

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$ και άρα δεν τέμνει τον $x'x$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned} f(x) &< 2x + 3 \Leftrightarrow \\ x^2 + x + 1 &< 2x + 3 \Leftrightarrow \\ x^2 - x - 2 &< 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

Συνεπώς $x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$.

γ) Αφού $|2x - 1| < 3$, έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} |2x - 1| &< 3 \Leftrightarrow \\ -3 &< 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow \\ -3 + 1 &< 2x - 1 + 1 < 3 + 1 \Leftrightarrow \\ -2 &< 2x < 4 \Leftrightarrow \\ -1 &< x < 2 \end{aligned}$$

Αφού για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $-1 < x < 2$ τότε, όπως δείξαμε στο ερώτημα β), το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.