

Συνέχεια συνάρτησης

1. Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν ιδιότητα $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 5 \leq 4g(x) + \sin^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$
2. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(\chi+1)}{\chi}, & \chi \neq 0 \\ 2, & \chi = 0 \end{cases}$ ως προς την συνέχεια στο $x_0 = 0$
3. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 - 2x + 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$, να είναι συνεχής

Προσδιορισμός τιμής συνάρτησης απο δοσμένη εξίσωση

Δίνεται η $f: P \rightarrow P$ η οποία είναι φραγμενη και ικανοποιεί την συνθήκη $f^3(x) - x^2 f(x) = 1 \quad \forall x \in P$. Να δειχθεί ότι f συνεχής στο $x_0 = 0$

Συνεχεια και παρεμβολή (και προσδιορισμός τιμής συνάρτησης)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $x - \eta \mu^2 x \leq x f(x) \leq x + \eta \mu^2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής το $x = 0$
5. Αν $x^3 f(x) \leq \left[\sqrt{x^2 + 4} - 2 \right] \eta \mu 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, και η f είναι συνεχής στο $x = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x = 0$
6. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $(x-1)f(x) \geq \sqrt{x^2 + 3} - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $f(1)$
7. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $x\psi - \psi^2 \leq f(x) \leq x^2 - x\psi$, για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$, νδο η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
8. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: P \rightarrow P$ με την ιδιότητα $f(x) + \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 + x(f(x) + 1) \quad \forall x \in P$.

Χρηση ορισμου απειροστής μετατοπισης $x_0 \pm h, x_0 \pm \alpha h \quad (\alpha \neq 0), x_0 h \quad (x_0 \neq 0)$,

8. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(xy) = f(x) + f(y), x, y > 0$ Ν.δο α) $f(1) = 0$ β) αν f συνεχής στο $x_0 = 1$ νδο f συνεχής στο $(0, +\infty)$
9. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y), x, y > 0$ Ν.δο α) $f(0) = 0$ β) f περιττή γ) αν f συνεχής στο $x_0 = 0$ νδο f συνεχής στο $\mathbb{R}$

10. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+2y) = f(x)f^2(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι : i) αν η f συνεχής στο $\chi_0 = 0$, τότε η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ii) Αν η f είναι συνεχής στο $\chi_0 = a$, με $f(a) \neq 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Συνεπειες Συνεχειας

11. Να δειχθεί ότι κάθε πολώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα
12. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\psi = f(\chi)$ συνεχής και τέτοια ώστε $f(0) = f(2\pi)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (0, 2\pi) : f(\gamma) = f(\gamma + \pi)$
13. Αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow (-1, 0)$ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ τ.ω: $f^2(\gamma) + f(\gamma) + \gamma = 0$
14. Έστω συνεχής και αύξουσα συνάρτηση f στο $[0, 1]$ με $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi e^\xi = e^\xi$
15. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \Delta \rightarrow \Delta$ όπου $\Delta = [a, b]$ με $g(a) = a$ και $g(b) = b$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα
16. Αν η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ είναι συνεχής και $ab > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a, b]$ ώστε $\frac{f(\xi)}{a} = \frac{b}{\xi}$
17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f^2(a) + f(a)f(b) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in [a, b]$ ώστε $f(\gamma) = 0$
18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0)$. Αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $f(b) = b$ και $g(a) = a$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) + g(\gamma) = 2\gamma$.
19. αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $\chi_1, \chi_2 \in [a, b]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τ.ω $2f(\chi_1) + 3f(\chi_2) = 5f(\xi)$.
20. Αν οι f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(0) = 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ και $f(\chi) \leq g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\chi)\eta\mu^2\chi + g(\chi)\sigma\upsilon\nu^2\chi = \chi$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.
21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 5]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in [0, 5]$ τέτοιο ώστε $10f(\chi_0) = f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$
22. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x-1} - 2$ τέμνει τον $\chi\chi'$ σε ένα τουλάχιστον σημείο χ_0 με $\chi_0 \in (0, 2)$
23. Να δείξετε ότι η $\psi = x$ τέμνει την C_f με $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2\chi$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του $(0, \frac{p}{4})$

24. Έστω η $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\leq f(x)\leq\beta$ $\chi\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=\frac{\alpha\beta}{\chi_0}$
25. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=g(\beta)$ και $f(\beta)=g(\alpha)$. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g τένονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\chi_0\in[\alpha,\beta]$
26. Έστω οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο διάστημα Δ και για κάθε $\chi\in\Delta$ $f(\chi)-g(\chi)=2006\chi$. Αν η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1 και $\rho_2\in\Delta$ με $\rho_1\leq\rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(\chi)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2)
27. Έστω f συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει $f^2(\alpha)+f^2(\beta)+5\leq 2[f(\alpha)-2f(\beta)]$. Να αποδείξετε ότι η C_f κόβει τον $\chi\chi'$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $\chi_0\in(\alpha,\beta)$
28. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$ και $\eta\mu 2\chi\leq f(\chi)\leq 2\chi$ $\forall \chi\in[0,1]$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon):2\chi+\psi-3=0$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(0,1)$
29. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αυξουσας στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$
30. Έστω f συνάρτηση συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Αν ισχύει $|f(0)-5|+|f(1)+2|=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\chi_0\in(0,1)$ ώστε $f(\chi_0)=\frac{f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{6})}{4}$

Σταθερή συνάρτηση, σταθερό πρόσημο, ασυνέχεια συνάρτησης

31. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(1999)=2000$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή
32. Αν για κάθε $\chi\in[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$ η f είναι συνεχής και ισχύει $\chi^2+f^2(\chi)=\alpha$, να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$, και να βρεθεί ο τύπος της
33. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $(f(\chi)-1)(f(\chi)-2013)=0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η f σταθερή
34. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Αν ισχύει $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$
35. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ ώστε $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=0$. Αν $f(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f ασυνεχής στο $\mathbb{R}$
36. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi^2-3\chi+2)g(\chi)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, όπου g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί 1 και 2 είναι διαδοχικές λύσεις της εξίσωσης $f(\chi)=0$, να αποδείξετε ότι $g(1)g(2)\geq 0$

37. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή
38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση $f(x)(g(x)+1) \geq 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$