

Πεδίο Ορισμού - Πράξεις

1. Αν $A_f = (0,1]$ και $g(x) = f(x-2) + f(\ln x)$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g A_g ;
2. Έστω $f: [-2,1] \rightarrow \mathbb{P}$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της
 - i. g αν $g(x) = f(2x-3)$
 - ii. h αν $h(x) = x^2$
 - iii. φ αν $\varphi(x) = f(\ln x)$
3. Αν $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ και ισχύει $f(f(x)) = 2x+1 \forall x \in \mathbb{P}$ να δείξετε
 - i. $f(2x+1) = 2f(x)+1, x \in \mathbb{P}$
 - ii. $f(-1) = -1$

Ισες Συναρτήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: Y \rightarrow Y$ με την ιδιότητα $(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x) - 4x^2 \geq 2(f+g)(x)[(f+g)(x)-2x]$ για κάθε $x \in Y$. Να αποδείξετε ότι $f=g$
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(2\lambda+1)x-3}{x+\lambda}$ και $g(x) = \frac{5x-\lambda}{x+4-\lambda}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f=g$
3. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{2\mu^2 x + \mu}{x+1-\mu}$ και $g(x) = \frac{(3\mu-1)x + \mu}{x+\mu}$. Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του μ έτσι ώστε $f = g$
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g έτσι ώστε $f(x) = \frac{2\alpha x - \alpha + 1}{x + \alpha + 2}, g(x) = \frac{(\alpha^2 - 3)x - 2\alpha + 4}{x + 2\alpha - 1}$. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ για να είναι $f = g$.

Σύνθεση Συναρτήσεων

5. Αν $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$, και $g(x) = \frac{x}{x-2}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$, και $g \circ f$, καθώς και τις συναρτήσεις $7f+4g$, και $f \cdot g$.
6. Αν $f(x) = 2x-1$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$, και $g \circ f$.
7. Αν $f(x) = |x-1|$ και $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x+1, & x < 1 \end{cases}$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(x^2-4)$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(2 \sin x - 1)$
10. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f , όταν δίνονται στο $\mathbb{R}$ οι $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x+1$
11. Αν f έχει πεδίο ορισμού $\Delta = [-2,1]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $h = f \circ g$, όπου $g(x) = x^2 - 3$.
12. Αν $f(x) = 2x-1$ και $(g \circ f)(x) = x - x^2, x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η $g(x)$

13. Να βρεθεί ο τύπος της γ όταν δίνονται στο 3^* οι $(\gamma \circ f)(\chi) = \frac{\chi^4 + 1}{\chi^2}$ και $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 1}{\chi}$
14. Έστω η συνάρτηση $f: Y \rightarrow Y$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = x^7$ για κάθε $x \in Y$. Να αποδείξετε ότι $f(x^7) = f^7(x)$ για κάθε $x \in Y$
15. Έστω $f: Y \rightarrow Y$ με $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 - 3\chi + 4$ για κάθε $\chi \in Y$. Να δείξετε ότι $f(2) = 2$
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = (\kappa - 1)\chi + \lambda + 1$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in 3$ ώστε να ισχύει $(f \circ f)(\chi) = \chi$
17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$ και $\gamma(\chi) = 2\chi - 5$. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in 3$ ώστε να ισχύει $(f \circ \gamma)(\chi) = (\gamma \circ f)(\chi) = \chi$
18. Δίνεται η συνάρτηση $f: 3 - \{3\} \rightarrow 3$ με τύπο $f(\chi) = \frac{\alpha\chi - 4}{\chi - 3}$. Να βρεθεί ο $\alpha \in 3$ ώστε να ισχύει $(f \circ f)(\chi) = \chi$
19. Έστω $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow \Gamma$. Αν $g \circ f$ είναι 1-1 να δείξετε ότι f 1-1
20. Αν $f: P \rightarrow P$ και ισχύει: α. $(f \circ f)(\chi) = 4\chi + 3 \quad \forall \chi \in P$ β. $(f \circ f \circ f)(\chi) = 8\chi + \alpha \quad \alpha \in P \quad \forall \chi \in P$. Αν η f είναι 1ου βαθμού να βρεθεί το α

Συναρτήσεις "1-1", αντιστροφes

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι "1-1" γ) Να βρείτε την f^{-1} . Τι παρατηρείτε;
22. Ομοίως για τις συναρτήσεις α) $f(\chi) = 2 + \sqrt{x-3}$ β) $f(\chi) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ γ) $f(\chi) = \frac{x^2}{1+x^2}$ δ) $f(\chi) = \ln \frac{x+5}{2-x}$, $\chi \in (-5, 2)$
23. Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(\chi) = 5e^{4\chi}$
24. Αν η συνάρτηση $f: Y \rightarrow Y$ είναι γνησίως αύξουσα και $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in Y$, να αποδειχθεί ότι η $g(\chi) = \frac{f(\chi)}{1 + f^2(\chi)}$, $\chi \in Y$ είναι γνησίως αύξουσα
25. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: Y \rightarrow Y$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$.
i) Λύστε την $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$ ii) και την $f(f^{-1}(\chi^2 - 8\chi) - 2) < 2$
26. $f, g: P \rightarrow P$ γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις.
i. Να δειχθεί ότι $g \circ f \neq$
ii. Λύστε την εξίσωση $f(e^x + 3\chi) = f(3 + e)$
iii. Λύστε την ανίσωση $g(f(\chi^2 - 2)) < g(f(3\chi - 4))$
27. Θεωρούμε $f: Y \rightarrow Y$ με την ιδιότητα $f(f(x)) + x^3 = 0$ για κάθε $\chi \in Y$. Να αποδείξετε ότι i) Η f αντιστρέφεται, ii) η f δεν είναι γνησίως μονότονη iii) $f(0) = 0$
28. Αν η συνάρτηση f είναι "1-1", να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $\gamma(\chi) = e^{f(\chi)} + f^3(\chi) + f(\chi) + 1$ είναι "1-1"

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:3 \rightarrow 3$ με την ιδιότητα $(f \circ f \circ f)(\chi) = (f \circ f)(\chi) + a\chi$, $\forall \chi \in 3$, όπου $a \in 3^*$ σταθερός αριθμός. Να αποδείξετε ότι α) η f αντιστρέφεται β) η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
30. Αν $f:3 \rightarrow 3$ με ιδιότητα $(f \circ f \circ f)(\chi) = \chi$, $\forall \chi \in 3$, να δείξετε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη, η f είναι ταυτοτική δηλαδή $f(\chi) = \chi$, $\forall \chi \in 3$
31. Να ορισθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:3 \rightarrow 3$ για την οποία ισχύει: $2f(\chi) + 3f(1-\chi) = 4\chi - 1$, $\chi \in 3$
32. Έστω $f:Y^* \rightarrow Y^*$ με $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in Y$. Ν.ΔΟ: i) $f(1) = 0$ ii) $f(x) = -f(\frac{1}{x})$, $\chi > 0$ iii)
- Αν η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 1 ν.δο η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) f^{-1}(y)$
33. $f:P \rightarrow P$ με $f(f(\chi)) = e^x + f(x)$ $\forall x \in P$. Να δείξετε ότι f αντιστρέψιμη
34. Έστω f, g ορισμένες στο P και $f(A) = P$. Να αποδειχθεί ότι g 1-1
35. Έστω $f(P) = P$ και $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ $\alpha, \beta \in P$. Να δειχθεί:
- $f(0) = 0$
 - $f(-\chi) = -f(\chi)$ $\forall \chi \in P$ (f περιττή)
 - Αν η f έχει μοναδική ρίζα το $f(0) = 0$ να δειχθεί
 - f αντιστρέψιμη
 - $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$
 - $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ $\forall x \in P$

Συναρτήσεις άρτιες περιττές

36. Μία συνάρτηση $f:P \rightarrow P$ έχει την ιδιότητα $f(x+y) = f(x-y) = 2f(x)f(y)$ $\forall x, y \in P$. Να αποδειχθεί ότι f άρτια
37. Έστω συνάρτηση $f:P \rightarrow P$ με την ιδιότητα $f(x)f(-x) = f^2(x)$ $\forall x \in P$. Ν δ ό η συνάρτηση είναι άρτια.
38. Αν η συνάρτηση $f:P \rightarrow P$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f \circ f)(\chi) = -\chi$ για κάθε $\chi \in P$, να αποδειχθεί ότι η f περιττή.
39. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:P \rightarrow P$ με την ιδιότητα $f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y))$ $\forall x \in P$. Αν $f(0) = 0$ να αποδείξετε ότι
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x \in P$
 - η C_f έχει κέντρο συμμετρίας
39. Έστω συνάρτηση $f:P \rightarrow P$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(\chi) + \chi = 0$ $\forall \chi \in P$. Να αποδείξετε ότι η f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.