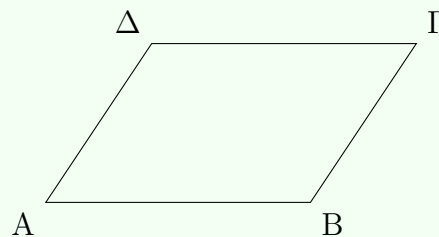


Α' Λυκείου – Γεωμετρία

Κεφάλαιο 5: Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Ορισμός: Παραλληλόγραμμα

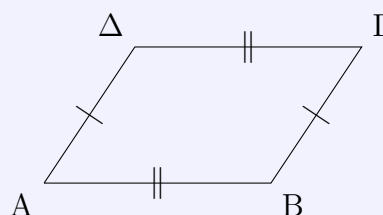
Παραλληλόγραμμα λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



Ιδιότητες Παραλληλογράμων

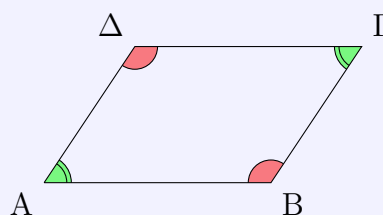
Σε κάθε παραλληλόγραμμα

- οι απέναντι πλευρές είναι ίσες,



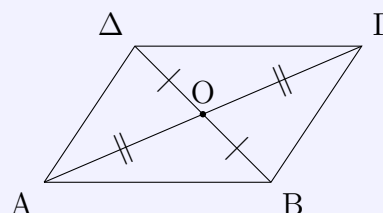
$$AB = \Delta\Gamma \\ \text{και} \\ A\Delta = B\Gamma$$

- οι απέναντι γωνίες είναι ίσες,



$$\hat{A} = \hat{\Gamma} \\ \text{και} \\ \hat{\Delta} = \hat{B}$$

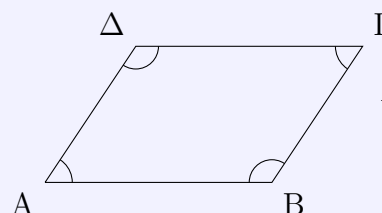
- οι διαγώνιοι διχοτομούνται.



$$O\Delta = O\Gamma \\ \text{και} \\ O\Lambda = O\Gamma$$

Επιπλέον,

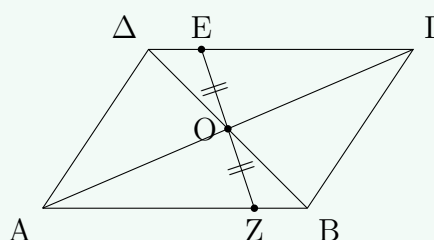
- δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές.



$$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ \\ \text{και} \\ \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

Πόρισμα

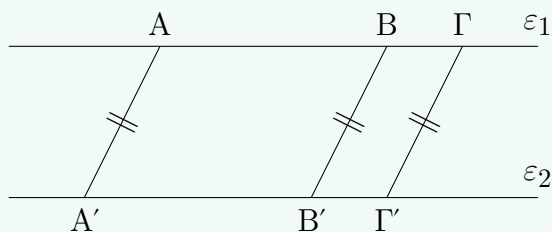
Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.



$$OE = OZ$$

Πόρισμα

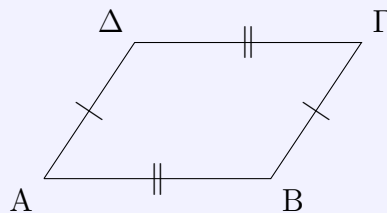
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.



Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

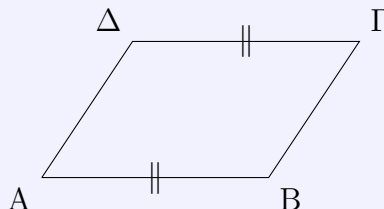
Για να είναι παραλληλόγραμμο ένα τετράπλευρο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες.



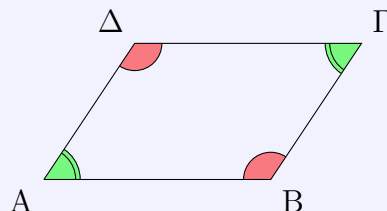
$$\begin{aligned} AB &= \Delta\Gamma \\ \text{και} \\ A\Delta &= B\Gamma \end{aligned}$$

- Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.



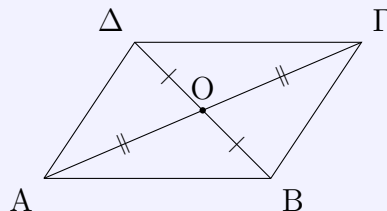
$$\begin{aligned} AB &= \Delta\Gamma \\ \text{και} \\ AB &\parallel \Delta\Gamma \end{aligned}$$

- Οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες.



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{\Gamma} \\ \text{και} \\ \hat{\Delta} &= \hat{B} \end{aligned}$$

- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

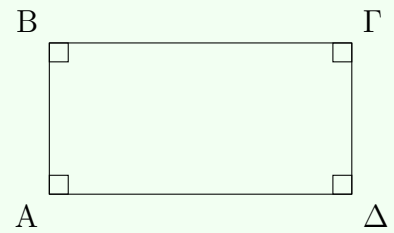


$$\begin{aligned} O\Delta &= OB \\ \text{και} \\ OA &= O\Gamma \end{aligned}$$

☞ Για να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, μπορούμε, βέβαια, να χρησιμοποιήσουμε και τον ορισμό του παραλληλογράμμου· αρκεί, δηλαδή, να δείξουμε ότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

Ορισμός: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

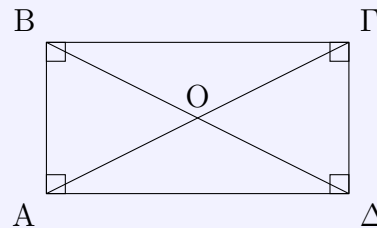
Ένα παραλληλόγραμμο λέγεται **ορθογώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Επειδή σε ένα παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, για να είναι ορθογώνιο ένα παραλληλόγραμμο, αρκεί να έχει μία γωνία ορθή.



Ιδιότητες ορθογώνιων παραλληλόγραμμων

Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Επιπλέον,

- όλες οι γωνίες του είναι ορθές και
- οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



$$B\Delta = A\Gamma$$

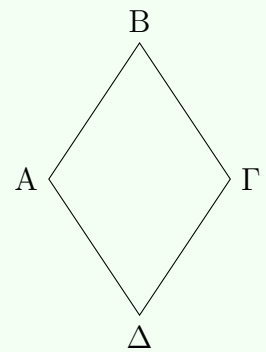
Κριτήρια για ορθογώνια παραλληλόγραμμο

Για να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ένα τετράπλευρο, αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ορισμός: Ρόμβος

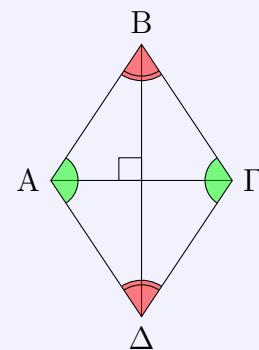
Ένα παραλληλόγραμμο λέγεται **ρόμβος** αν έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επειδή σε ένα παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ανά δύο ίσες, για να είναι ρόμβος ένα παραλληλόγραμμο, αρκεί να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Ιδιότητες ρόμβων

Κάθε ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμων. Επιπλέον,

- οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και
- οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.



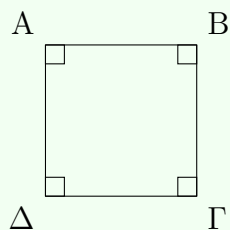
Κριτήρια για ρόμβους

Για να είναι ρόμβος ένα τετράπλευρο, αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Ορισμός: Τετράγωνο

Τετράγωνο είναι ένα παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Ιδιότητες τετραγώνων

Κάθε τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων, των ορθογώνιων και των ρόμβων. Δηλαδή, σε κάθε τετράγωνο

- οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες,
- όλες οι πλευρές του είναι ίσες,
- όλες οι γωνίες του είναι ορθές,
- οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

Κριτήρια για τετράγωνα

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αρκεί να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

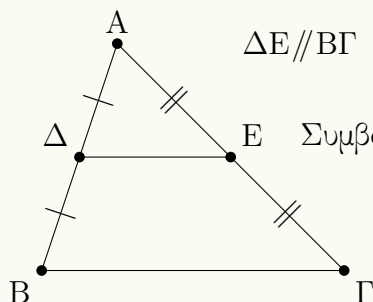
Στην περίπτωση που γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο είναι **παραλληλόγραμμο**, για να δείξουμε ότι είναι τετράγωνο, αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
2. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
3. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
4. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
5. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
6. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

Θεώρημα I (5.6)

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

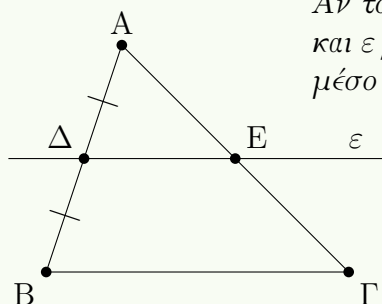


$$DE \parallel BC \text{ και } DE = \frac{BC}{2}$$

Συμβολίζουμε: $DE \parallel = \frac{BC}{2}$

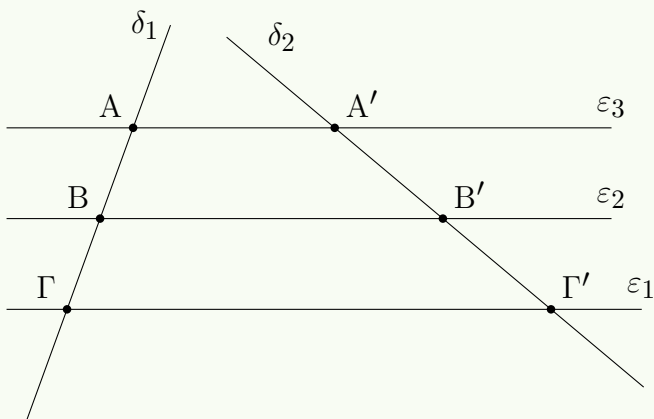
Θεώρημα II (5.6)

Αν από το μέσο μίας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



Αν το Δ είναι μέσο της AB και $DE \parallel BC$, τότε το E είναι μέσο της AC.

Θεώρημα III (5.6)



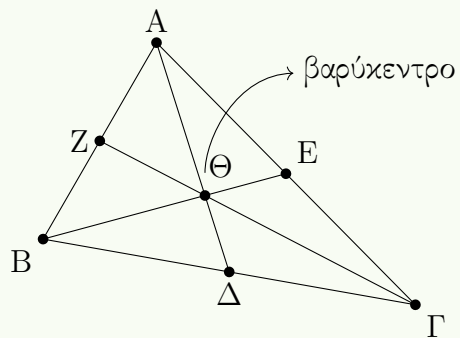
Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

$$\text{Αν } AB = BG, \text{ τότε } A'B' = B'\Gamma'$$

Θεώρημα (5.7)

Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επιπλέον, η απόσταση αυτού του σημείου από κάθε κορυφή είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Το σημείο τομής των τριών διαμέσων καλείται **βαρύκεντρο** ή **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

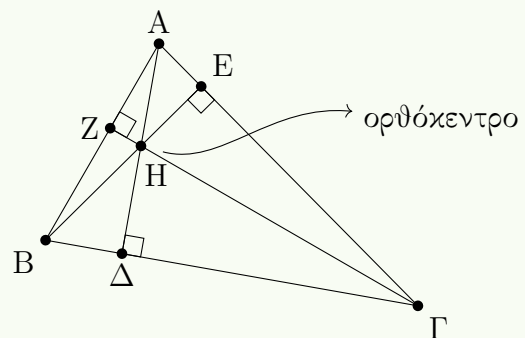


- $A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta$
- $B\Theta = \frac{2}{3} BE$
- $\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z$

Θεώρημα (5.8)

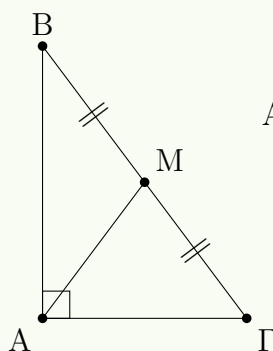
Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο αυτό καλείται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Θεώρημα I (5.9)

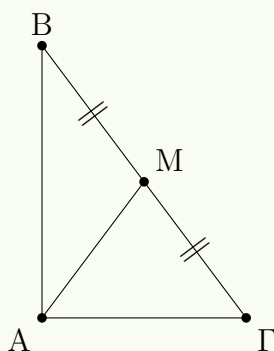
Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = MG$$

Θεώρημα II (5.9)

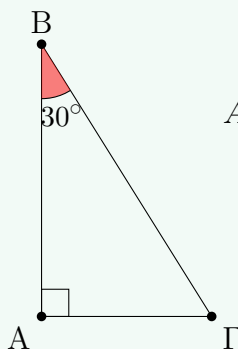
Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



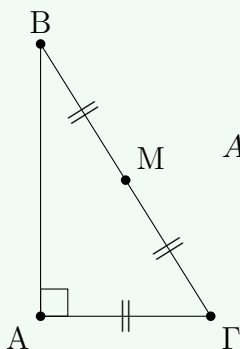
Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\hat{A}$.

Πόρισμα (5.9)

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30° , τότε η πλευρά που είναι απέναντι από αυτή τη γωνία είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



$$\text{Αν } \hat{B} = 30^\circ, \text{ τότε } AG = \frac{B\Gamma}{2}.$$



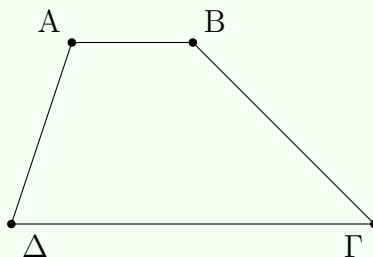
$$\text{Αν } AG = \frac{B\Gamma}{2}, \text{ τότε } \hat{B} = 30^\circ.$$

Και αντίστροφα, αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, τότε η γωνία που είναι απέναντι από αυτή την πλευρά είναι ίση με 30° .

Τραπεζίια

Ορισμός: Τραπεζίιο

Τραπεζίιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



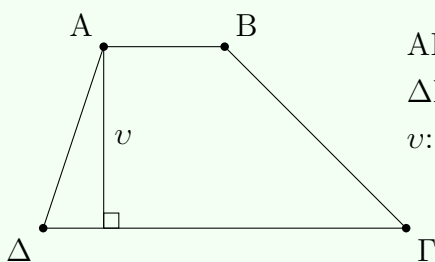
$$AB \parallel \Delta\Gamma$$

και

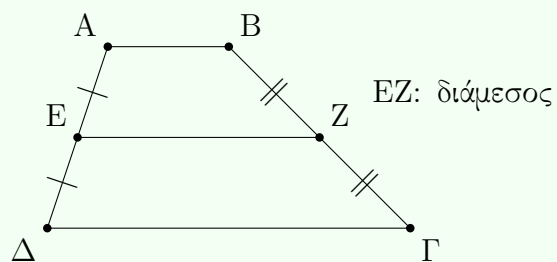
$$A\Delta \not\parallel B\Gamma$$

Ορισμός: Στοιχεία τραπεζίου (Βάσεις - Ύψος - Διάμεσος)

- Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.
- **Ύψος** του τραπεζίου λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στις βάσεις και έχει άκρα στους φορείς των βάσεων.
- **Διάμεσος** του τραπεζίου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών.

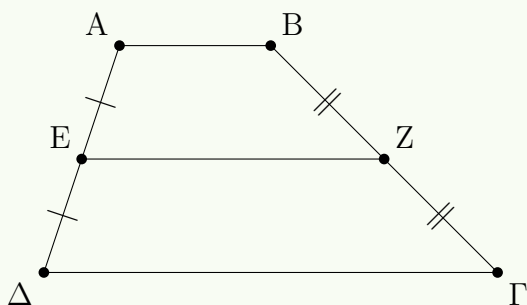


AB: μικρή βάση
ΔΓ: μεγάλη βάση
υ: ύψος



Θεώρημα I (5.10)

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίθροισμά τους.

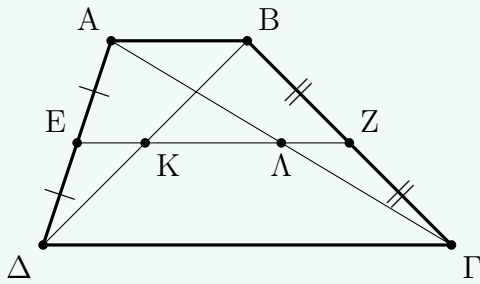


$$\bullet \quad EZ \parallel AB \quad \text{και} \quad EZ \parallel \Delta\Gamma$$

$$\bullet \quad EZ = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2}$$

Πόρισμα (5.6)

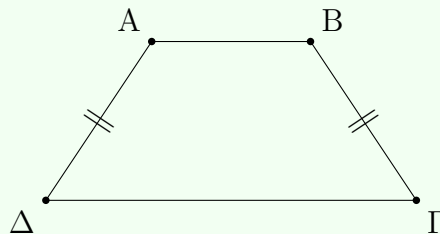
Η διάμεσος ΕΖ τραπέζιου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



- Το Κ είναι μέσο του ΔΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ.
- $ΚΛ \parallel ΑΒ$ και $ΚΛ \parallel ΔΓ$
- $ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$

Ορισμός: Ισοσκελές τραπέζιο

Ένα τραπέζιο λέγεται **ισοσκελές** αν οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

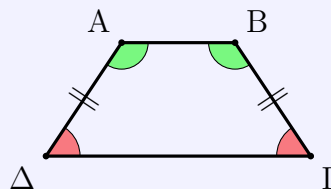


$$ΑΔ = ΒΓ$$

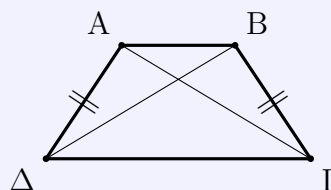
Ιδιότητες ισοσκελούς τραπέζιου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- Οι γωνίες που προσκείνται σε μία βάση είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.



$$\hat{A} = \hat{B} \\ \text{και} \\ \hat{D} = \hat{G}$$

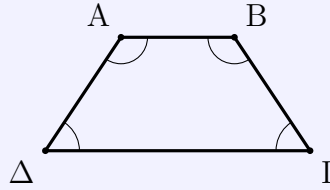


$$ΑΓ = ΒΔ$$

Κριτήρια για ισοσκελή τραπέζια

Για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές, αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

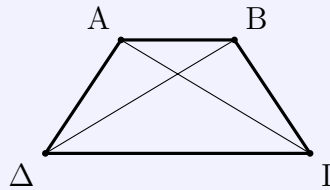
- Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες.



Αν $\hat{A} = \hat{B}$, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Αν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Αν $AG = B\Delta$, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.