

1. Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής,

β) Αποδείξτε ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$, για κάθε $a > e$,

γ) Αποδείξτε ότι $e^\pi > \pi^e$,

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x^2 + 1) + x + 1 = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

2.

Α) Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $e^x \cdot f'(x) = g'(x) - g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = g(0) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{g(x)}{e^x}$,

β) Αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi = x - 2$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - x^2 e^x} = -1/2$.

Β) Να βρείτε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \sqrt{\beta x^2 + \gamma x - 1}$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ μια ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $\psi = 2x - 11$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = -1$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + x e^{-x}$.

α) Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο $(0, f(0))$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon): 2x - y + 7 = 0$,

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

γ) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του καμπυλόγραμμου χωρίου, που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda$ ($\lambda > 0$),

ε) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

4. Α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε το λ .

Β) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta \mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ είναι πραγματικός αριθμός,

β) Να βρείτε τον αριθμό $f'(0)$.

5. Α) Δίνεται η συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x) \cdot (f \circ f)(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(10) = 9$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

Β) Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(5, 9)$ και $B(3, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα,

β) να λύσετε την εξίσωση: $g(2 + g^{-1}(x^2 + 2x)) = 9$.

Γ) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον η f' είναι 1-1. Αν οι συναρτήσεις f και $f \circ g$ παρουσιάζουν ακρότατο στο 1 και είναι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $g(1) = 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^3$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα,

β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{x^2-1} - 2^{3x^2-9} = (3x^2 - 9)^3 - (x^2 - 1)^3$,

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\rho_1+3}^{\rho_2+2003} x \cdot e^{x-2002} dx$, όπου $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

7.

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e + x \ln x - 2x$, $x > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία της,

β) Να διατάξετε τους αριθμούς $f(e)$, $f(\pi)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $e^{e-2\pi} \cdot \pi^\pi > 1$.

B) α) Να αποδείξετε ότι $x \ln x + 1 > x$, για κάθε $x > 1$,

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x}{x-1}$,

γ) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί τη σχέση:
 $(a^2 + a + 1) \cdot \ln(a^2 + 5) = (a^2 + 4) \cdot \ln(a^2 + a + 2)$.

8. **A)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx + \gamma$. Αν η f είναι περιττή, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ και $\int_0^2 f(x) dx = 2$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, γ .

B) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και g πολυωνυμική συνάρτηση τέτοια ώστε $g(0) = 0$ και $\int_0^1 f(x) dx = g(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g'(\xi)$.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) + 2xf(x) = e^{x-x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{x^2} f(x) - e^x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,

β) Βρείτε την συνάρτηση g εάν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - \eta \mu x}{x} = -1$,

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f ,

δ) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,

ε) Δείξτε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι μοναδική.

10. **A)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x + 6}{x + \beta}$, με $\chi > -1$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $\psi = 2$ και $\chi = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{2x + 6}{x + 1}$, $\chi > -1$,

β) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύει $g'(x) = f(x)$, για κάθε $\chi > -1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$,

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x) = \frac{g(x)}{x + 1}$, $\chi > -1$.

B) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να ισχύει $f(\chi) - g(\chi) = \chi - 4$,

για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Αν

η ευθεία $\psi = 3\chi - 7$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x - 7}{xf(x) - 3x^2 + 1} = -\frac{5}{7}.$$

11. **A)** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi - \eta\mu\chi$, $\chi \in [0, \pi]$.

α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, \pi]$,

β) Να δειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το σύνολο τιμών της,

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(\chi) = \chi$,

δ) Αποδείξτε ότι $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x) dx = \pi^2 + 2$.

12. **A)** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$2f(x) + f(2022 - x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$.

B) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$f'(x) + f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e + 1$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f ,

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} f(xy))$.

13. **A)** α) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες ($n \in \mathbb{N}$), τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ $n+1$ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

A) α) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[a, \beta]$. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a, \beta]$, να δείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$.

14. **A)** α) Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $\chi \in [a, \beta]$ και $\int_a^\beta f(\chi) dx = 0$, να δείξετε ότι

$f(x) = 0$, για κάθε $\chi \in [a, \beta]$.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και

$$\int_0^1 \ln^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 \left(\chi^2 \ln f(\chi) - \frac{\chi^4}{2} \right) dx.$$

β1) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$

β2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx$.

B) Έστω η συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε :

$$f'(25) + f'(20) = f'(35) + f'(10).$$

α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (10, 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10, 35)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

15. **A)** Η συνάρτηση $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με την ιδιότητα $\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{f(x)}{e}\right)^2 = 1$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

B) Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $x^{f(x)} = e^{x-f(x)}$, για κάθε $x > 1$. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 1.

Γ) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e^{f(x)} \geq af(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$, να βρείτε το a .

16.) α) Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\ln(\ln x)$, $x > 1$. Δείξτε ότι είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$ και ότι για $\alpha, \beta > 1$ ισχύει $\ln\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$.

B) Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ είναι κυρτή στο $\Delta \Leftrightarrow f(x)f''(x) > (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \Delta$.

17. **A)** Έστω $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 2)$: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

B) Έστω f στο συνεχές $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$.

Να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$: $f(\gamma) = \alpha + \beta - \gamma$

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Γ) Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ με $f(0) = f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 3)$: $f'(\alpha) + f'(\beta) + f'(\gamma) = 0$.

18. **A)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x > 0$, $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$.

α) να βρείτε τον τύπο της f

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$

δ) να αποδείξετε ότι $f(10) + f(12) > 2f(11)$.

B) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ συνάρτηση και $f'(1) = 1$ με $\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x) dx = \int_2^1 f(x) dx$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$: $f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0$.

19. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -x^2 + (a+1)x - a$, όπου $a > 1$. Σημείο $A = (a, 0)$ κινείται πάνω στον άξονα με ταχύτητα 2cm/sec.

α. Την χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $a = 3$ να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής:

⇒ της μέγιστης τιμής της συνάρτησης f

⇒ Του εμβαδού του χωρίου το οποίο ορίζεται : από την f και τον άξονα xx'

β. Με την προϋπόθεση ότι το σημείο M είναι εκείνο στο οποίο η f παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της τότε να αποδειχθεί ότι το σημείο M κινείται σε κλάδο παραβολής όταν το a διατρέχει το σύνολο $(1, +\infty)$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \eta \mu x$, $x \in [0, 2\pi]$

α. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της C_f

β. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται

γ. Με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η f^{-1} , να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2}$, $x > 0$ και $\alpha > 0$ (σταθερός). i) Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου

Ω που περικλείεται από την C_f , τον xx' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=\lambda$, $\lambda > 1$, ii) Να βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lambda)$, iii) Να βρείτε την ευθεία $\varepsilon: x=\beta$, $\beta \in (1, \lambda)$ η οποία χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

22. Έστω η συνάρτηση $f: 3 \rightarrow 3$ με την ιδιότητα $f^3(x) + 3f(x) = x$, για κάθε $x \in 3$

A. Να αποδειχθεί ότι

i) η f είναι συνεχής, ii) η f είναι παραγωγίσιμη, iii) η f αντιστρέφεται, iv) η f έχει σύνολο τιμών το 3

B. i) Να ορισθεί η f^{-1} , ii) Να λυθεί η $f(x) = x$, iii) Να βρεθεί η μονοτονία της f με δύο τρόπους, iv) Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι συνεχής (χωρίς αναφορά στο A), iv) Να

υπολογιστεί το $I = \int_0^4 f(x) dx$