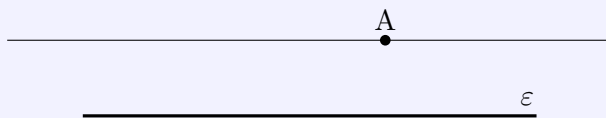


# Α' Λυκείου – Γεωμετρία

## Κεφάλαιο 4: Παράλληλες Ευθείες

### Αίτημα Παραλληλίας

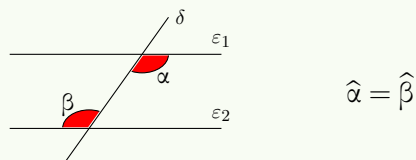
Έστω μία ευθεία  $\varepsilon$ . Από σημείο εκτός της  $\varepsilon$  άγεται μοναδική παράλληλη προς την  $\varepsilon$ .



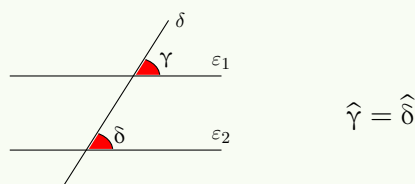
### Θεώρημα 1

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, τότε σχηματίζουν

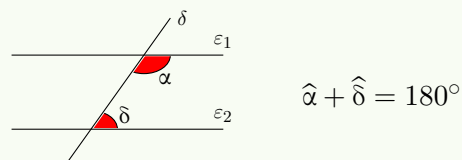
- τις εντός και εναλλάξ γωνίες τους ίσες



- τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες



- τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους παραπληρωματικές.



Επιπλέον, ισχύουν και τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων. Δηλαδή, αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη και ισχύει μία από τις παραπάνω τρεις συνθήκες, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

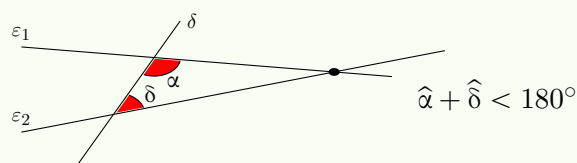
### Τρόποι για να αποδεικνύουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες

Έστω δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Για να είναι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  παράλληλες, αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες

- Να τέμνονται από μία τρίτη ευθεία και να σχηματίζουν τις εντός και εναλλάξ γωνίες τους ίσες.
- Να τέμνονται από μία τρίτη ευθεία και να σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες τους ίσες.
- Να τέμνονται από μία τρίτη ευθεία και να σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.
- Να είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (σε διαφορετικά σημεία της).
- Να είναι παράλληλες σε μία τρίτη ευθεία.

### Θεώρημα 2

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές ( $180^\circ$ ), τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.



## Πόρισμα 1

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές ( $180^\circ$ ).

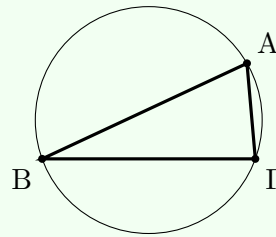
## Θεώρημα 3: Γωνίες με παράλληλες πλευρές

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι

- **ίσες** αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες
- **παραπληρωματικές** αν είναι η μία οξεία και η άλλη αμβλεία.

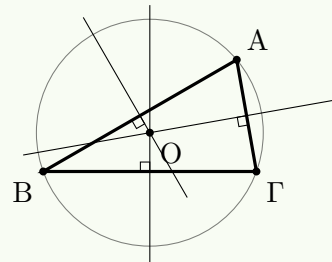
## Ορισμός 1: Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου – Περίκεντρο

Ο κύκλος που διέρχεται και από τις τρεις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου και το κέντρο του λέγεται **περίκεντρο**.

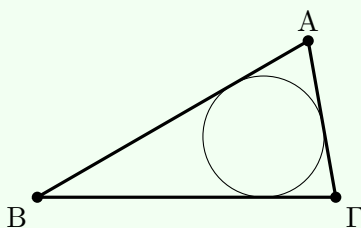


## Θεώρημα 4

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, δηλαδή το περίκεντρο.

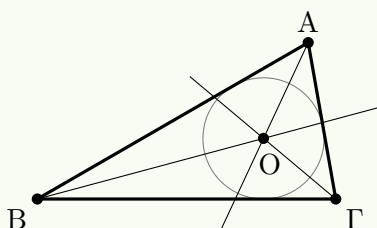


## Ορισμός 2: Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου – Έγκεντρο



Ο κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές ενός τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου και το κέντρο του λέγεται **έγκεντρο**.

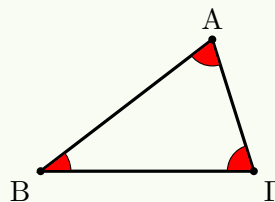
## Θεώρημα 5



Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου, δηλαδή το έγκεντρο.

### Θεώρημα 6: Άθροισμα γωνιών τριγώνου

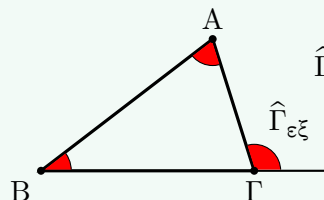
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ .



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

### Πόρισμα 1

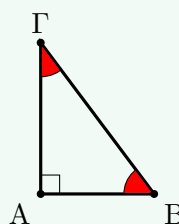
(α) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.



$$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta} = \hat{A} + \hat{B}$$

(β) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

(γ) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.



$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$$

(δ) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι ίση με  $60^\circ$ .

### Θεώρημα 7: Γωνίες με κάθετες πλευρές

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία είναι

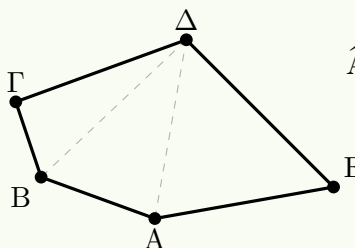
- **ίσες** αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες
- **παραπληρωματικές** αν είναι η μία οξεία και η άλλη αμβλεία.

### Θεώρημα 8: Άθροισμα γωνιών κυρτού $\nu$ -γώνου

Για παράδειγμα, στα πεντάγωνα (δηλαδή για  $\nu = 5$ ) το άθροισμα των γωνιών είναι

$$(5 - 3) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ.$$

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού  $\nu$ -γώνου είναι ίσο με  $(\nu - 2) \cdot 180^\circ$ .



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ$$

### Πόρισμα 1

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού  $\nu$ -γώνου είναι ίσο με  $360^\circ$ .