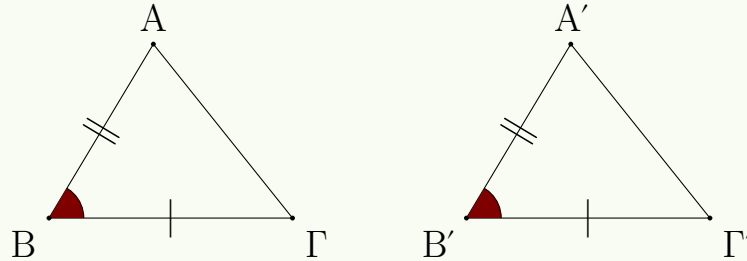


Α' Λυκείου – Γεωμετρία

Κεφάλαιο 3: Τρίγωνα

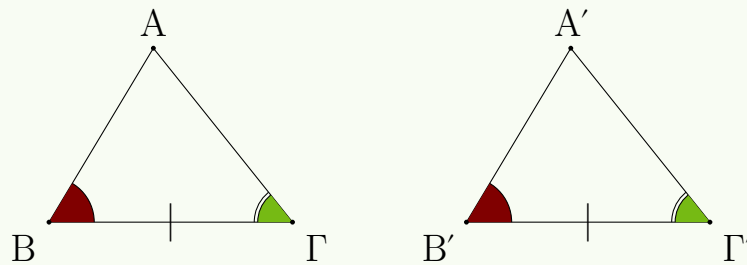
Θεώρημα 1: 1^ο Κριτήριο - ΠΓΠ

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



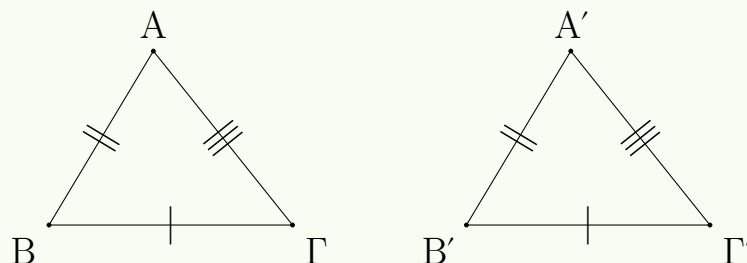
Θεώρημα 2: 2^ο Κριτήριο - ΓΠΓ

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



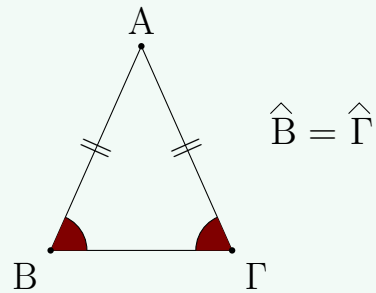
Θεώρημα 3: 3^ο Κριτήριο - ΠΠΠ

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

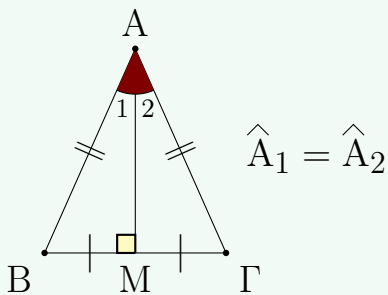


Πόρισμα 1

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.



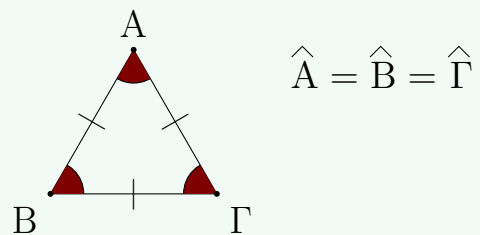
Πόρισμα 2



Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος, η διάμεσος και το ύψος που αντιστοιχούν στη βάση ταυτίζονται.

Πόρισμα 3

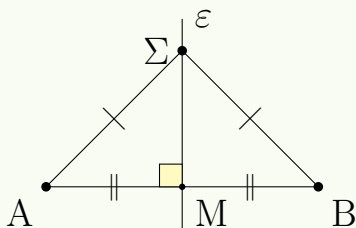
Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες.



Θεώρημα 4: Η ιδιότητα της μεσοκάθετου

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Και αντιστρόφως, κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στην μεσοκάθετό του.



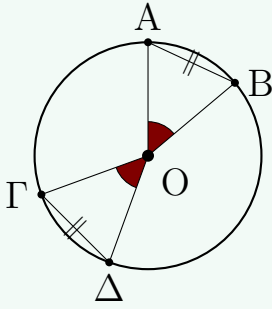
Αν $\Sigma A = \Sigma B$, τότε το σημείο Σ ανήκει στη μεσοκάθετο.

Αν το σημείο Σ ανήκει στη μεσοκάθετο, τότε $\Sigma A = \Sigma B$.

Πόρισμα 4

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Και αντιστρόφως, αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων/μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

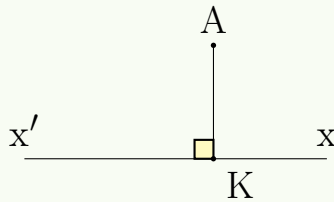


Αν $AB = \Gamma\Delta$, τότε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ (δηλ. $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma OD}$)

Αν $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε $AB = \Gamma\Delta$

Θεώρημα 5: Ύπαρξη και μοναδικότητα της κάθετου

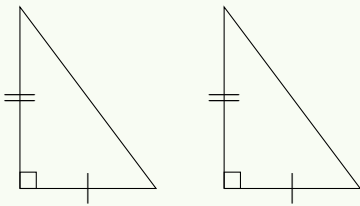
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.



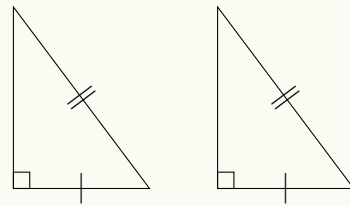
Θεώρημα 6: Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Αν για δύο **ορθογώνια** τρίγωνα ισχύει τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες, τότε είναι ίσα.

- Δύο ομόλογες πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία.

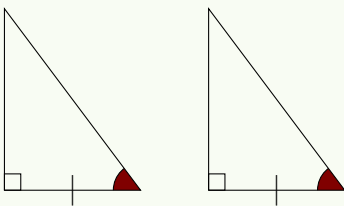


ή

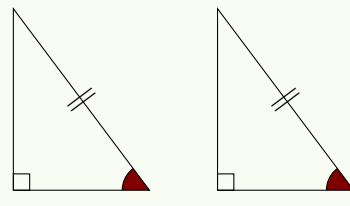


(Κάθετη με κάθετη, υποτείνουσα με υποτείνουσα.)

- Μία πλευρά και η προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία είναι αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

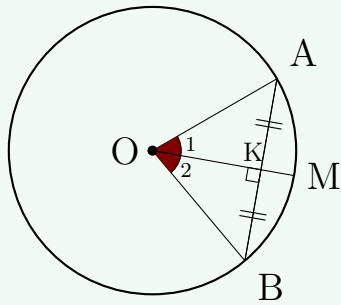


ή



Πόρισμα 5

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μία χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.



Αν $OK \perp AB$, τότε:

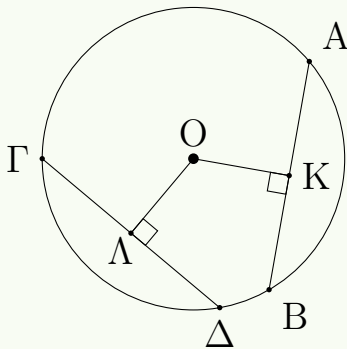
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\widehat{AM} = \widehat{MB}$$

$$AK = KB$$

Θεώρημα 7

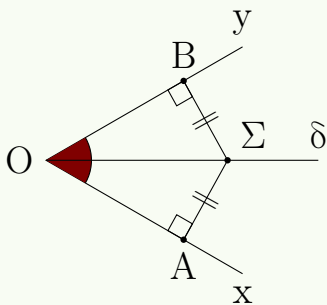
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



$$AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow OK = OL$$

Θεώρημα 8: Η ιδιότητα της διχοτόμου

Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.



Αν $\Sigma A = \Sigma B$, τότε το σημείο Σ ανήκει στη διχοτόμο.

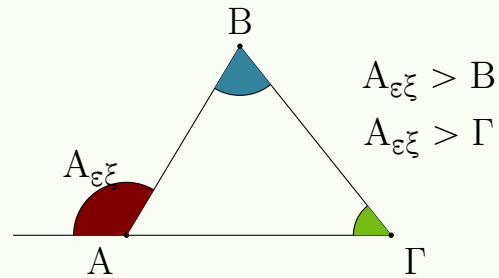
Αν το σημείο Σ ανήκει στη διχοτόμο, τότε $\Sigma A = \Sigma B$.

ΣA : απόσταση του Σ από την Ox .

ΣB : απόσταση του Σ από την Oy .

Θεώρημα 9

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι γωνίες τους τριγώνου.



Πόρισμα 6

- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία γωνία ορθή ή αμβλεία.
- Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

Θεώρημα 10

Σε ένα τρίγωνο απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντίστροφα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Μάλιστα, απέναντι από μεγαλύτερη γωνία υπάρχει μεγαλύτερη πλευρά και αντίστροφα.

Πόρισμα 7

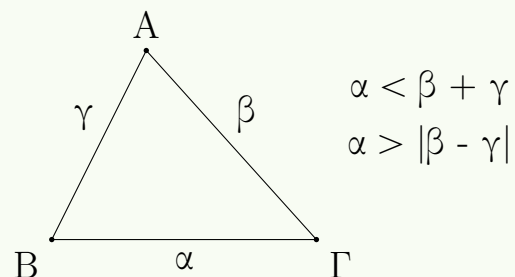
- Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά.
- Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι η μεγαλύτερη.

Πόρισμα 8

- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Θεώρημα 11: Τριγωνική ανισότητα

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά τους.



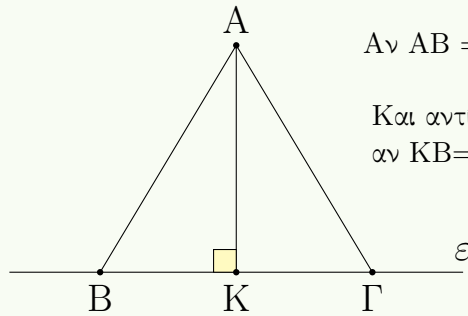
Πόρισμα 9

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

Θεώρημα 12

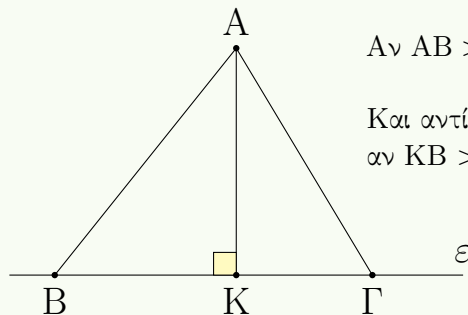
- Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερα από κάθε πλάγιο τμήμα.
- Έστω μία ευθεία ε και A σημείο εκτός αυτής. Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου.
- Και αντίστροφα, αν τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, τότε τα δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα.

Μάλιστα, στο ίχνος του μεγαλύτερου πλάγιου τμήματος αντιστοιχεί μεγαλύτερη απόσταση από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.



Αν $AB = AG$, τότε $KB = KG$.

Και αντίστροφα,
αν $KB = KG$, τότε $AB = AG$.



Αν $AB > AG$, τότε $KB > KG$.

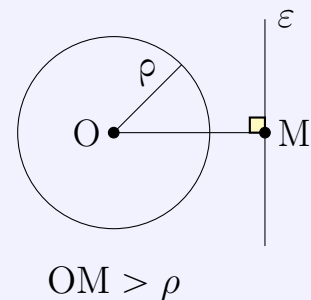
Και αντίστροφα,
αν $KB > KG$, τότε $AB > AG$.

Θεώρημα 13

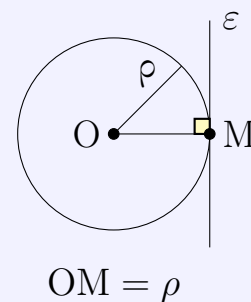
Μία ευθεία και ένα κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

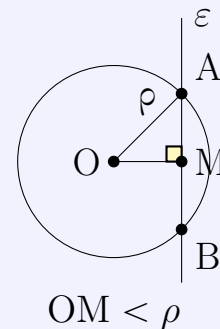
- Όταν η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέμε ότι η ευθεία είναι **εξωτερική** του κύκλου. Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση OM του κέντρου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή **$OM > \rho$** .



- Όταν η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέμε ότι η ευθεία είναι **εφαπτομένη** του κύκλου και το σημείο αυτό λέγεται **σημείο επαφής**. Λέμε επίσης ότι η ευθεία **εφάπτεται** του κύκλου στο σημείο επαφής. Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση OM του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή **$OM = \rho$** .



- Όταν η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία A και B λέμε ότι η ευθεία είναι **τέμνουσα** του κύκλου ή ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο στα σημεία A και B. Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση OM του κέντρου από την ευθεία είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή **$OM < \rho$** .

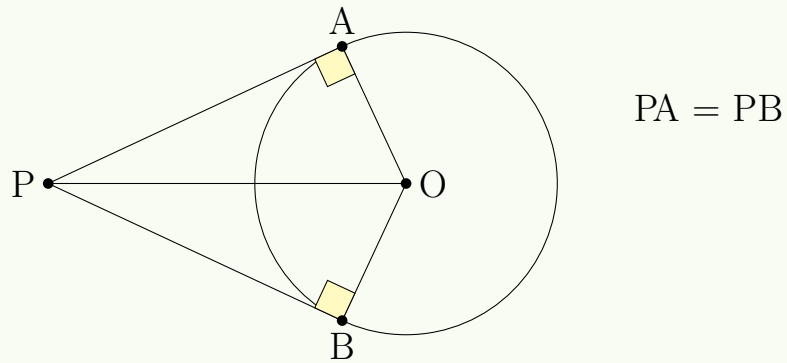


Θεώρημα 14

- Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.
- Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

Θεώρημα 15

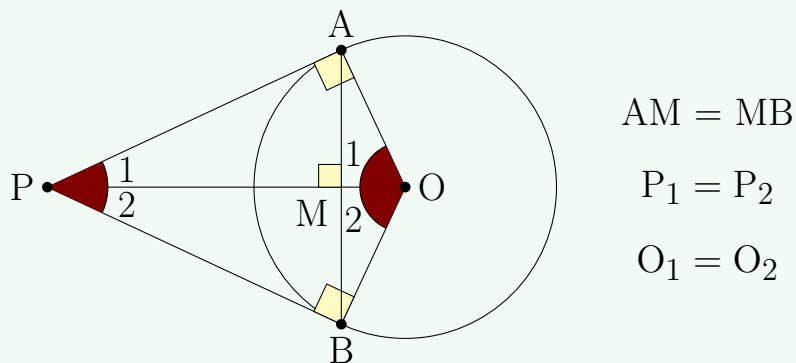
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



Πόρισμα 1

Η διακεντρική ευθεία ενός εξωτερικού σημείου ενός κύκλου

- είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.



Ορισμός 1: Διάκεντρος δύο κύκλων

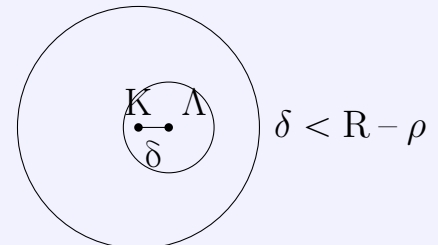
Έστω δύο κύκλοι με κέντρο K και Λ αντίστοιχα. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$, που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων, λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ .

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) έτσι ώστε $\rho \leq R$. Για τις σχετικές θέσεις τους υπάρχουν οι ακόλουθες πέντε περιπτώσεις.

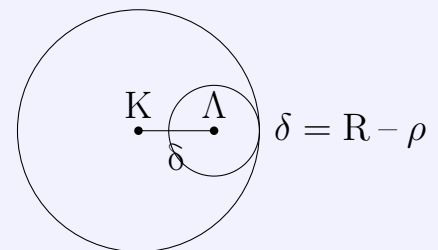
- Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι στο εσωτερικό του κύκλου (K, R) και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\delta < R - \rho.$$



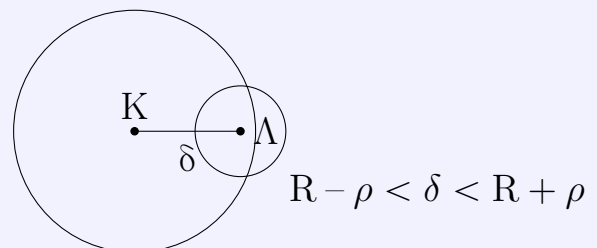
- Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**: δηλαδή ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (K, R) και έχουν ένα κοινό σημείο. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\delta = R - \rho.$$



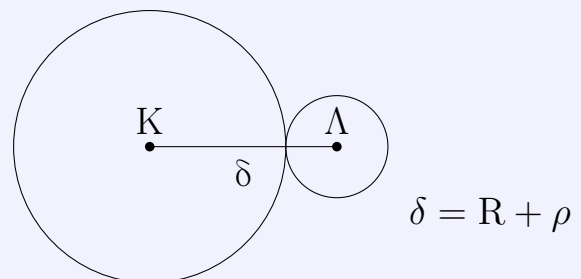
- Οι δύο κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$R - \rho < \delta < R + \rho.$$



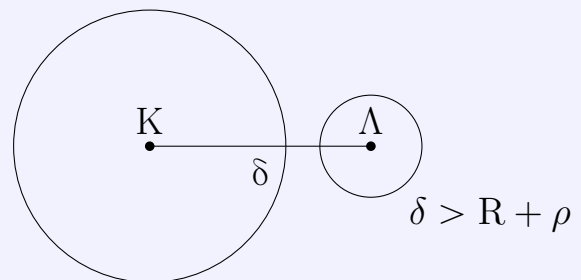
- Οι δύο κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**: δηλαδή ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου και έχουν ένα κοινό σημείο. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\delta = R + \rho.$$



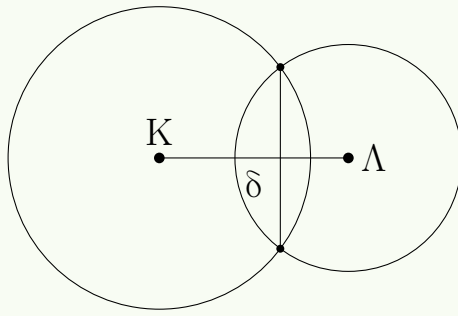
- Κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\delta > R + \rho.$$



Θεώρημα 16

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



$$R - \rho < \delta < R + \rho$$