Πολυώνυμα

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + a_{\nu-2} x^{\nu-2} + \dots + a_0$$

ο μέγιστος βαθμός

σταθερός όρος

μεγιστοβάθμιος όρος (προϋπόθεση $a_\nu \neq 0$)

συντελεστές των όρων του πολυωνύμου (είναι αριθμοί)

Ένα πολυώνυμο μπορεί να είναι πλήρες, ή ελλιπές

Πλήρες είναι αυτό που έχει όλους τους όρους από τον μέγιστο έναρξη ως την μηδενική. (Σταθερός όρος)

Πχ $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + \sqrt{3}$

$3x^3 - 5x^2 + 6x + \sqrt{3} \cdot x^0$

Ελλιπής: Είναι αυτό που του λείπουν όροι

Πχ $P(x) = 2x^5 + 3x^2 + 1$

Αν θέλω να το παρουσιάσω με πλήρη μορφή γράφω:

$$P(x) = 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1$$

Προσοχή: να έχω τους όρους του πολυωνύμου κατά φθίνουσα διάταξη και όχι τυχαία

Βαθμός πολυωνύμου: (rank(P))

Είναι ο βαθμός του μεγιστοβάθμιου όρου

Πχ $P(x) = 3x^5 + 7x^4 - 2x + 1$

Πχ $P(x) = -3x^5 + 7x^4 - 2x + 1$

$\text{βαθμ}(P) = 5.$

Χαρακτηριστικά Πολυώνυμα:

- Το σταθερό πολυώνυμο:

$P(x) = a_0$ (δεν έχει x μέσα του...)

σταθερός όρος

$a x^0$ οπότε $\text{βαθμ}(P) = 0$

Το μηδενικό πολυώνυμο: $P(x) = 0$

$0x^7, 0\cdot x^4, 0x^{2022}\dots$

Προσοχή: Το P δεν έχει βαθμό. $\text{βαθμ}(P) \notin \mathbb{N}$

Αριθμητική αντικατάσταση

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_0$$

η αντικατάσταση γίνεται σε όλες τις θέσεις που υπάρχει x.

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(0) = 0^2 - 5\cdot 0 + 6 = 6$

$P(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$P(x+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{3})^2 - 5\cdot(x+\sqrt{3}) + 6$

αριθμητικές τιμές

Ρίζα Πολυωνύμου

Ρίζα πολυωνύμου

$P(\rho) = 0$ Είναι η τιμή που μηδενίζει το πολ/μο.

αριθμητικές τιμές του πολ/μου

Πχ $P(x) = x^2 - 5x + 6$ $\quad P(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$

άρα $x=2$ ρίζα του πολυωνύμου.

Αριθμητική αντικατάσταση σε πολυώνυμο.

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

στη θέση του x το 1

Βρίσκω την τιμή $P(1) = 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 2$

Γενικά το $P(\rho)$ δηλώνει την τιμή του πολ/μου αν στη θέση του x βάλουμε ρ

1. Ποιές από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x:

προϋποθέσεις: οι δυνάμεις των x να είναι φυσικοί

$P(x) = a_\nu x^\nu + \dots + a_0 \quad \nu \in \mathbb{N}$

i) $1 - x^3$ ✓ **ii)** $\alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3$ ✓

iii) $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ ✗ **iv)** $x^4 - 2x^{\frac{1}{3}} + 4x - 1$ ✗

βαθμ(P) = 2 βαθμ(Q) = 3

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ **ii)** $2P(x) - 3Q(x)$ **iii)** $P(x)\cdot Q(x)$ **iv)** $[P(x)]^2$

ii) $2P(x) - 3Q(x) = 2(x^2 - 5x + 2) - 3(x^3 + 3x + 1)$

$= 2x^2 - \underline{10x} + 4 - 3x^3 - \underline{9x} - 3 =$

$-3x^3+2x^2-19x+1.$

iv) α τρόπος $(P(x))^2=(x^2-5x+2)^2=(x^2-5x+2)(x^2-5x+2)$

$=x^4-5x^3+2x^2-5x^3+25x^2-10x$

$+2x^2-10x+4=$

$=x^4-10x^3+29x^2-20x+4.$

β τρόπος

$(P(x))^2=(x^2-5x+2)^2=\dots$

Γ. γνωστή

$(a-b+\gamma)^2=a^2+b^2+\gamma^2-2ab+2a\gamma-2b\gamma$

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$, $x = -1$, $x = 1$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ $x = -1$, $x = 1$ $x = 3$.

Για να είναι ρίζα ενός $P(x)$ ένας αριθμός ρ αρκεί $P(\rho)=0$.

i) $P(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)+7=-2-3-2+7=0$

άρα $x=-1$ ρίζα

$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2+2\cdot1+7=2-3+2+7=8$

το $x=1$ δεν είναι ρίζα

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4(\mu^2 - \frac{1}{4})x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Ζητώ μ; ώστε $P(x)=0$

Πρέπει $4\mu^3-\mu=0$ και $4(\mu^2-\frac{1}{4})=0$ $\Leftrightarrow$ $\mu(4\mu^2-1)=0$ και $(\mu-\frac{1}{2})(\mu+\frac{1}{2})=0$

επιλύω την κοινή λύση

$$\left.\begin{array}{c} 4\mu^3-\mu=0 \\ \text{και} \\ 4\left(\mu^2-\frac{1}{4}\right)=0 \\ \text{και} \\ -2\mu+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \mu(4\mu^2-1)=0 \\ \text{και} \\ \left(\mu-\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\right)=0 \\ \text{και} \\ \mu=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mu(2\mu+1)(2\mu-1)=0 \\ \text{και} \\ \mu=-\frac{1}{2} \text{ ή } \mu=\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mu=0 \text{ ή } \mu=\frac{1}{2} \text{ ή } \mu=-\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=-\frac{1}{2} \text{ ή } \mu=\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \mu=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{1}{2}$$

4. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα. OX

Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν οι συντελεστές των ισοβαθμίων όρων είναι ίσοι.

Αφού $P(x) = Q(x)$ τότε

$$\left.\begin{array}{c} a^2-3a=-2 \\ \text{και} \\ a^2=1 \\ \text{και} \\ a^3-1=0 \\ \text{και} \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a^2-3a+2=0 \\ \text{και} \\ a=\pm 1 \\ \text{και} \\ a=1 \\ \text{και} \\ a=1 \end{array}$$

$\left(\Delta = 9-4\cdot 1\cdot 2 = 1, \quad a_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \right.$

$$\begin{array}{c} a=1 \text{ ή } a=2 \\ \text{και} \\ a=1 \text{ ή } a=-1 \\ \text{και} \\ a=1 \\ \text{και} \\ a=1 \end{array}$$