

Άσκηση στο ΘΜΤ

Κυριακή, 21 Ιανουαρίου 2024 12:38 μμ

1 → **Αποδείξω ανισώσεις με χρήση ΘΜΤ**

1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(4) = 1$ και $1 < f(x) < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ν.δ.ο α) $-3 < f(x) \leq 1$, β) $\exists \xi \in (1, 4)$ να $f(\xi) = 1 - \xi$, γ) ν.δ.ο $3 < f(x+3) - f(x) < 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. Έστω $a, b \in (0, +\infty)$, $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι $(ae)^{b-\alpha} < \frac{b^b}{a^\alpha} < (be)^{b-\alpha}$.

3. Έστω $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}$. ν.δ.ο α) $\frac{b-\alpha}{b\omega^2\alpha} < \frac{b-\alpha}{b\omega^2\alpha} < \frac{b-\alpha}{\omega^2\beta}$

β) $(b-\alpha)\frac{\omega}{b\omega^2\alpha} < \ln \frac{\omega}{b\omega^2\alpha} < (b-\alpha)\frac{\omega}{b\omega^2\beta}$

4. Έστω $x > 0$ ν.δ.ο α. $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, $\forall x > 0$

β. $2 - \frac{e}{n} < \ln n < \frac{n}{e}$

5. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall f'$ γνησίως φθίνουσα και $f(1) = 0$
 $f(3) = 3$ και $f(5) = 9$

α) ν.δ.ο $f' \geq 1$

β) ν.δ.ο $f(x_1) + f(x_2) \geq 0$

γ) ν.δ.ο $\frac{f(x) - 9}{x - 5} \geq f'(5) \geq 3 \quad \forall x > 5$

δ) υπολογιστεί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ε) ν.δ.ο $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

στ) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ν.δ.ο $f(\beta) \geq f'(\alpha)(\beta - \alpha) + f(\alpha)$.

→ **υπόδειξη και ΘΜΤ.**

• ΤΥΤΤΙ (ησθκ ξ)

πάντα κόβω το δοθέν διαστήμα.

6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\dots$

⇒ 6. Έστω $f: \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = f(2) + 10$

νύβ $\exists \xi_1, \xi_2 \in (2, 6)$ τέω $\xi_1 \neq \xi_2$ να $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 5$.

7. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγώγιμη για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3x + 10}{\sqrt{x} - 3} = -6 \quad \text{ή} \quad \text{εφαρμογή (5) της } \zeta \text{ στο } u(q, f(q))$$

Τέτοιες την ζ στα όρια $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιες 1 και 5 .

α) Να βρω $\sim (5)$

β) Υπολογίστε τα $f(2)$ και $f(5)$

γ) νύβ $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$ $\xi_1 \neq \xi_2 \neq \xi_3$ με $\xi_3 \in (5, 9)$ τέω $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2f'(\xi_3)$

8. Έστω $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ όπου f συνεχής στο $[a, b]$, παραγώγιμη στο (a, b) και $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$. Νύβ α) η $f(x) = 2x$ είναι μία λύση της $f''(x) = 0$ στο (a, b) . β) υπάρχει $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέω $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$

9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγώγιμη για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. νύβ

α) $\exists x_0 \in (1, 3)$ τέω $f(x_0) = 6$

β) $\exists \xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ $\xi_1 \neq \xi_2$ τέω $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$

10. Έστω f παραγώγιμη $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) \neq f(b)$

Να αποδείξετε ότι α) $\exists x_0 \in (a, b)$ τέω $5f(x_0) = 4f(a) + 3f(b)$

β) $\exists \xi_1, \xi_2, \xi \in (a, b)$, $\xi_1 \neq \xi_2$ τέω

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$$

11. Έστω f συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(x) - 1}{x - 1} = 5$

α) Ν.δ.ο $\sim f$ παραγώγιμη στο $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x - 1}{x-1} = 5$$

α) Ν.Σ.Ο μ f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

β) Η f 3 φορές παραγωγίσιμη, μ f τήνεται τον x_1 στο x_2 με $x_1 < x_2$ και η εφαπτομένη της f στο $(2, f(2))$ διέρχεται από τα $A(-1, -3)$ και $B(3, 5)$. νδo

i) $f(2) = 3, f'(2) = 2$

ii) $\exists \xi \in (1, 2)$ τέω $f'''(\xi) = 0$

iii) $\exists \xi_1 \in (0, 1)$ τέω $f'(\xi_1) = 4\xi_1 - 2$

iv) $\exists \xi_2 \in (0, 1)$ τέω $f''(\xi_2) = 4$.

#12. Έστω f μ ομοιόμορφη συνεκτική $6 \in [a, b]$ με $f(a) = f(b) = 0$ και υπάρχει $\eta \in (a, b)$ τέω $f(\eta) < 0$ νδo

α) $\exists x_0 \in (a, b)$ τέω $f(x_0) = 0$

β) $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέω $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$

γ) $\exists \xi \in (a, b)$ τέω $f'''(\xi) = 0$.

#13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = 3f(2) - 7, f'(x) \geq 2$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1+h)}{h} = -4, \forall h \in \mathbb{R}$. νδo

α) $f'(-1) = -2$ β) $\exists$ μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέω $f'(\xi) = \frac{f}{3}$

δ) υπάρχει $f'(1) > 2$. ε) $\exists x_0 \in (1, 2)$ τέω $f'(x_0) = x_0^2$

ς) $\exists p_1 \in (1, 2)$ τέω $f'(p_1) = 2p_1$, ζ) δν υπάρχει στο f $2^{1/2}$ ακέραια αριθμοί

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$