

15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός p είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{p}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση α) i) $P(0) = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$ Άρα 0 $\neq$ ρίζα του $P(x)$

ii) Άρα 0 $\neq$ ρίζα $P(x)$ $P(p) = 0 \Rightarrow 2p^4 - 5p^3 + 4p^2 - 5p + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } P\left(\frac{1}{p}\right) &= 2\left(\frac{1}{p}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{p}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{p}\right) + 2 = \\ &= \frac{2}{p^4} - \frac{5}{p^3} + \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p} + 2 = \frac{2 - 5p + 4p^2 - 5p^3 + 2p^4}{p^4} \\ &= \frac{0}{p^4} = 0 \quad \text{Άρα } \frac{1}{p} \text{ ρίζα} \end{aligned}$$

$$\beta) P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$$

πιθανές διαιρετές $\pm 1, \pm 2$

ελέγχουμε: 1, 2

$$P(1) = 0$$

Δοκιμάζουμε

$$P(1) = 2 - 5 + 4 - 5 + 2 \neq 0$$

$$\beta) P(x) = 0$$

Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & -5 & 4 & -5 & 2 & \\ \downarrow & 4 & -2 & 4 & -2 & \\ \hline 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = \\ &= 32 - 40 + 16 - 10 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(x) = (x-2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{για το } \pi(x) &= 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = \\ &= x^2(2x-1) + 2x-1 = \\ &= (2x-1)(x^2+1) \end{aligned}$$

πιθανές ± 1

$$\pi(1) = 2 - 1 + 2 - 1 \neq 0$$

$$\pi(-1) = -2 - 1 - 2 - 1$$

Δεν έχει διαιρετές ...

$$P(x) = (x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2x-1=0 \\ x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ \text{...} \end{cases}$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \downarrow \\ 2x-1=0 \\ \downarrow \\ x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \downarrow \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

8) $P(x) < 0 \Rightarrow (x-2)(2x-1)(x^2+1) < 0$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$2x-1$	-	0	+	+
x^2+1	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	+

$\Rightarrow P(x) < 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2)$

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

α) $P(x) : (x^2 - 4)$

$$\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta \\ -x^5 \quad +4x^3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -x^2 + \alpha x + \beta \\ +x^2 \quad -4 \\ \hline \alpha x + \beta - 4 \end{array}$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3$$

$$\frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Επί, $P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + \alpha x + \beta - 4$

β) $\hookrightarrow$ $u(x) = 4x + 1$

Εκεί $u(x) = \alpha x + \beta - 4$

(δηλαδή οι συντελεστές των ισοβάθμων όρων να είναι ίσοι)

Λέει $\alpha = 4$

και $\beta - 4 = 1$

$\Rightarrow$

$\alpha = 4$

$\beta = 5$

γ)

αν $\alpha = 4$ $\beta = 5$

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$$

$P(x) < 4x + 1 \Rightarrow (-2, 2) \cup (2, +\infty) \cup \dots$

$$P(x) < 4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1) + 4x+1 < 4x+1 \Leftrightarrow$$

$$(x^2-4)(x^3-1) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1)(x^2+x+1) < 0$$

ρίζες :

$$x=2, x=-2, x=1$$

$$\text{συν } x^2+x+1$$

$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$(x-2)$	-	-	-	0	+
$(x+2)$	-	0	+	+	+
$(x-1)$	-	-	0	+	+
x^2+x+1	+	+	+	+	+
$(x-2)(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$	-	0	+	0	+

$$\text{Δεχ } (x-2)(x+2)(x-1)(x^2+x+1) < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee 1 < x < 2$$

18221. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι

$$E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

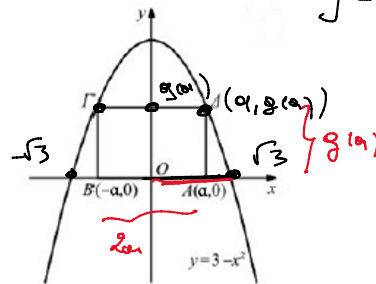
(Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 03)



$$\begin{aligned} \text{το } \hat{y} & \text{ έ } x x' \\ y=0 & \Leftrightarrow 3-x^2=0 \Leftrightarrow \\ x & = \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$g(x) = 3 - x^2$$

$$\textcircled{y = 3 - x^2}$$

↑
το α ή α'

$$\alpha) \quad i) \quad E = AB \cdot AD \quad \text{οπότε} \quad AB = 2\alpha$$

$$AD = g(\alpha) = 3 - \alpha^2$$

$$\text{Επομένως } E = 2\alpha(3 - \alpha^2)$$

$$\text{δηλαδή } \underline{f(\alpha) = 6\alpha - 2\alpha^3}, \quad \alpha \in (0, \sqrt{3})$$

$$ii) \quad \alpha = 1 \quad f(1) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 6 - 2 = 4$$

$$β) \quad \text{νδβ} \quad E \leq 4 \Rightarrow f(\alpha) \leq 4 \Leftrightarrow 6\alpha - 2\alpha^3 \leq 4$$

$$\Rightarrow -2\alpha^3 + 6\alpha - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha(\alpha^2 - 1) + 4(\alpha - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -2\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) + 4(\alpha-1) \leq 0$$

$$-2(\alpha-1)(\alpha(\alpha+1) - 2) \leq 0$$

$$-2(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha - 2) \leq 0$$

$$\Delta = 1 - (-8) = 9$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2$$

	$\alpha < -2$	$\alpha = -2$	$-2 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$-2(\alpha-1)$	+	0	+	0	-
$(\alpha^2 + \alpha - 2)$	+	0	-	0	+
$-2(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha - 2)$	+	0	-	0	-

f) $\alpha \geq 1$ ώστε E να γίνει φυσικό

$$E_{\max} \leq 4 \quad \text{let}$$

$$E_{\max} = 4 \Rightarrow 6\alpha - 2\alpha^3 = 4$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$E_{\max} \quad -2(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2$$

$$\text{αλλά } \alpha \in (0, \sqrt{3})$$

και δίνει $\alpha = 1$

Βεβαιώσ

Εύκολο πάλι να πάρουμε πληροφορίες

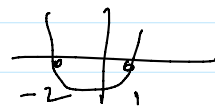
πλάτος δεικτών $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\text{για } x=1 \quad -2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 4 = 0$$

Ημερ

$$\begin{array}{rrrr|l} -2 & 0 & 6 & -4 & 1 \\ & \downarrow & -2 & -2 & 4 \\ \hline -2 & -2 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\text{let } -2\alpha^3 + 6\alpha - 4 = (\alpha-1)(-2\alpha^2 - 2\alpha + 4)$$



let

$$-2\alpha(\alpha-1)(\alpha+1) + 4(\alpha-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \geq -2$$

αφού

$$\alpha \in (0, \sqrt{3}) \text{ η ανίχνευση}$$

Οι τιμές ΠΑΝΤΑ για να $\alpha \in (0, \sqrt{3})$

