

1. Δίνεται  $f: Y \rightarrow Y$ , με  $f(1) = 1$  και έστω  $F$  μία αρχική της  $f$  στο  $Y$  για την οποία ισχύει  $F(\chi) \cdot f(2-\chi) = 1 \quad \forall \chi \in Y$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(\chi) = F(\chi) \cdot F(2-\chi)$  είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

2. Δίνεται συνεχής  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(1) = 2$  και έστω μία  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  αρχική της  $f$  για την οποία ισχύει

$$f(\chi) \cdot F\left(\frac{1}{\chi}\right) = \frac{6}{\chi} \quad \forall \chi > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(\chi) > 0$  και  $F(\chi) > 0 \quad \forall \chi > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(\chi) = F(\chi) \cdot F\left(\frac{1}{\chi}\right)$  είναι σταθερή,  $\forall \chi > 0$

γ) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

3. (Γ 2022) . Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  και για την παράγωγο  $f'$  της  $f$  ισχύει ότι:

$$f'(\chi) = \begin{cases} -2, & \chi < -1 \\ 3\chi^2 - 1, & \chi > -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:  $f(\chi) = \begin{cases} -2\chi - 2, & \chi \leq -1 \\ \chi^3 - \chi, & \chi > -1 \end{cases}$

**Μονάδες 6**

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με

$x_0 > -1$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $-2$ .

**Μονάδες 5**

Γ3. Έστω  $y = 2x - 2$  η εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 2$  κινείται κατά μήκος της ευθείας ( $\epsilon$ ). Έστω ακόμα  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $MKG$ , όπου  $K$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$  και  $G$  είναι το σημείο με συντεταγμένες  $(2, 0)$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $B(3, 4)$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$

**Μονάδες 8**

4. Δίνεται παραγωγίσιμη  $f: (0, +\infty) \rightarrow \Upsilon$  και έστω  $G$  αρχική της  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $x > 0$ , για την οποία ισχύει  $G(1) = 0$

και  $\chi f(\chi) + 1 = -\chi G(\chi) \quad \forall \chi > 0$ .

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

γ) Να λύσετε στο  $(0, \frac{\pi}{2})$  την εξίσωση  $\left(\frac{\eta\mu\chi}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu\chi} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{e}\right)^{\eta\mu\chi}$

δ) Να αποδείξετε ότι  $G(\chi^2 + 7) > \frac{G(x^2 + 6) + G(x^2 + 8)}{2} \quad \forall x \in \Upsilon$