

Α' Λυκείου - Άλγεβρα

Πράξεις και ανισότητες

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \geq 0 \\ \text{και} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta \geq 0$$

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα ενός θετικού και ενός μη αρνητικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα ενός θετικού και ενός μη αρνητικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα ενός θετικού και ενός μη αρνητικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

Γνήσια ανισότητα

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

Άθροισμα και ανισότητες

Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha < 0 \\ \text{και} \\ \beta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha < 0 \\ \text{και} \\ \beta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Παράδειγμα

Το -5 και το -7 είναι αρνητικοί αριθμοί, ενώ το γινόμενό τους είναι

Γινόμενο και ανισότητες

Παράδειγμα

Το -5 και το -7 είναι αρνητικοί αριθμοί, ενώ το γινόμενό τους είναι

$$(-5) \cdot (-7) = +35 > 0$$

θετικός αριθμός

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Παράδειγμα

Το 5 είναι θετικός αριθμός και το -7 είναι αρνητικός αριθμός. Το γινόμενό τους είναι

Γινόμενο και ανισότητες

Παράδειγμα

Το 5 είναι θετικός αριθμός και το -7 είναι αρνητικός αριθμός. Το γινόμενό τους είναι

$$5 \cdot (-7) = -35$$

αρνητικός αριθμός

Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

Υπενθύμιση

- ▶ Δύο αριθμοί λέγονται **ομόσημοι** αν έχουν το ίδιο πρόσημο· δηλαδή, αν είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.
- ▶ Δύο αριθμοί λέγονται **ετερόσημοι** αν έχουν διαφορετικό πρόσημο· δηλαδή, αν ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός.

Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

Δύο αριθμοί είναι ομόσημοι αν και μόνο αν το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός (ή ισοδύναμα αν το πηλίκο τους είναι θετικός αριθμός)

Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

Δύο αριθμοί είναι ομόσημοι αν και μόνο αν το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός (ή ισοδύναμα αν το πηλίκο τους είναι θετικός αριθμός)

$$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

Δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι αν και μόνο αν το γινόμενό τους είναι αρνητικός αριθμός (ή ισοδύναμα αν το πηλίκο τους είναι αρνητικός αριθμός)

Ομόσημοι και ετερόσημοι αριθμοί

Δύο αριθμοί είναι ετερόσημοι αν και μόνο αν το γινόμενό τους είναι αρνητικός αριθμός (ή ισοδύναμα αν το πηλίκο τους είναι αρνητικός αριθμός)

$$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \beta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο δύο μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \geq 0 \\ \text{και} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$$

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο ενός θετικού και ενός μη αρνητικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Γινόμενο και ανισότητες

Το γινόμενο ενός θετικού και ενός μη αρνητικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{και} \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$$

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$a^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\alpha^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

☞ Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = 0$.

Δηλαδή,

$$\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Επίσης

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Επίσης

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0$$

Τετράγωνο πραγματικών αριθμών

Επίσης

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0$$

και

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq 0 \quad \text{ή} \quad \beta \neq 0$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη:

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha - 2)^2 \geq 0$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

Απόδειξη: Έχουμε

Είναι τετράγωνο πραγματικού αριθμού, άρα είναι μη αρνητικός αριθμός

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 4 &\geq 4\alpha && \Leftrightarrow && \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \\ &&& \Leftrightarrow && (\alpha - 2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Απόδειξη ανισοτήτων

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha - 2)^2 \geq 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική.