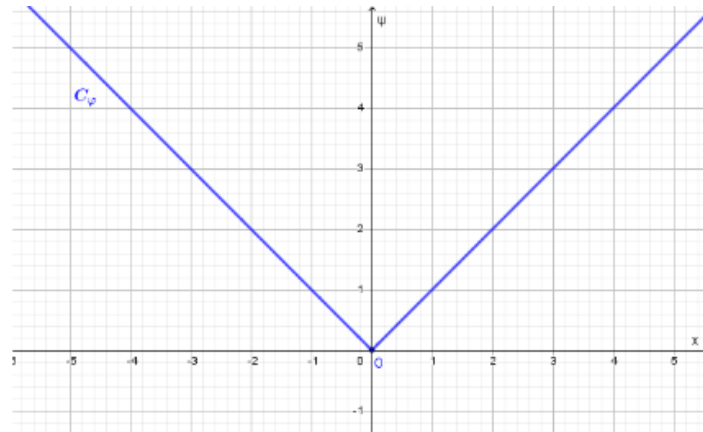
- α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του. (Μονάδες 15)
- β) Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$f(x) = |x + 2| + 1 \quad f(x) = |x - 2| - 1 \quad f(x) = |x + 2| - 1 \quad f(x) = |x - 2| + 1$$

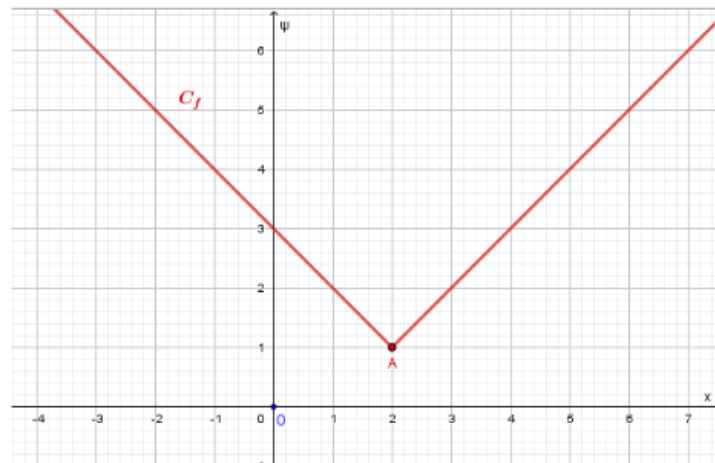
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18 14972

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x - 2| + 1$, $x \in \mathbb{R}$.



- α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πως προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ . (Μονάδες 13)
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:



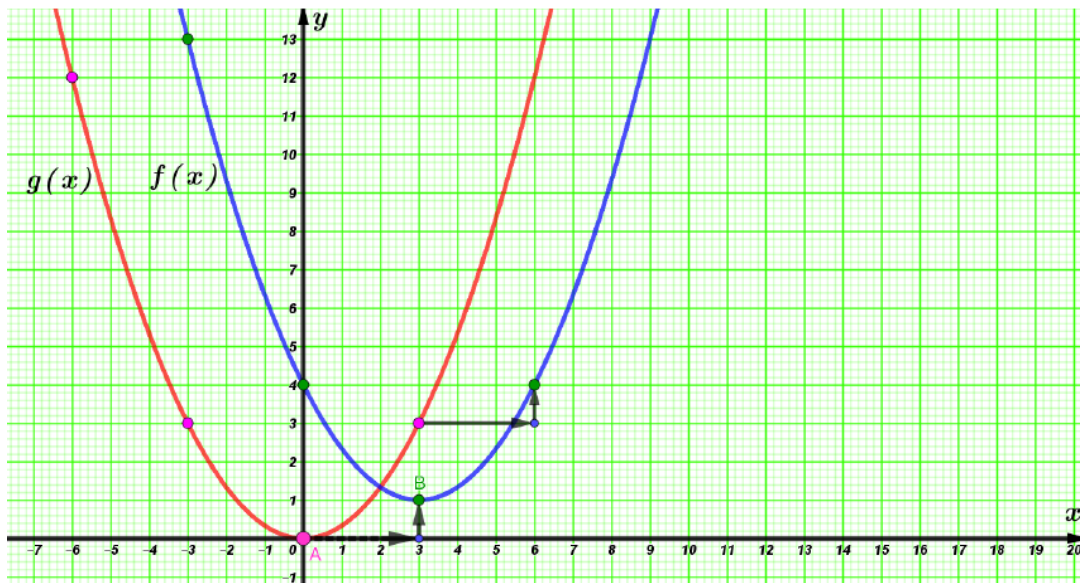
- i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)
- ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 19 14983

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μια μονάδα προς τα πάνω.

- α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.
- i) $f(x) = g(x + 3) + 1$ ii) $f(x) = g(x + 3) - 1$
- iii) $f(x) = g(x - 3) + 1$ iv) $f(x) = g(x - 3) - 1$ (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου. (Μονάδες 8)

- γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 20 15811

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

- i) να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

(Μονάδες 9)

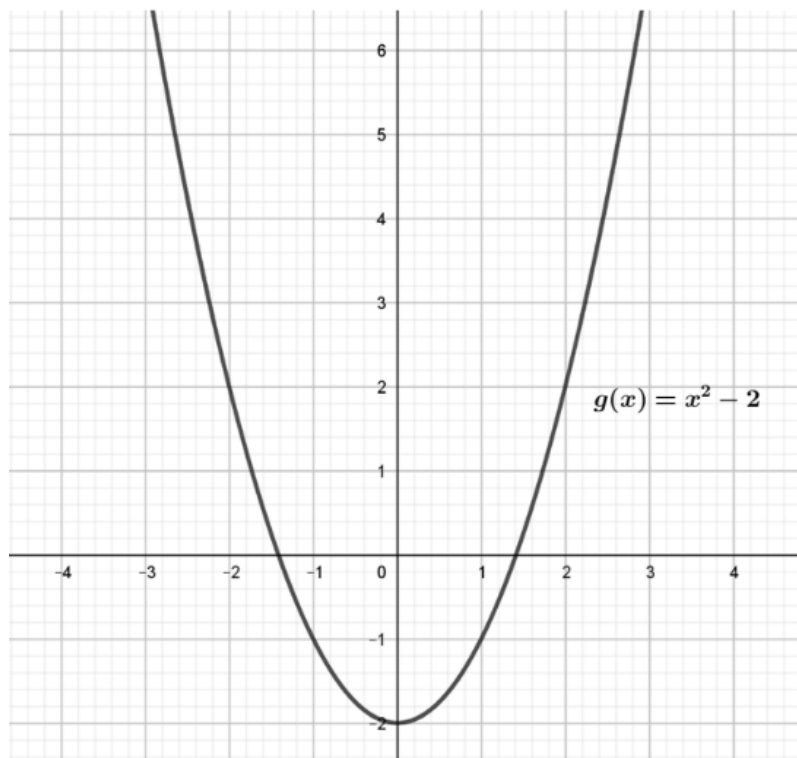
- ii) να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική

παράσταση της g που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

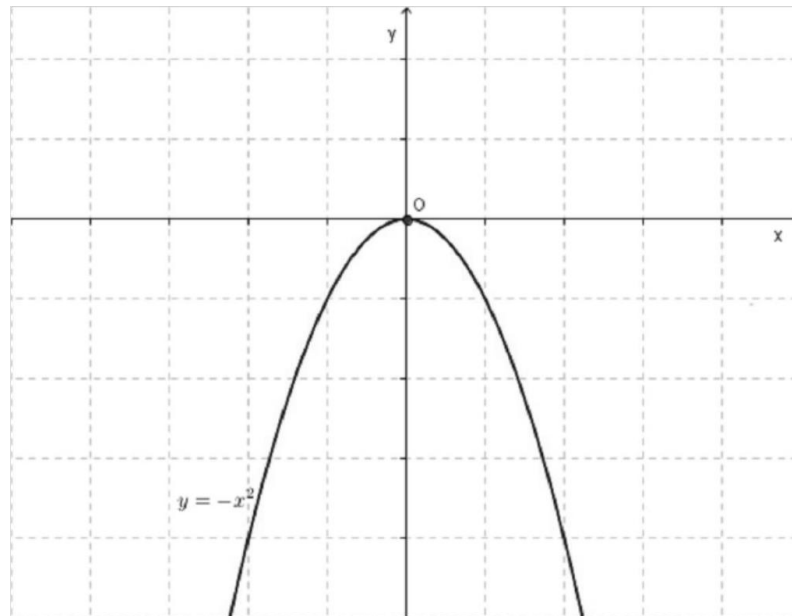
(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4ο**ΘΕΜΑ 21 14293**

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f . (Μονάδες 10)
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:
- Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)
 - Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)
 - Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 22 14973**

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 4)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
- γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:
- Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
 - Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 4)
 - Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 7)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΘΕΜΑ 1^Ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2) > f(1)$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 8$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x) - 8) > 0$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $x^5 + 3x < 8 - 4x^3$.

ΘΕΜΑ 2^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$.

- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 1. Στη συνέχεια να βρείτε ποια είναι η θέση ελαχίστου;

ΘΕΜΑ 3^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda}{x} - \sqrt{x}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(4,1)$.

- Να δείξετε ότι $\lambda = 12$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

ΘΕΜΑ 4^Ο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(3,2)$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $2 < f(|x-2|) < 5$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $(f(10) - f(7))x < f(7) - f(10)$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $2f(\alpha) > f(\alpha+1) + f(\alpha+2)$.

ΘΕΜΑ 5^Ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{\alpha - x} - 3x$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-5,18)$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.
- Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in A$ να αποδείξετε ότι : $\frac{f(\alpha)}{6} + \frac{f(\beta)}{4} + 5 \geq 0$
- Αν $\kappa < 0 < \lambda \leq 4$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa)f(\lambda) + 4 < 2(f(\kappa) + f(\lambda))$.

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{\lambda - x}} + x + 16$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-7, 10)$.

- Να δείξετε ότι $\lambda = 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in A$ να αποδείξετε ότι : $|3f(\alpha) - 2f(\beta) - 11| \leq 45$

ΘΕΜΑ 7^ο

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη, ισχύει : $f(\sqrt{2} - 1) < f(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Αν ισχύει $f(\alpha^2) < f(8\alpha)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (\alpha - 2)x + \alpha + 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- Για κάθε $\kappa, \lambda \in (2, +\infty)$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa) + f(\lambda) + 6 < 0$.
- Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x_1^2 + x_2^2 - 10) > x_1x_2 - x_1 - x_2 - 1$.

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει :

$$f\left(\frac{2017}{2016}\right) < f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι : $f(x) + f(5x) > f(3x) + f(7x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(x) + f(x^5) < f(x^3) + f(x^7)$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη, περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-2, \lambda)$ και $B(2, 8 - 3\lambda)$.

- Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2 - x) > -4$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $g(x) = f(|2x - 5| - 3)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.