

## Όριο Συναρτησης $\lim_{x \rightarrow \chi_0} f(x) \in \mathbb{P}$

### 1. Όριο ρητής $\frac{0}{0}$

Να βρεθούν τα όρια

$$\text{i) } \lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^3 + 2\chi + 3}{\chi^4 + \chi^3 - 3\chi^2 - 5\chi - 2}, A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}, \text{ ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 1| - x - 1}{|x + 5| - 2x - 3}, \text{ iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + |x^2 - 4| + x - 2}{x^2 + x - 6} \text{ iv) }$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x - 3|}{|x + 2| - 5}$$

### 2. Όριο άρρητής $\frac{0}{0}$

Να βρεθούν τα όρια

$$\text{i) } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\chi} - \sqrt{1-\chi}}{\chi}, \text{ ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}}, \text{ iii) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{\chi} + 1}{\sqrt[5]{\chi} + 1}, \text{ καθώς και }$$

Διαχωρισμός κλάσματος σε άθροισμα δύο κλασμάτων

$$\text{vi) Να βρεθεί το όριο } \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x} - 3}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Ριζικά διφύρων τάξεων και τέχνασμα προσθαφαίρεσης

$$\text{vii) Να βρεθεί το όριο } \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt[3]{x+6}}{\chi - 2}$$

Ριζικά με ίδιο υπόριζο – Αλλαγή μεταβλητής

$$\text{viii) Να βρεθεί το όριο } \lim_{\chi \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}$$

### 3. Όριο τριγωνομετρικής $\frac{0}{0}$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \chi}{\chi^2}, \text{ ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 \chi}{1 - \sin \chi}, \text{ iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon \phi 2\chi}{\sqrt{1 - \sin \chi}}, \text{ iv) } \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\eta \mu(\chi - 3)}{\chi^2 - 4\chi + 3}, \text{ v) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(\chi - 1)}{2\chi - \sqrt{\chi} - 1}$$

### 4. Πλευρικά Όρια $\frac{0}{0}$ , απόλυτες τιμές με $\chi_0$ ρίζα απολύτων

$$i) \text{ Να βρεθεί το όριο της } f \text{ στο } \chi_0 = 3 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}, & -\frac{3}{2} \leq x < 3 \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}, & 3 < x \end{cases}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + |x^2-4| + x-2}{x^2+x-6} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9| + |x-3|}{|x+2|-5}$$

## 5. Όριο και διάταξη – κριτήριο συγκρίσης - παρεμβολής

i) Αν η συνάρτηση  $f: 3 \rightarrow 3$  πληρεί την συνθήκη  $|f(\chi) - \chi^2| \leq \frac{1}{\chi^2}$  για κάθε  $\chi \in 3^*$ , να αποδείξετε ότι

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 0$$

ii) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $\sqrt{3\chi+3} \leq (\chi-2)f(\chi) + 3 \leq \sqrt{\chi+7} - 6$ , για κάθε  $\chi \in (1,3)$ . Να

υπολογιστεί το  $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi)$

iii) Έστω  $f: P \rightarrow P$  με ιδιότητα  $f^3(\chi) \cdot \eta\mu\chi \leq \chi^3$ ,  $\forall \chi \in P$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\chi) = \lambda$ ,  $\lambda \in P$ . Να δ ο :  $\lambda = 0$

iv) Έστω συνάρτηση  $f: Y \rightarrow Y$  με την ιδιότητα  $f^3(x) \cdot \eta\mu x \leq x^3$  για κάθε  $x \in Y$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$ ,  $\lambda \in Y$ , να δειχθεί ότι  $\lambda = 0$

v) Για τη συνάρτηση  $f(\chi) - f(\psi) + \sin 2(\chi - \psi) \leq 1$   $\forall \chi, \psi \in 3$ . Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\chi - \chi_0} = 0$   $\forall \chi_0 \in 3$

vi) Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $Y$  και ισχύει ότι  $|f(x) \cdot \eta\mu x - 3x| \leq x^2$  για κάθε  $x \in Y$ . Να βρείτε τα όρια  $A =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \eta\mu 2x}{x f(x) + \eta\mu x}$$

vii) Έστω  $f, g: P \rightarrow P$ . Ισχύει  $f^2(\chi) + g^2(\chi) \leq 2f(\chi) \cdot \eta\mu\chi$ ,  $\forall \chi \in P$ . Να δ ο :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{x \rightarrow 0} g(\chi) = 0$

viii) Δίνεται η φραγμένη  $f: P \rightarrow P$  με  $f^3(\chi) - (\chi^2 - \alpha^2)f(\chi) = \alpha^3$ ,  $\forall \chi \in P$ ,  $\alpha \in P^*$  σταθερός. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(\chi) = f(\alpha)$$

ix) Αν η  $f$  είναι ορισμένη στο  $P$  και  $\lim_{\chi \rightarrow 1} (f^3(\chi) - 2f^2(\chi) + f(\chi) - 2) = 0$ , να βρεθεί το  $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi)$ .

## 6. Όριο μηδενικής επί φραγμένη ( και αντιμετώπιση όριων $\eta\mu(\infty)$ και $\sin(\infty)$ )

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right]$$

ii) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, \gamma: 3 \rightarrow 3$ , με  $f^2(\chi)\eta\mu^2\chi + \gamma^2(\chi) \leq \chi^4\eta\mu^2\frac{1}{\chi}$ , για κάθε  $\chi \in 3^*$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \gamma(\chi) = 0$

iii) Έστω η συνάρτηση  $f: Y \rightarrow Y$  ώστε  $x^4 f(x) \leq x \sin \frac{1}{x} - 1$  για κάθε  $x \in Y^*$ . Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x f(x)} = 0$

## 7. Όριο με βοηθητική συνάρτηση (Όταν δίνεται όριο παράστασης που εμπλέκει την $f$ αλλά δεν γνωρίζω το όριό της...)

i) Αν για την συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{1+x} - 1} = 4$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x) + x^2 + 1|}{x - 2} = 5$  τότε να προσδιορίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

iii) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{\sqrt{x+2} - 2} = 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) \cdot (x^2 - 6x + 8)) = 5$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$

iv) Αν  $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{g(\chi)(\chi^2 - 1)}{\sqrt{\chi} - 1} = 2$ , υπολογίστε  $\lim_{\chi \rightarrow 1} g(\chi)$

v) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x\eta\mu x} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{x^2 + 1} - 1) \cdot g(x) = 5$ , να βρεθούν : ι)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\chi) \cdot g(\chi)$ , υ)  $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\frac{2f(x) - x^4(x)}{f(x) + \eta\mu x}$$

vi) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $Y$  και για κάθε  $\chi \in Y$  ικανοποιεί τη σχέση  $0 \leq f^2(x) - 4xf(x) + \eta\mu^2 x \leq \eta\mu^2 x$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

vii) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \chi^2}{\chi^3 - 8} = 5$ , να βρεθούν τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(\chi)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\chi f(x) - 8}{\chi^2 - 4}$

## 8. Παραμετρικό Όριο Συνάρτησης $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

i) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\chi^2 - (\alpha + 1)\chi + 4}{\chi - 4} + \beta\chi + 1 \right) = 5$

ii) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + \alpha\chi + \beta}{\sqrt{4\chi^2 - 19} - 9} = 7$

iii) Δίνεται η συνάρτηση  $f(\chi) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha\chi + 3}{\chi - 3}, & \chi < 3 \\ \frac{\beta\chi + \gamma}{\chi^2 - 3\chi}, & \chi > 3 \end{cases}$ . Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε το

όριο της  $f$  να είναι πραγματικός, τον οποίο και να υπολογίσετε

iv) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha|1-x^2| + \beta|9-x^2| - 3x - 7}{x^2 - 4}$ . Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{7}{4}$

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + \beta, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x - 4}{x - 1}, & x < 1 \end{cases}$ . Να προσδιορίσετε τις σταθερές  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να υπάρχει

το όριο της  $f(x)$ ,  $x \rightarrow 1$

### 9. Η ανίσωση $|\eta\mu x| \leq |x|$

i) Λύστε  $\eta\mu(|x-3|-2) < 2-|x-3|$ , ii)  $\eta\mu(4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8) > 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8$

iii) Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$ . Υπολογίστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x) + x^2 \eta\mu f(x)}{f(x)}$  (... + παρεμβ)

iv) Δίνονται συνάρτησεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f(x) \cdot g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$ . Δίνεται  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{\eta\mu^2 x} = 0$ . Υπολογίστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) \eta\mu g(x)}{x^2}.$$

### 10. Οριο Συναρτησης μεσα απο συναρτησιακές σχέσεις και ιδιότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$

i) Θεωρούμε την συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x\psi) = xf(\psi) + \psi f(x) \quad \forall x, \psi > 0$ . Αν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0, \text{ να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \text{ για κάθε } \alpha > 0$$

ii) Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \sin \beta + f(\beta) \sin \alpha$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$

$$\text{να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2 \sin x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

### 11. Οριο Συναρτησης $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

i) Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογίσετε το όριο της  $f$  στο αντίστοιχο σημείο

$$\text{ii) } \alpha) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = +\infty \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)(4 - 7x)] = +\infty \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)f(x)}{x-7} = +\infty$$

iii) Δίνονται οι συναρτησεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  με  $f(x) = (x + f(x))g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x)} = +\infty$ , να δειχθεί

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

## 12. Όριο Συνάρτησης $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

### 13. Όριο ρητών

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{7x^2 + x + 10}$

### 14. Όριο και απόλυτη τιμή

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\chi^2 - 5\chi + 13| - 7\chi^2}{|\chi^3 - 3\chi^2 + 5| - \chi^3} \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^3 + 3x^2 - 1| - |2x^3 - 7x + 13|)$$

### 15. Όριο άρρητων

ι) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης: α)  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\chi^2 + 2\chi + 7}}{\chi - 3}$ , β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 10x + 7} + 3x)$ , γ)  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi(\sqrt{\chi^2 + \chi + 1} - \chi)$ ,

$$\delta) \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{\chi^2 + 4\chi + 5} - \sqrt{\chi^2 + \chi + 5} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 5} + x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2} + 2x - 4}$$

### 16. Τριγωνομετρικά όρια

i) Να υπολογίσετε τα όρια α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{\chi^2 + 1}$ , β)  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi\eta\mu 2\chi}{\chi + 2}$ , γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\chi - |2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi|}{\chi^2 - 16}$

ii) Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{\chi}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \chi\eta\mu \frac{1}{\chi} \right)$

iii) Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$

### 17. Όριο και παρεμβολή

i) Αν για τη συνάρτηση  $f: Y \rightarrow Y$  ισχύει ότι  $|(x^3 + 1)f(x) - 2x^3| \leq x^2 + 1 \quad \forall x \in P$ . Να βρεθούν τα α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \eta\mu\chi \right)$$

ii) Αν για τη συνάρτηση  $f: Y \rightarrow Y$  ισχύει ότι  $|(\chi^2 + 1)f(x) - \chi\eta\mu\chi| \leq x$  για κάθε  $x > 0$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iii) Αν για τη συνάρτηση  $f: Y \rightarrow Y$  ισχύει ότι  $x^2 + 2x + 3 \leq f(x) \leq 2x^2 + 4x + 4$ , να υπολογιστούν τα όρια: α)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \eta\mu\chi \right), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - f(x) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \right)$$

### 18. Βοηθητική συνάρτηση

i) Δίνεται συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)\sqrt{4x^2 + 1}) = 6$ . Υπολογίστε: α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{\eta\mu \frac{1}{\chi}} \right), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \eta\mu f(x)}{f^4(x) - 2f^3(x)}$$

ii) Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x + 3^x)f(x) + \eta \mu x}{2^{x+2} - 3^{x+1}} = 2$ . Υπολογίστε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

### 19. Παραμετρικά όρια

i) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x \eta \mu \frac{1}{x}} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 3$ . Να βρεθούν : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  b) οι τιμές  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \mu x + \mu \sqrt{x^2 + x + 2}}{g(x) - \sqrt{x^2 + 2x + 3}} = 2$

iii) Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta) = 0$

iv) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{9x^2 + x} - \alpha x - \beta$ . Να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{6}$$

### 20. Όριο Εκθετικής – Λογαριθμικής Συνάρτησης

i) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2^{x+1} - 3^x + 2}{2^x + 3^{x+1} + 2}$ . Να βρεθούν τα όρια α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii) Αν  $f(x) = \frac{\alpha^{x+2} + 2^x}{\alpha^x + 2^{x+1}}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ( $\alpha > 0$ )

iii) Να βρεθούν τα όρια  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+2^x) - \ln(1+3^x))$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1+e^x))$

iv) Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x + 5}{3^x + 2^{x+1} + 2}$  καθώς και να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^{x+1} - \alpha^{-x}}{\alpha^x + \alpha^{-x}}$