

ΤΑΞΙΝΟΜΙΕΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΓΕΛ Ν ΑΡΤΑΚΗΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

(Θα ασχοληθείτε περισσότερο με την ύλη της Β Λυκείου παρά με καινούργια πράγματα)

$$1A1. \quad f(x) = \frac{1}{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}$$

$$1A2. \quad f(x) = \sqrt{\frac{1-3x}{x^2+5x}}$$

$$1A3. \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+5x}}$$

$$1A4. \quad f(x) = \frac{2x}{|x-1|-2}$$

$$1A5. \quad f(x) = \frac{3}{x^2-16}$$

$$1A6. \quad f(x) = \sqrt{x^2+|x|}$$

$$1A7. \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$$

$$1A8. \quad f(x) = \sqrt{x^4(x+3)}$$

$$1A9. \quad f(x) = \sqrt{x^4(x-3)}$$

$$1A10. \quad f(x) = \frac{x-4}{|2x-3|-|x|}$$

$$1A11. \quad f(x) = \sqrt{9-x^2}$$

$$1A12. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$1A13. \quad f(x) = \sqrt{x^5-x^4}$$

$$1A14. \quad f(x) = \sqrt{-\eta\mu^2\pi x}$$

$$1A15. \quad f(x) = \ln(\ln(x))$$

Β ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

$$1B1. \quad f(x) = x^x$$

$$1B2. \quad f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

1B3. Να βρείτε τα m ώστε σύνολο ορισμού της

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{mx^2-2mx+3}} \text{ να είναι το } \mathbb{R}$$

2 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ**Α ΟΜΑΔΑ**

Να γίνουν τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$2A1. \quad f(x) = \sqrt{3-x}$$

$$2A2. \quad f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$2A3. \quad f(x) = 1 + \frac{4}{x}$$

$$2A6. \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & 1 \leq x < 2 \\ 2+x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$2A9. \quad f(x) = 1 + \sqrt{x-3}$$

$$2A10. \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$$2A13. \quad f(x) = 2x^2 + x - 3, \quad 1 \leq x \leq 9$$

$$2A14. \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

3 ΙΣΟΤΗΤΑ – ΣΥΝΘΕΣΗ**Α ΟΜΑΔΑ**

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες
(Τα φαινόμενα απατούν)

$$3A1. \quad f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}, g(x) = |x|-1$$

$$3A2. \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), g(x) = -2\ln(x)$$

$$3A3 \quad f(x) = (1 + \sqrt{2})^x - (\sqrt{2} - 1)^{-x}, g(x) = 0$$

Να βρείτε την σύνθεση των συναρτήσεων $g \circ f$ και $f \circ g$ όπου:

$$3A4. \quad f(x) = |x|, g(x) = -3x + 6$$

$$3A5. \quad f(x) = x^2 - 2, g(x) = |x|$$

$$3A6. \quad f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Να εκφράσετε την f ως σύνθεση δύο ή και περισσότερων συναρτήσεων όταν:

$$3A7. \quad f(x) = \eta\mu(x^2)$$

$$3A8. \quad f(x) = \sqrt{\eta\mu^2 x + 1}$$

$$3A9. \quad f(x) = g(x \cdot g^2(2 - x))$$

$$3A10. \quad \text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \alpha x + \beta \text{ και } g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = \gamma x + \delta. \text{ Βρείτε την σχέση μεταξύ των } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ώστε } f \circ g = g \circ f.$$

$$3A11. \quad \text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = 2x^2 + x + 1. \text{ Προσδιορίστε δύο συναρτήσεις } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = x + \beta \text{ και } \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \varphi(x) = \gamma x^2 + \delta \text{ ώστε } f = \varphi \circ g.$$

B ΟΜΑΔΑ

$$3B1. \quad \text{Αν } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\forall x, y: x \neq y \Rightarrow f(x) - g(x) + f(y) - g(y) = 0$$

να δείξετε ότι $f = g$

$$3B2. \quad \text{Αν } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, \forall x, y: x \neq y \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = g(x) \cdot g(y)$$

να δείξετε ότι $f = g$

$$3B3. \quad \text{Αν } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x - y) = f(2x + 3y)$$

να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

Να βρείτε τις συνθέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ των συναρτήσεων f, g όπου:

$$3B4. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$3B5. \quad f(x) = 2\sin 2x, g(x) = \sqrt{3 - x^2}$$

$$3B6. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & 1 \leq x \\ x - 2, & 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$3B7. \quad f(x) = \frac{|x| + x}{2}, g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$3B8. \quad \text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = |x|. \text{ Αν για την συνάρτηση } g \text{ ισχύει: } f \circ g = g \text{ δείξτε ότι το σύνολο τιμών της } g \text{ είναι υποσύνολο του } \mathbb{R}^+.$$

Γ ΟΜΑΔΑ

$$3Γ1. \quad \text{Έστω οι συναρτήσεις } f, g \text{ με πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}. \text{ Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης } f \circ g \text{ είναι 1-1.}$$

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
β. Να λύσετε την εξίσωση:
 $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x)) + 2$

4 MONOTONIA

A ΟΜΑΔΑ

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι παρακάτω συναρτήσεις.

(Χρησιμοποιήστε και τον λόγο μεταβολής)

$$4A1. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2 + 4 \text{ στο } \mathbb{R}_+$$

$$4A2. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = 2x^2 - 6x \text{ στο } [-2, 1]$$

$$4A3. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = -\frac{2}{x} \text{ στο } \mathbb{R}^*$$

$$4A4. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{x^2}{-1 - x} \text{ στο } \mathbb{R}_+$$

$$4A5. \quad \text{Έστω } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x + \frac{4}{x}. \text{ Να μελετηθεί η μονοτονία της } f \text{ σε καθένα από τα διαστήματα } (0, 2] \text{ και } [2, +\infty).$$

(Θυμηθείτε τον λόγο μεταβολής)

4A6. Έστω $f: [-3,3] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $f \uparrow$ στο $[1,3]$ και επιπλέον $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in [-3,3]$. Μελετήστε την μονοτονία της f στο $[-3,-1]$.

4A7. Έστω f αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εξετάστε την μονοτονία της g όταν:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4A8. Έστω $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow \Gamma$.

α) Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας

δείξτε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι αύξουσα στο A

β) Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος

μονοτονίας δείξτε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι

φθίνουσα στο A

B ΟΜΑΔΑ

(εδώ το κλίμα είναι λίγο πιο θεωρητικό)

4B1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Αφού δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μελετήστε την μονοτονία της f .

4B2. Μελετήστε την μονοτονία της f όπου

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}.$$

4B3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι έχει το πολύ μια ρίζα.

(Αυτή την άσκηση να την προσέξετε σαν θεωρία)

4B4. Αν τα σημεία $A(7,5)$ και $B(1,4)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε να λυθεί η ανίσωση $f(3+f(2x-1)) < 5$ όταν f γνήσια αύξουσα

4B5. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και είναι $g(x) = f(x) - x$ τότε να δείξετε ότι γνήσια φθίνουσα είναι και η g και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+x) - f(x+1) = x^2 - 1$

4B6. Έστω f αύξουσα και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για $g(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$. Δείξτε

ότι $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Ακόμη αν $f(x) < 1$ δείξτε

ότι g αύξουσα ενώ αν $f(x) > 1$ δείξτε ότι g

φθίνουσα Τέλος αν υπάρχει κάποιο x_0 :

$f(x_0) = 1$ δείξτε ότι η g παίρνει μια μέγιστη

τιμή την οποία να υπολογίσετε.

4B7 Αν f γν.αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$(f \circ g)(x) = x$ όπου $x \in \mathbb{R}$ τότε

να λυθεί η ανίσωση:

$$g(f(x^2 - 3x + 3)) > x$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

4B9. $x \ln x = e$

4B10. $3^x + 4^x = 7$

4B11. $a^x + b^x = 2(a+b)^x, a > 0, b > 0$

4B12. $f(x+a) = f(a) + 2x$ όπου f φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

4B13. $f(x+f(1)) = 1-x$ όπου f αύξουσα στο $\mathbb{R}$

4B14 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$

είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

η συνάρτηση f με $f(x) = a^x - x$,

$x \in \mathbb{R}$ και $0 < a < 1$

γ) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες

ισχύει η ισότητα

$$a^{\lambda^2-4\lambda} - a^{5\lambda-20} = \lambda^2 - 9\lambda + 20$$

όπου $0 < a < 1$ (1)

5 ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

A ΟΜΑΔΑ

5A1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Αν οι f, g και οι δύο άρτιες ή και οι δύο περιττές δείξτε ότι $f \cdot g$ άρτια.

β) Αν η μια είναι άρτια ενώ η άλλη είναι περιττή δείξτε ότι $f \cdot g$ περιττή.

- 5A2.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Επιπλέον ορίζεται η gof . Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ομοίως αν f άρτια.
- 5A3.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζεται η gof και είναι άρτια συνάρτηση. Εξετάστε αν f είναι άρτια.
- 5A4.** Έστω f, g συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Να εξετάσετε αν η $f+g$ είναι άρτια ή περιττή όταν:
- α) f, g άρτιες β) f, g περιττές γ) f άρτια και g περιττή
- 5A5.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -x$.
- α) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $fog = gof$ τι συμπεραίνετε για την g ;
- β) Αν $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $hof = f$ τι συμπεραίνετε για την h ;
- γ) Τέλος αν $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\varphi of = \varphi$ τι συμπεραίνετε για την φ ;
- 5A6.** Έστω $f: f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Βρείτε τα a, b, γ ώστε η f να είναι άρτια.
- 5A7.** Έστω $f: f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, $a \neq 0$. Βρείτε τα a, b, γ, δ ώστε η f να είναι περιττή συνάρτηση.
- 5A8.** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.
- Δείξτε ότι η g είναι άρτια.

6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

- 6A1.** $f(x) = \frac{x}{2+x}$
- 6A2.** $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$,
- 6A3.** $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
- 6A4.** $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$

6A5. $f(x) = \ln(1 + e^x)$

6A6. $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

6A7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

6A8. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

6A9. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-3}}$

6A10. $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6A11.

$$f : f(2) + 3f(3) = 4, 2f(2) - f(3) = 1$$

6A12. $f(x) = x^2 + 4x + 5$

Β ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και όπου είναι δυνατόν να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

6B1. $f: [4, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+6}$

6B2. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1}}$

6B3.

$$f^3(x) + 4f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$$

6B4. $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6B5. $f(x) = x^2(x^3 - 8) + 11$

6B6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f^2(x) \leq f(x)f(3-x)$

6B7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f^2(x) \leq 12f(x^2) - 36$

6B8. Αν τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε να λυθούν: η ανίσωση

$$: f(-2 + f^{-1}(x^2 - 8x)) < 2 \text{ όταν } f \text{ γνήσια}$$

αύξουσα και η εξίσωση :

$$f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9 \text{ όταν είναι γνήσια}$$

φθίνουσα

6B9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^7(x) + f^5(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$

αντιστρέφεται

(β) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

6B10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\text{ότι } f(f(x)) + x = f(x) \quad (1) \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$

αντιστρέφεται

(β) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$

(δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f + f^{-1}$ είναι ταυτοτική,

$$\text{δηλαδή } f(x) + f^{-1}(x) = x$$

6B11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

και

$$g(f(x) + 2005) \leq g(x) \leq g(f(x) + 2005)$$

(1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

(β) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Έστω f γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε

A) αν

$$f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

B) τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται

πάνω στην πρώτη διχοτόμο $y = x$

Γ) δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι

αν η συνάρτηση ήταν γνήσια φθίνουσα το

B) δεν ισχύει

(Η άσκηση αυτή είναι σχεδόν θεώρημα και χρησιμεύει αργότερα στην επίλυση άλλων ασκήσεων)

6Γ2. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ένα προς ένα για την οποία ισχύει $f(x)f(1-x) = f(ax+\beta)$ να δείξετε ότι: α) $a=0$ β) $f(1-\beta)=1$

6Γ3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x)=x^5+x-1$

A) Να δείξετε ότι f ένα προς ένα συνάρτηση.

6Γ5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

B) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

Γ) Βρείτε την f^{-1} συναρτήσει της f

6Γ6. Έστω f η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

A) Να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση

B) Να μελετήσετε την μονοτονία της f

Γ) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

Δ) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

E) Να δείξετε και να εξηγήσετε και γραφικά

ότι $f(x)=f^{-1}(x)$

ΣΤ) Θεωρούμε την

συνάρτηση $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{666}(x)$. Να βρείτε τον

τύπο της

(Η παραπάνω άσκηση είναι μια καλή

ευκαιρία να θυμηθείτε όλα τα προηγούμενα)

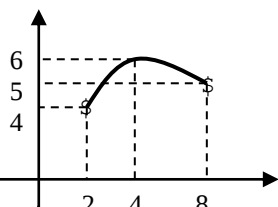
7 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑ

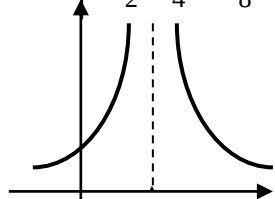
Για τις παρακάτω συναρτήσεις f δίνονται οι γραφικές τους παραστάσεις και ζητούνται το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα

μέγιστα – ελάχιστα, οι ρίζες, το κατά πόσον είναι άρτιες – περιττές περιοδικές, και η μονοτονία τους κατά διαστήματα και συνολικά.

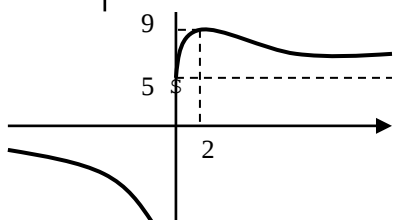
7A1.



7A2.



7A3.



7A5. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

A) $f(x) = |x| - x$

B) $f(x) = \frac{|x|(2x+5)}{x}$

Γ) $f(x) = \frac{|x-1|}{1-|x|}$

Δ) $f(x) = |\eta\mu 2x|$

7A6. Αν $f: R \rightarrow R$ ώστε $f(x) = f(a-x)$ δείξτε ότι η ευθεία $x = a/2$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f . Βρείτε έτσι τον τύπο μίας παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ και ρίζα το -1 .

Να σχεδιάσετε παραδείγματα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων f ώστε:

7A7. $f: R \rightarrow R$ να είναι γνήσια αύξουσα και να μην έχει ρίζα.

7A8. $f: R \rightarrow R$ άρτια και αύξουσα στο R .

7A9. $f: R - \{-1, 1\} \rightarrow R$ ώστε η εξίσωση $f(x) = a$ να έχει πάντοτε τρεις ακριβώς λύσεις για κάθε $a \in R \setminus \mathbb{Z}$.

7A10. $f: R \rightarrow R$ ένα προς ένα, αλλά όχι γνήσια μονότονη.

7A11. $f: (-2, 2) \rightarrow [-1, 1]$ περιττή, όχι μονότονη που δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

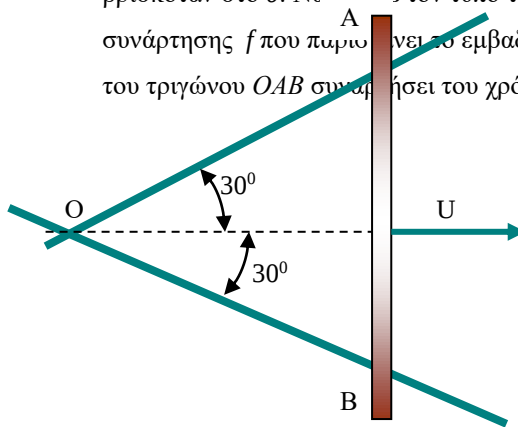
7A12. $f: R \rightarrow R$ γνήσια φθίνουσα, ώστε $f^{-1} = f$.

8 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

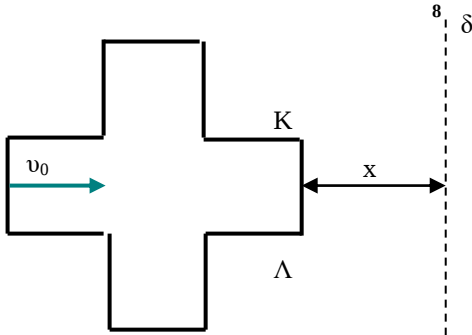
Β ΟΜΑΔΑ

8B1. Ένας κύλινδρος έχει όγκο V . Να εκφράσετε το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας σαν συνάρτηση της ακτίνας της βάσης του και να βρείτε εκείνη την ακτίνα που καθιστά την επιφάνεια ελάχιστη

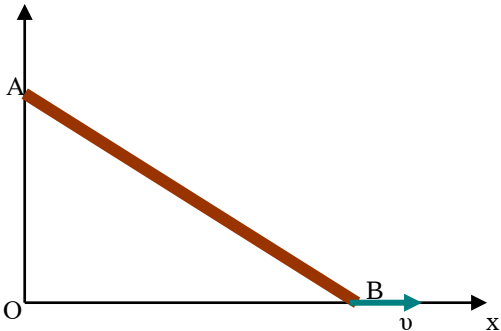
8B2. Η ράβδος AB κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=2\text{m/sec}$, έχει μήκος 6m και αρχικά βρίσκεται στο O . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που παριστάνει το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του χρόνου.



8B3. Όλες οι ακμές του σταυρού είναι ίσες με a . Με x συμβολίζουμε την απόσταση της KA από την ευθεία δ . Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $x=0$ και ο σταυρός κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που παριστάνει το εμβαδόν του σταυρού που έχει εισέλθει δεξιά της ευθείας δ , συναρτήσει του χρόνου.



- 8B4.** Η ράβδος AB έχει μήκος $10m$ και το άκρο της B γλιστρά στην Ox με ταχύτητα $v=2m/sec$ την χρονική στιγμή $t=0$ το $B \equiv 0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που δίνει το μήκος του OA συναρτήσει του χρόνου καθώς και τον τύπο της g που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του χρόνου.



9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Οι ασκήσεις αυτές είναι ιδιαίτερα όμορφες και καλλιεργούν την φαντασία. Κάποιες είναι και **πολύ δύσκολες**, άλλες θέματα διαγωνισμών, γι αυτό πολλές τις συνοδεύουμε με σύντομες υποδείξεις.

Α ΟΜΑΔΑ

- 9A1.** Έστω ότι $f(x)-2f(-x)=x^2$ για κάθε x στο R . Να βρείτε την f .
- 9A2.** Έστω ότι $xf(x)+f(1-x)=x^2$ για κάθε x στο R . Να βρείτε την f .
- 9A3.** Έστω ότι $f(x)+2xf(\frac{1}{x})=x^4$ για κάθε x στο R^* .
Να βρείτε την f .
- 9A4.** Έστω ότι $f(\frac{3+x}{x-1})+4f(\frac{x-1}{3+x})=x$ για κάθε x στο $R \setminus \{-3,1\}$. Να βρείτε την f .

- 9A5.** Έστω ότι $f^2(x)f(\frac{1-x}{1+x})=64x$ για κάθε x

στο $R \setminus \{-1,0,1\}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
(Σε όλες τις προηγούμενες ασκήσεις ονομάστε ψ την «άλλη» παράσταση και θα καταλήξετε σε εύκολα συστήματα)

- 9A6.** Έστω f πολωνυμική συνάρτηση n βαθμού, τότε

α. Να βρεθεί ο βαθμός του πολωνύμου :

$$f(x+1)-f(x)$$

β. Να βρεθούν όλα τα πολωνύμα f :

$$f(x+1)-f(x)=x \text{ για κάθε } x \text{ στο } R$$

- 9A7.** Έστω ότι $f(x)=f(2x)$ για κάθε x στο R .

Τότε να δείξετε ότι

$$f(x)=f(2^k x) \text{ για κάθε ακέραια τιμή του } k \text{ και}$$

x στο R

- 9A8.** Έστω συνάρτηση g με $A_g=R$ και $g(g(x))=x$ για κάθε x στο R . Αν η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R , να δείξετε ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση f , ώστε $2f(x)+f(g(x))=h(x)$ για κάθε x στο R .
Προσπαθήστε να εκμεταλλευτείτε το δεδομένο $g(g(x))=x$. Θα φτάσετε έτσι σε ένα εύκολο σύστημα.

- 9A9.** Έστω $f: R \rightarrow R$ ώστε $ff(f(x))=-x$ για κάθε x στο R . Να δείξετε ότι :

α. Η f είναι 1-1.

β. Η f είναι περιττή συνάρτηση.

- 9A10.** Έστω ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε να ισχύει : $f(x) f(1-x)=f(ax+b)$ για κάθε x στο R . Τότε δείξτε ότι :

α. $a=0$

β. $f(1-b)=1$

(Είναι εύκολο να βρείτε ειδικές τιμές που θα σας δώσουν τη λύση εξ άλλου τις δυο τελευταίες τις έχετε ξαναδεί)

- 9A11.** Έστω ότι $f(x-y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y$ στο R . Να βρείτε τον τύπο της f .

- 9A12.** Έστω ότι $f(x-y)=f(x+y)$ για κάθε x,y στο R και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

9A13. Έστω ότι $f(xy)=f(x)-f(y) \quad \forall x,y \in (0,+\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f .

9A14. Έστω ότι

$$f(xy) = \frac{f(x)}{f(y)} \quad \forall x,y \in (0,+\infty) \text{ και}$$

$f(x) \neq 0$ Να βρείτε τον τύπο της f .

9A15. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R . Να δείξετε ότι

α. $f(0)=0$

β. $f(-x)=-f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R

9A16. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R . Να δείξετε ότι

α. $f(nx)=nf(x)$ για κάθε n στο N^*

β. $f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$ για κάθε n στο N^*

γ. $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$ για κάθε m,n στο N^*

δ. $f(rx)=rf(x)$ για κάθε r στο Q

(Για το γ. αρκεί να δείξετε ότι $nf(x/n)=f(x)$)

9A17. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ x,y στο R τότε $f(x)=0$. Αν τώρα x,y στο R^* . Να δείξετε ότι

α. $f(1)=f(-1)=0$

β. f άρτια συνάρτηση

γ. $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε x στο R^*

δ. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R^*

9A18. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^* . Να δείξετε ότι

α. $f(x^n)=nf(x)$ για κάθε n στο N^*

β. $f(x^k)=kf(x)$ για κάθε k στο Z^*

γ. $f(x^r)=rf(x)$ για κάθε r στο Q^*

9A19. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^{*+} . Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο υποσύνολο του R .
(Είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου)

9A20. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^{*+} και επιπλέον $(x-1)f(x)>0$. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

(Θέτοντας $x=a/\beta$ μπορείτε να δημιουργήσετε τον λόγο μεταβολής)

9A21. Αν $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R να δείξετε ότι

α. Αν η f έχει μία ρίζα τότε $f(x)=0$ για κάθε x στο R

β. Αν η f δεν είναι σταθερή τότε $f(0)=1$

9A22. Έστω $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R και f όχι σταθερή. Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)>0$ για κάθε x στο R

β. $f(-x)f(x)=1$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R

9A23. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο $(0,+\infty)$. Τότε

α. Αν $f(1)=0$ βρείτε τον τύπο της f

β. Αν $f(a)=0$ με $a>0$ δείξτε ότι $f(x)=0$ στο R^{*+}

γ. Αν $f(1) \neq 1$ δείξτε ότι f σταθερή

9A24. Έστω ότι $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^{*+} και f όχι σταθερή. Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ για κάθε x στο R^{*+}

β. $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R^{*+}

γ. $f(x)>0$ για κάθε x στο R^{*+}

9A25. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^{*+} και f όχι σταθερή. Τότε

α. $f(x^n)=[f(x)]^n$ για κάθε n στο N^* και x στο R^{*+}

β. $f(x^k)=[f(x)]^k$ για κάθε k στο Z^* και x στο R^{*+}

γ. $f(x^r)=[f(x)]^r$ για κάθε r στο Q^* και x στο R^{*+}

δ. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση η f είναι 1-1

9A26. Αν $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ τότε

α. Αν υπάρχει $x_0 : f(x_0)=1$ δείξτε ότι f σταθερή

β. Αν $f(x) \neq \pm 1$ για κάθε x στο R και θέσουμε :

$$g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \text{ δείξτε ότι } g(x+y) = g(x)g(y) \text{ για}$$

κάθε x, y στο R

9A27. Έστω f άρτια, $f(0) \neq 0$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε x, y στο R . Να βρείτε τον τύπο της f .

(Δείξτε πρώτα ότι $f(x) > 0$ και μετά

χρησιμοποιείτε κάποιες ειδικές τιμές)

9A28. Αν $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(x) = g(x) + g(-x)$ για κάθε x, y στο R τότε η g μπορεί να ικανοποιεί την σχέση $g(x+y) = g(x)g(y)$

9A29. Αν $f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$, $\forall x \in R$
Να βρείτε τον τύπο της f .

9A30. Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0, +\infty)$ αν

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$$

9A31. Έστω ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in R$.

Δείξτε ότι η $f(x) - x$ είναι φθίνουσα στο R .

Β ΟΜΑΔΑ

9B1. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και για κάθε x στο R ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1$.

Να δείξετε ότι :

α. $f(1) = 1$

β. Η συνάρτηση με τύπο $x^2 - xf(x) + 1$ δεν μπορεί να είναι 1-1

(Άλλη μια φορά το $f(x)$?)

9B2. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. $f(0) = 0$

γ. $f^{-1}(x) + x = f(x)$ για κάθε x στο R

δ. $f(f(x) - x) = x$ για κάθε x στο R

9B3. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f(f(x) - 2) = 1 + x$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει τουλάχιστον μια λύση για οποιαδήποτε τιμή του y

γ. Ισχύει : $f^{-1}(x) = f(x-2) - 1$ για κάθε x στο R

(Βάλτε όπου x το $f(y-2) - 1$)

9B4. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε $f(f(x)) = 2x + 1$ για κάθε τιμή του x στο R . Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Δείξτε ότι $f(2x+1) = 2f(x) + 1$ για κάθε x στο R

γ. Αν f πολωνυμική να βρείτε τον τύπο της

(Τι πρέπει να θέσετε στην θέση του x στα δεδομένα για να προκύψει το β μέρος του β ερωτήματος?)

9B5. Έστω $f : R \rightarrow R$ ώστε $f(f(x)) = x$ και f αύξουσα Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R

γ. Να δείξετε ότι : $f(x) = x$ για κάθε x στο R

δ. Χρησιμοποιείτε τα προηγούμενα ώστε να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ ii) $(x^2 + 100)^2 = (x^3 - 100)^3$

(το γ ερώτημα το έχουμε ξαναδεί στην μονοτονία. Το δ είναι εφαρμογή των προηγούμενων)

9B6. Αν $f\left(\frac{x + f(x)}{2}\right) = x$, $\forall x \in R$ και f

γνήσια αύξουσα συνάρτηση να δείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε x στο R

(Είναι παρόμοια με την προηγούμενη)

9B7. Έστω $A \subseteq R : 0 \notin A$ και συνάρτηση

$$f : A \rightarrow A : f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{f(x)}{x} \text{ τότε}$$

α. Αν $x \in A$ να δείξετε ότι $\frac{1}{x} \in A$

β. Δείξτε ότι $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε x στο R

γ. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

δ. Αν 2 και 4 είναι δυο στοιχεία του συνόλου A και $f(2) = 4$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 4$

(Τριπλό και τετραπλό f χρειάζονται τα δνó πρώτα)

9B8. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R .
Να δείξετε ότι αν $f(a)=ka$ όπου k,a ακέραιοι αριθμοί $a \neq 0$, τότε δείξτε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό b , ο αριθμός $f(b)$ είναι επίσης ακέραιος.

9B9. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R .
Να δείξετε ότι

- Αν μοναδική ρίζα της f είναι το 0 τότε η f είναι 1-1 συνάρτηση.
- Αν ισχύει το προηγούμενο τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R . (Θεωρείστε ότι $f(R)=R$)
(Βρείτε πρώτα πόσο κάνει το $f(x-y)$)

9B10. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x στο R^*_{+} . Τότε

- Αν η f έχει ρίζα $\rho \neq 1$ δείξτε ότι έχει άπειρες ρίζες*.
- Αν η f έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι είναι 1-1 συνάρτηση.
- Αν η f είναι 1-1 και a,b θετικοί αριθμοί τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$.

9B11. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R .

Να δείξετε ότι

- $f(nx)=[f(x)]^n$ για κάθε n στο N και x στο R
- $f(kx)=[f(x)]^k$ για κάθε k στο Z και x στο R
- $f(rx)=[f(x)]^r$ για κάθε r στο Q και x στο R
- Αν $f(1)=2$ τότε $f(x)=2^x$ για κάθε ρητό αριθμό x .
- Αν μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ είναι το 0 τότε η f δεν είναι σταθερή.
- Αν ισχύει το προηγούμενο τότε η f είναι 1-1
- Αν η f είναι 1-1 τότε $f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R^*_{+}

9B12. Έστω ότι $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ για

κάθε x,y στο R και $g(x)=f(x)-f(0)$

- Δείξτε ότι $g(x+y)=g(x)+g(y)$ για κάθε x,y στο R
- Αν $f(1)=f(0)$ δείξτε ότι $f(x)=f(0)$ για κάθε ρητό αριθμό x

(Δείξτε για το β' ότι αν $g(1)=0$ τότε

$g(x)=0$, Τύπος Jensen)

9B13. Έστω $(x+y)f(x+y)=(1+f(x))(1+f(y))$ για κάθε x,y στο R και f περιττή συνάρτηση.
Να εξετάσετε αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f .

9B14. Έστω $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ για κάθε x,y στο R με $f(a)=1$ $a \neq 0$. Τότε

- $f(0)=0$
- $f(2a)=0$
- $f(x+2a)=f(x)f(-a)$ για κάθε x στο R
- $f(x+4na)=f(x)$ για κάθε n στο N και x στο R

(Μπορείτε να δημιουργήσετε τα ζητούμενα από το πρώτο μέλος της δοσμένης σχέσης για τα α, β, γ και για το δ να κάνετε επαγωγή.)

9B15. Αν

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)} \quad \forall x \in R$$

δείξτε ότι η f είναι περιοδική.

9B16. Αν $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R τότε :

- Να βρείτε όλες τις σταθερές f που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση.
- Αν f όχι σταθερή τότε $f(0) \neq 0$ και f άρτια συνάρτηση
- Αν $f(a)=0$ με $a>0$, θα είναι :
 $f(x+4a)=f(x)$
- Κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι το $(a,0)$

9B17. Αν $f(x^2+y^2)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R τότε δείξτε ότι :

- $f(0)=0$
- $f(x^2)=f(x)$ για κάθε x στο R
- $f(-x)=f(x)$ για κάθε x στο R
- $f(x)=0$ για κάθε x στο R
(Για το 4 αφού δείξετε ότι $f(y^2)=f(x^2)+f(y^2-x^2)$ λάβετε υπ όψιν σας το 3, ώστε να καταλήξετε σε $f(x^2)=f(y^2)$ οπότε και πάλι με τη βοήθεια του 3, καταλήγετε στο ζητούμενο)

9B18. Έστω ότι $f(x+y) \leq y+f(x) \quad \forall x,y \in R$ και $f(5)=1$. Δείξτε ότι $f(x)=x-4 \quad \forall x \in R$.

(Προσπαθήστε να δείξετε ότι $f(x-y) = -y + f(x)$)

9B19. Αν $f: R_+^* \rightarrow R_+^*$ ώστε $2xf(y) \leq xf(x) + yf(y)$

$\forall x, y \in (0, +\infty)$ τότε δείξτε ότι

$$\alpha. \frac{2y-x}{y} f(x) \leq f(y) \leq \frac{x}{2x-y} f(x)$$

όταν $2x > y$

$$\beta. \frac{f(x)}{y} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y)}{x} \text{ όταν}$$

$x > y$

9B20. Έστω ότι $f(x) \leq x$ και $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε x, y στο R . Να βρείτε τον τύπο της f .

(Βρείτε πρώτα το $f(0)$ και δείξτε ότι η f είναι περιττή)