Printout

Τετάρτη, 6 Δεκεμβρίου 2023 1:07 μμ

Ασκήσεις Εφαπτομένων

Τετάρτη, 6 Δεκεμβρίου 2023 6:34 πμ

1. Έστω η $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$

α. να βρεθεί η εξίσωση της εφ/νης (ε) της C_f όταν (ε) $\parallel$ (ζ): $3y+x-7=0$

β. νδο η (ε) εκτός από επαφή με C_f έχει και κοινό σημείο B

γ. Έστω $B(-1,-3)$ και (ε_1) η εφ/νη της C_f στο B.

i) να βρεθεί η (ε_1)

ii) νδο υπάρχουν άλλες δύο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην ζ

2. Έστω $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ ισχύουν:

- η εφ/νη της C_f στο $A(5, f(5))$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 4
- η εφ/νη της C_f στο $B(1, f(1))$ διέρχεται από το $\Gamma(2,-2)$

α. νδο $\beta = -5$, $\gamma = 5$

β. νδο υπάρχουν 2 εφ/νες της C_f που περνούν από $K(2,-5)$

γ. Έστω Μ, Ν σημεία επαφής των παραπάνω εφ/νων με τη C_f. Να βρεθεί η εξίσωση της εφ/νης της C_f που είναι παράλληλη στην ΜΝ

3. Έστω $f(x) = x^2 - \ln x$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$. ΝΔΟ C_f, C_g εφάπτονται και να βρεθεί η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο

4. Έστω $f(x) = e^{1-x} + 2$, $g(x) = 2 - \ln(x-1)$ και $A(1, f(1))$, $B(2, g(2))$ των C_f, C_g αντίστοιχα. ΝΔΟ η AB εφάπτεται των C_f, C_g στα A, B

5. Έστω ότι $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή 1η παράγωγο και ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3\sigma\upsilon\nu x}{x^2 + x} = 1.$$

α. Να βρεθεί η εφ/νη της C_f στο $M(0, f(0))$

β. Να βρεθεί η εξίσωση εφ/νης της C_g με $g(x) = x^2 \cdot f(x^3 - x)$ στο $A(1, g(1))$

γ. Ν.δ.ο υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τ.ώστε η εφ/νη της C_f στο $N(x_0, f(x_0))$ να περνά από το $P(1, \frac{7}{2})$

6. Δίνεται η $f(x) = \sqrt{8x}$

6. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{8x}$

α. Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο $\Sigma(x_0, f(x_0))$, $x_0>0$ θεωρούμε (δ): ευθεία $(\delta)\perp(\varepsilon_1)$ στο Σ. Αν οι ε_1, δ τέμνουν τον $x'x$ στα P, T αντίστοιχα, νδο το μέσο του PT είναι σταθερό σημείο (ανεξάρτητο του x_0)

β. Θεωρούμε τα $A(2,0)$ $B(-2,\beta)$ με $\beta<0$. Έστω ε_2 η εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην AB. Αν M είναι το σημείο επαφής της C_f με ε_2, νδο τα M, B, O συνευθειακά με $O(0,0)$.

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x)+f(x)=x^3+3x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

α) νδο f 1-1

β) αν f παραγωγίσιμη τότε

i) νδο η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη

ii) να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$

iii) Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $N(2, f^{-1}(2))$, αν η f^{-1} συνεχής.

8. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο 0 με $g(0)=g'(0)=1$ για τις οποίες:

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(x)}{x}=2$ και
- $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

α) νδο $f'(0)=1$

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0, f(0))$

γ) Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)+f(x)}{\eta\mu x+x}$

δ) νδο f παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)=f(x_0)+g(x_0)$

ε) νδο υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $N(x_0, f(x_0))$ να περνά από το $P(x_0-1,\ e^{x_0}-g(x_0)+x_0-2020$