

Α' Λυκείου - Άλγεβρα

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης

Μέθοδοι Παραγοντοποίησης

■ Κοινός Παράγοντας

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y)$$

■ Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

$$\begin{aligned}\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y &= \\ \underbrace{\alpha x + \alpha y} + \underbrace{\beta x + \beta y} &= \\ \alpha(x + y) + \beta(x + y) &= (\alpha + \beta)(x + y)\end{aligned}$$

■ Διαφορά Τετραγώνων

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

■ Διαφορά Κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

■ Άθροισμα Κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

■ Τέλειο Τετράγωνο (Ανάπτυγμα τετραγώνου)

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

και

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Κοινός Παράγοντας

$$\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y)$$

Παραδείγματα

- $3x + 3y = 3(x + y)$
- $10x + 5 = 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 5(2x + 1)$
- $x^2 + x = x \cdot x + x \cdot 1 = x(x + 1)$
- $3x^3 - 9x^2 = 3x^2 \cdot x - 3 \cdot 3x^2 = 3x^2(x - 3)$
- $7x^2 + 7x + 14x^3 = 7x(x + 1 + 2x^2)$

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες - Ομαδοποίηση

$$\begin{aligned} & \alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \\ & \underline{\alpha x + \alpha y} + \underline{\beta x + \beta y} = \\ & \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (\alpha + \beta)(x + y) \end{aligned}$$

Παραδείγματα



$$\begin{aligned} & 3x + 3y + x^2 + xy = \\ & 3(x + y) + x(x + y) = \\ & (3 + x)(x + y) \end{aligned}$$

Κοινός παράγοντας κατά ομάδες - Ομαδοποίηση

Παραδείγματα



$$\begin{aligned}x^2 + 5x + 6 &= \\x^2 + 3x + 2x + 6 &= \\x(x + 3) + 2(x + 3) &= \\(x + 2)(x + 3)\end{aligned}$$

Διαφορά Τετραγώνων

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Παραδείγματα

- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$
- $4x^2 - y^2 = (2x)^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$
- $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$

Διαφορά Κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Παραδείγματα

- $\alpha^3 - 27 = \alpha^3 - 3^3 = (\alpha - 3)(\alpha^2 + 3\alpha + 3^2) = (\alpha - 3)(\alpha^2 + 3\alpha + 9)$
- $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Άθροισμα Κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Παραδείγματα

- $y^3 + 1 = y^3 + 1^3 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$



$$\begin{aligned} 27x^3 + 8 &= (3x)^3 + 2^3 = (3x + 2) \left[(3x)^2 - 3x \cdot 2 + 2^2 \right] \\ &= (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

Τέλειο τετράγωνο (Ανάπτυγμα τετραγώνου)

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

και

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραδείγματα

- $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$
- $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$

Απλοποίηση κλάσματος

Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους παραγοντοποίησης μπορούμε να απλοποιήσουμε σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα, οι όροι των οποίων είναι αλγεβρικές παραστάσεις.

Για να το πετύχουμε αυτό, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- 1 Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή κάθε κλάσματος.
- 2 Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή κάθε κλάσματος.
- 3 Απαλείφουμε τους κοινούς παράγοντες που υπάρχουν και σε αριθμητή και σε παρονομαστή.

Απλοποίηση κλάσματος

Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x} \cdot \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Λύση:

- Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή του πρώτου κλάσματος:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος:

$$x^3 - x^2 + x = \text{Κοινός παράγοντας} x(x^2 - x + 1)$$

Απλοποίηση κλάσματος

- Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή του δεύτερου κλάσματος:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Απλοποίηση κλάσματος

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x} \cdot \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{x(x^2-x+1)} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x+1)^{\cancel{2}}} \\&= \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x^2-x+1)}} \cdot \frac{\cancel{x^2-x+1}}{\cancel{x+1}} \\&= \frac{x-1}{x}\end{aligned}$$