ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Π αράγωγος με ορισμό

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1. $f(x)=|x-1|x$, $x_0=1$

2. $f(x)=\dfrac{x|x|}{2+|x|}$, $x_0=0$

3. Έστω $f'(1)=1$ και $H(x)=\begin{cases} f(1-x), x\geq 0 \\ f(1+x), x<0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Έστω $f\,'(1)=0$ και $H(x)=\begin{cases} f(2x-3) \quad ,x\geq 2 \\ f(3x-5) \quad ,x<2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 2.

5. Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο x_0

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3} \quad ,x<1 \\ x^2+\alpha x+\beta, x\geq 1 \end{cases}$, $x_0=1$ και $f(x)=(x-a)\sqrt{x}$, $x_0=0$

6. Υπάρχει το $f\,'(0)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+(x-1)f(0)}{x}$

7. Έστω: $f(x)=(x^2+2x+6)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-5}{x}=4$, g συνεχής. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

8. Έστω f συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=5$. Δείξτε ότι $f(1)=2$ και βρείτε ,αν υπάρχει, την $f'(1)$

9. Υπάρχει ο $f\,'(\alpha)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}$

Συναρτησιακοί τύποι και ορισμός παραγώγου.

10. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x, y , $f\,'(0)=\lambda$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$.

11. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x, y , $f\,'(0)=1$. $f(0)\neq 0$ Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$.

12. Αν $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x), \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

13. Αν $f(xy)=f(y)f(x), \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=1/2$ τότε δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

14. Αν $f'(0) = 1$ και γιά κάθε χ,ψ ∈Ρ $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, να αποδείξετε ότι $f'(\chi) = 1+f^2(\chi)$ γιά κάθε χ∈Ρ

Παράγωγος – παρεμβολή – σύγκριση – ανίσωση

15. Αν f: Ρ→Ρ με $f'(0) = f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι

παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = 0$

16. Μία συνάρτηση f Ρ→(0,+∞) έχει την ιδιότητα $f^3(\chi)+\chi^2 f(\chi) = 1$ γιά κάθε χ∈Ρ. Να αποδείξετε ότι α)

$\lim\limits_{x\to 0} f(\chi) = 1$ και β) $f'(0) = 0$

17. Αν γιά την συνάρτηση f :Ρ→Ρ ισχύει $f(\chi) - f(\psi) \leq |\chi-\psi|^4$ γιά κάθε χ,ψ ∈Ρ να αποδειχθεί ότι

α) $|f(\chi) f-(\psi)| \leq |\chi-\psi|^4$ και β) $f'(\chi) = 0$ γιά κάθε χ∈Ρ

18. ☠ Δίνεται συνάρτηση f :Ρ→Ρ γιά την οποία ισχύει $f^3(\chi)+2f(\chi)-6\chi=0$ γιά κάθε χ∈Ρ . Να αποδείξετε ότι

α) η f συνεχής στο 0

β) η f παραγωγίσιμη στο 0

γ) η f συνεχής σε κάθε χ_0 ∈Ρ

δ) η f παραγωγίσιμη σε κάθε χ_0∈Ρ

Παράγωγος –αλλαγή μεταβλητής

19. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 3$, να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 1} \dfrac{f(2x+1)-f(3)}{x-1}$

20. Αν η συνάρτηση f :Ρ→Ρ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 3$, να δείξετε ότι

$f'(0) = 3$

Ισοδύναμος ορισμός παραγώγου $\chi\to\chi_0$, h→0

21. Αν μία συνάρτηση fείναι παραγωγίσιμη στο χ_0 =α, να βρεθούν τα όρια α) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}$ και

β)

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha+2h)-f(a-h^2)}{h-\eta\mu 2h}$