

Α' Λυκείου – Γεωμετρία

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

Ορισμός 1: Σημείο - Ευθεία - Ημιευθεία - Ευθύγραμμο Τμήμα

Σημείο

• A

Δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.

Ευθεία



Ευθεία είναι μία ευθεία γραμμή που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**. Την συμβολίζουμε με δύο μικρά γράμματα π.χ. $x'x$ ή με ένα μικρό γράμμα π.χ. ε .

Ημιευθεία



Ημιευθεία είναι μία ευθεία γραμμή που **έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος**. Την συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό π.χ. Ox .

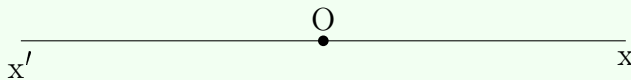
Ευθύγραμμο Τμήμα



Ευθύγραμμο τμήμα είναι μία ευθεία γραμμή που **έχει αρχή και τέλος**. Το συμβολίζουμε με δύο κεφαλαία γράμματα που δηλώνουν τα **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος π.χ. AB ή BA .

Ορισμός 2: Φορέας

- Κάθε ημιευθεία είναι κομμάτι μίας ευθείας. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **φορέας** της ημιευθείας.



Η ευθεία $x'x$ είναι ο φορέας της ημιευθείας Ox .

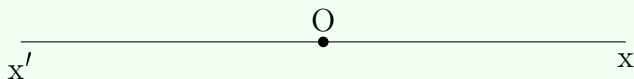
- Όμοια, κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι κομμάτι μίας ευθείας. Η ευθεία αυτή ονομάζεται **φορέας** του ευθύγραμμου τμήματος.



Η ευθεία $x'x$ είναι ο φορέας του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Ορισμός 3: Αντικείμενες ημιευθείες

Δύο ημιευθείες λέγονται **αντικείμενες** όταν έχουν κοινή αρχή και μαζί αποτελούν μία ευθεία. Με άλλα λόγια, δύο ημιευθείες είναι αντικείμενες όταν έχουν μόνο ένα κοινό σημείο (την αρχή τους) και έχουν τον ίδιο φορέα.



Οι ημιευθείες Ox και Ox' είναι **αντικείμενες**.

Ημιευθείες

Όταν ζητείται να φέρουμε ημιευθεία Ax εννοείται ότι πρέπει να κατασκευάσουμε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο A (που πιθανώς υπάρχει ήδη στο σχήμα).

Παραδείγματα

Άσκηση 1. Στο διπλανό σχήμα να κατασκευαστεί ημιευθεία $Bx \perp AB$.



Λύση:

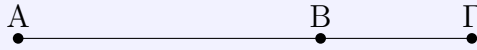


Προέκταση ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι **προεκτείνουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα, εννοούμε ότι δημιουργούμε ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα που περιέχει το αρχικό και έχει τον ίδιο φορέα με αυτό.

Με άλλα λόγια, μεγαλώνουμε το ευθύγραμμο τμήμα από τη μία πλευρά.

- ☞ Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB (ή όταν λέμε τη φράση «στην προέκταση του AB »), τότε το μεγαλώνουμε από την πλευρά του άκρου B .



Το σημείο Γ βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος **AB** .

- ☞ Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα BA (ή όταν λέμε τη φράση «στην προέκταση του BA »), τότε το μεγαλώνουμε από την πλευρά του άκρου A .



Το σημείο Γ βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος **BA** .

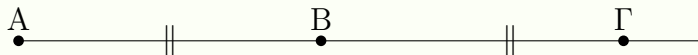
Παραδείγματα

Άσκηση 1.

- (α) Στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AB να βρείτε σημείο Γ τέτοιο ώστε $AB = B\Gamma$.



Λύση: Εφόσον λέει στην προέκταση του AB , πρέπει να προεκτείνουμε από την πλευρά του B . Θα βάλουμε το σημείο Γ σε τέτοια θέση ώστε $AB = B\Gamma$.



- (β) Να προεκτείνετε το ευθύγραμμο τμήμα BA κατά τμήμα $A\Delta = AB$.

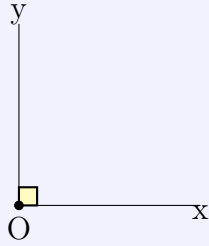


Λύση: Εφόσον λέει να προεκτείνουμε το BA , πρέπει να προεκτείνουμε από την πλευρά του A . Θα βάλουμε το σημείο Δ σε τέτοια θέση ώστε $AB = A\Delta$.



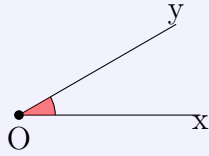
Είδη γωνιών

Ορθή



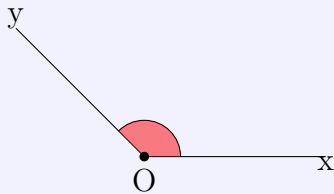
Μια γωνία λέγεται ορθή αν το μέτρο της είναι 90° .

Οξεία



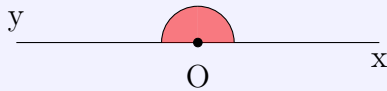
Μια γωνία λέγεται οξεία αν το μέτρο της είναι μικρότερο από 90° .

Αμβλεία



Μια γωνία λέγεται αμβλεία αν το μέτρο της είναι μεγαλύτερο από 90° και μικρότερο από 180° .

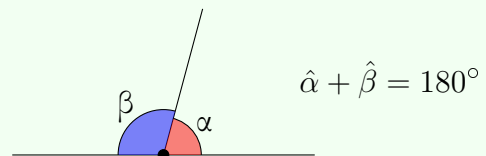
Ευθεία



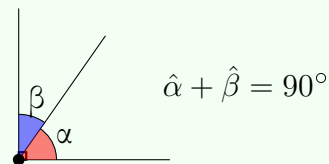
Μια γωνία λέγεται ευθεία αν το μέτρο της είναι ίσο με 180° .

Ορισμός 4: Παραπληρωματικές - Συμπληρωματικές - Κατακορυφήν

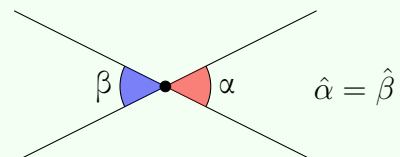
Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° . Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.



Συμπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° . Κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



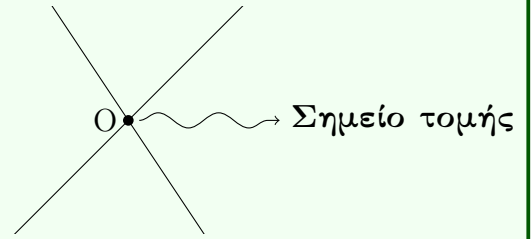
Κατακορυφήν ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες. Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



Ορισμός 5: Τεμνόμενες και Παράλληλες ευθείες

Δύο διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο μπορεί να έχουν ένα κοινό σημείο ή κανένα.

Δύο ευθείες που τέμνονται, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο, λέγονται **τεμνόμενες**. Το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής**.



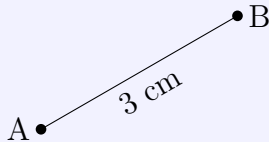
Δύο ευθείες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (όσο και αν τις προεκτείνουμε) λέγονται **παράλληλες**.



Αποστάσεις

Απόσταση σημείου από σημείο:

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ορίζεται ως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τα δύο αυτά σημεία.

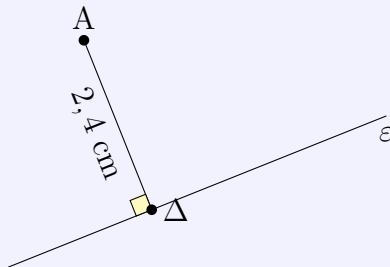


Η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι 3 cm.

Ή αλλιώς, λέμε ότι το σημείο A απέχει από το σημείο B 3 cm.

Απόσταση σημείου από ευθεία:

Η απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία ορίζεται ως το μήκος του **κάθετου** ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο προς την ευθεία.



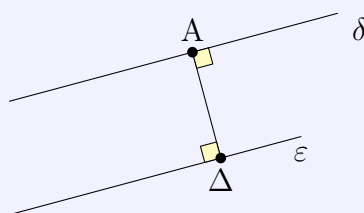
Η απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε είναι ίση με το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AΔ· δηλαδή ίση με 2,4 cm. Το σημείο Δ, λέγεται **ίχνος** του A στην ευθεία ε.

☞ Η απόσταση ενός σημείου από ένα ευθύγραμμο τμήμα ορίζεται ως η απόσταση του σημείου από τον φορέα του ευθύγραμμου τμήματος.

Απόσταση ευθείας από ευθεία:

Η απόσταση μεταξύ δύο ευθειών έχει νόημα μόνο όταν η ευθείες είναι παράλληλες.

Η απόσταση δύο παράλληλων ευθειών ορίζεται ως η απόσταση ενός σημείου της μίας ευθείας από την δεύτερη ευθεία.



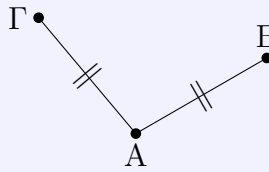
Η απόσταση της ευθείας ε από την ευθεία δ είναι ίση με το μήκος του **κάθετου** ευθύγραμμου τμήματος AΔ.

Η έννοια του «ισαπέχει»

Η λέξη «ισαπέχει» σημαίνει ότι απέχει ίση απόσταση. Πρέπει να προσέχουμε αν πρόκειται για απόσταση μεταξύ σημείων ή για απόσταση σημείου από ευθεία. Επομένως,

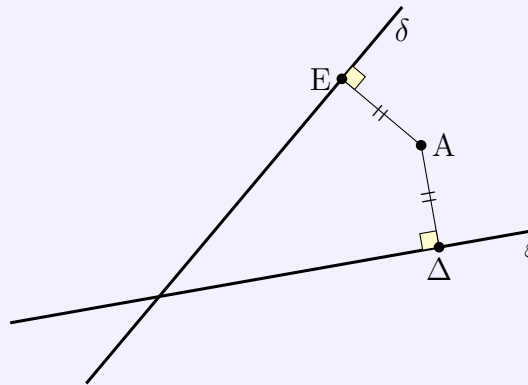
Σημείο ισαπέχει από σημεία:

Όταν λέμε ότι ένα σημείο A ισαπέχει από δύο σημεία B και Γ , εννοούμε ότι $AB = A\Gamma$.



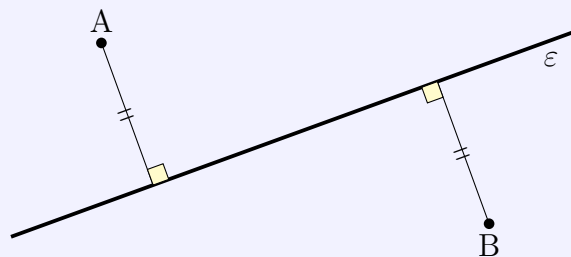
Ένα σημείο ισαπέχει από δύο ευθείες:

Όταν λέμε ότι ένα σημείο A ισαπέχει από δύο ευθείες ε και δ , εννοούμε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα, από το σημείο A στις ευθείες, είναι ίσα. Δηλαδή, $A\Delta = AE$, όπου Δ και E είναι τα ίχνη του A στις ευθείες ε και δ αντίστοιχα.



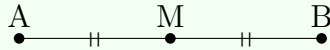
Δύο σημεία ισαπέχουν από ευθεία:

Όταν λέμε ότι δύο σημεία A και B ισαπέχουν από μία ευθεία ε , εννοούμε ότι τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα, από τα σημεία A και B στην ευθεία ε , είναι ίσα.

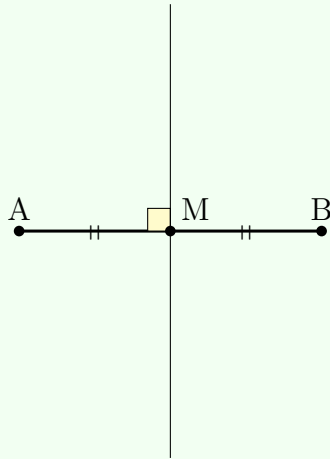


Ορισμός 6: Μέσο και Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

- Το **μέσο** ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι το σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του και ισαπέχει από τα άκρα του.
Δηλαδή, το μέσο είναι το σημείο που “βρίσκεται στη μέση” του ευθυγράμμου τμήματος.



- Η **μεσοκάθετος** ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι η ευθεία που είναι κάθετη σε αυτό και διέρχεται από το μέσο του.



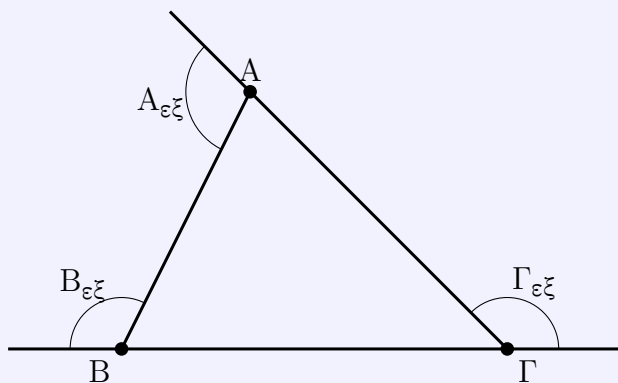
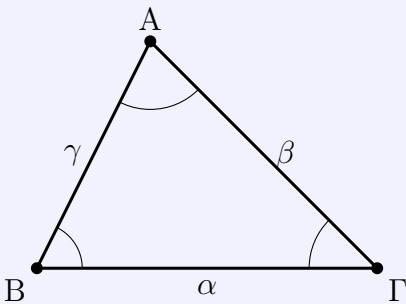
Στοιχεία τριγώνου

Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει

- **3 κορυφές:** τα σημεία A, B και Γ
- **3 γωνίες:** τις $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$
- **3 πλευρές:** τα ευθύγραμμα τμήματα B Γ , A Γ και AB
Την πλευρά B Γ την συμβολίζουμε και με α , την πλευρά A Γ με β και την AB με γ .

Λέμε ότι

- Απέναντι από τη γωνία $\hat{A}$ είναι η πλευρά B Γ (α).
- Απέναντι από τη γωνία $\hat{B}$ είναι η πλευρά A Γ (β).
- Απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι η πλευρά AB (γ).

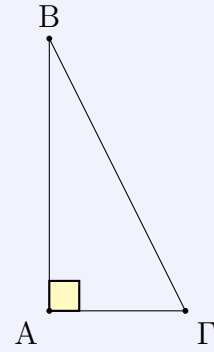


Στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ορίζουμε και **εξωτερικές γωνίες**. Εξωτερική ονομάζεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του τριγώνου. Τις εξωτερικές γωνίες τις συμβολίζουμε με $\hat{A}_{εξ}$, $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{\Gamma}_{εξ}$ αντίστοιχα.

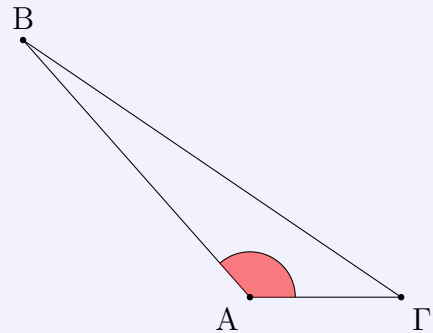
Είδη τριγώνων με κριτήριο τις γωνίες

Τα τρίγωνα, με κριτήριο τις γωνίες τους, τα κατατάσσουμε σε τρεις κατηγορίες, τα ορθογώνια, τα αμβλυγώνια και τα οξυγώνια.

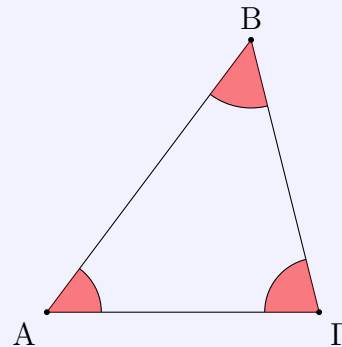
- Ένα τρίγωνο λέγεται **ορθογώνιο** αν έχει μια γωνία ορθή.



- Ένα τρίγωνο λέγεται **αμβλυγώνιο** αν έχει μια αμβλεία γωνία.



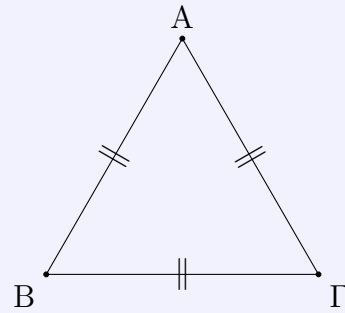
- Ένα τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι οξείες.



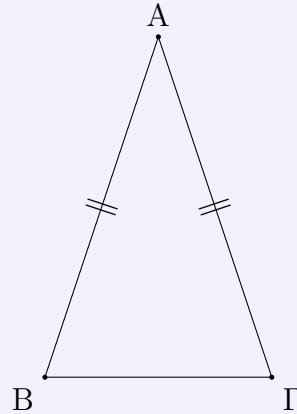
Είδη τριγώνων με κριτήριο τις πλευρές

Τα τρίγωνα, με κριτήριο την ισότητα των πλευρών τους, τα κατατάσσουμε σε τρεις κατηγορίες, τα ισόπλευρα, τα ισοσκελή και τα σκαληνά.

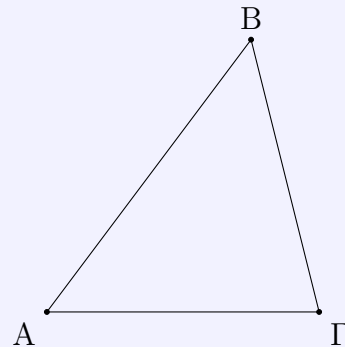
- Ένα τρίγωνο λέγεται **ισόπλευρο** αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.



- Ένα τρίγωνο λέγεται **ισοσκελές** αν έχει δύο ίσες πλευρές.

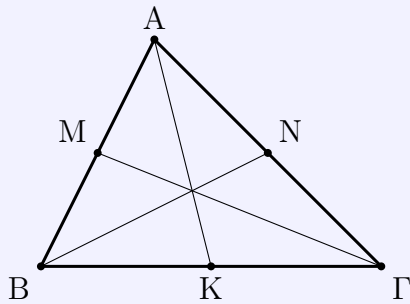


- Ένα τρίγωνο λέγεται **σκαληνό** αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.



Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος:



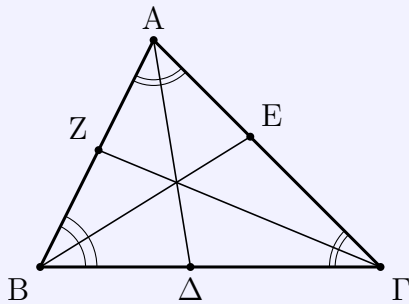
$$AK = \mu_\alpha$$

$$BN = \mu_\beta$$

$$GM = \mu_\gamma$$

Διάμεσος ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που το ένα του άκρο είναι μία κορυφή του τριγώνου και το άλλο το μέσο της απέναντι πλευράς. Ένα τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, τις διαμέσους τις συμβολίζουμε με μ_α , μ_β και μ_γ , οι οποίες αντιστοιχούν στις πλευρές α , β και γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος:



$$AD = \delta_\alpha$$

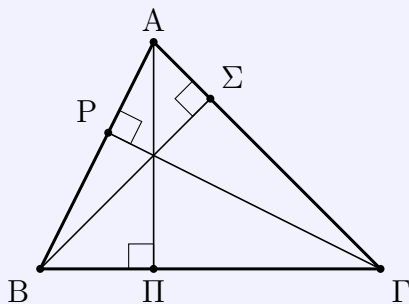
$$BE = \delta_\beta$$

$$GZ = \delta_\gamma$$

Διχοτόμος ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μίας γωνίας του τριγώνου (χωρίζει δηλαδή τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες) που ξεκινά από την κορυφή της γωνίας και καταλήγει στην απέναντι πλευρά. Ένα τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους.

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, τις διχοτόμους τις συμβολίζουμε με δ_α , δ_β και δ_γ , οι οποίες αντιστοιχούν στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Ύψος:



$$A\Pi = v_\alpha$$

$$B\Sigma = v_\beta$$

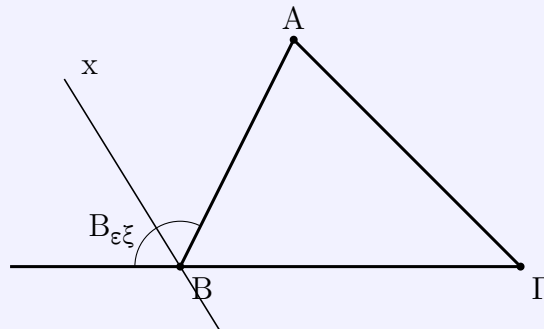
$$\Gamma P = v_\gamma$$

Ύψος ενός τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από μία κορυφή του τριγώνου και καταλήγει κάθετα στην απέναντι πλευρά. Ένα τρίγωνο έχει τρία ύψη.

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη τα συμβολίζουμε με v_α , v_β και v_γ , τα οποία αντιστοιχούν στις κορυφές A , B και Γ αντίστοιχα.

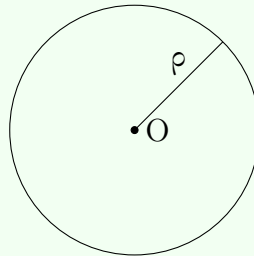
Εξωτερική διχοτόμος

Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Όταν λέμε ότι φέρνουμε, για παράδειγμα, την **εξωτερική διχοτόμο** Bx , εννοούμε ότι φέρνουμε τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας της $\hat{B}$ (ή τον φορέα αυτής).



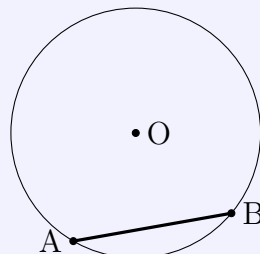
Ορισμός 7: Κύκλος

Κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν απόσταση ρ από το O .

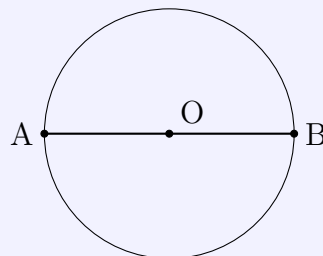


Στοιχεία Κύκλου

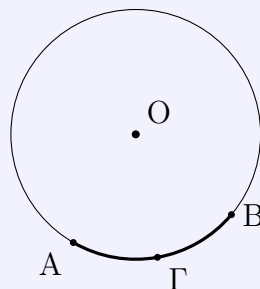
Χορδή ενός κύκλου λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία του κύκλου.



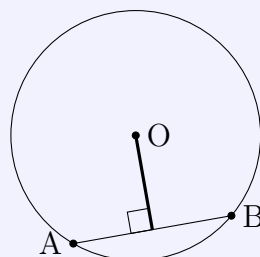
Διάμετρος ενός κύκλου είναι μια χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου. Η διάμετρος είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και είναι η μεγαλύτερη χορδή του. Η βασική ιδιότητα της διαμέτρου είναι ότι χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη, τα ημικύκλια.



Τόξο ενός κύκλου λέγεται καθένα από τα δύο μέρη στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από δύο σημεία του. Το τόξο με άκρα τα σημεία A και B το συμβολίζουμε με $\widehat{AB}$ ή $\widehat{AGB}$, όπου Γ ένα εσωτερικό σημείο του τόξου.



Το **απόστημα** μίας χορδής του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή το κέντρο του κύκλου και καταλήγει στη χορδή. **κάθετα**



Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να σχεδιάσετε ευθύγραμμο τμήμα AB . Να φέρετε $Bx \perp AB$.

Άσκηση 2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Να προεκτείνετε την AB κατά τμήμα $B\Delta = A\Gamma$.

(β) Στην προέκταση της ΓB θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = AB$.

Άσκηση 3. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προεκτείνετε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Άσκηση 4. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.

(α) Να φέρετε $Bx \perp B\Gamma$ η οποία να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A .

(β) Στην Bx θεωρούμε τμήμα $B\Delta = A\Gamma$.

Άσκηση 5. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

Άσκηση 6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να σχεδιάσετε την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Άσκηση 7. Στην προέκταση του ύψους ΔA τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Delta$.

Άσκηση 8.

(α) Να σχεδιάσετε ευθεία ε και σημεία A, B εκατέρωθεν αυτής, που να ισαπέχουν από την ε .

(β) Να σχεδιάσετε ευθεία $\delta \parallel \varepsilon$ η οποία να διέρχεται από το σημείο A .

Άσκηση 9. Να σχεδιάσετε σημείο A και δύο ευθείες ε και δ που να ισαπέχουν από το A έτσι ώστε

(α) $\varepsilon \parallel \delta$

(β) Οι ευθείες ε και δ να τέμνονται (όχι στο A).

Άσκηση 10. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και I το σημείο τομής των διχοτόμων δ_α και δ_β .

Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο το I και ακτίνα ίση με την απόσταση του I απ' την πλευρά β .

Άσκηση 11. Έστω σημείο K . Να βρείτε πέντε σημεία που να ισαπέχουν από το K .

Άσκηση 12. Σχεδιάστε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα 3 cm . Έστω A ένα σημείο του κύκλου.

(α) Να βρείτε δύο σημεία B και Γ του κύκλου που να απέχουν από το A 2 cm .

(β) Να σχεδιάσετε τη χορδή $B\Gamma$ και το απόστημά της.

Άσκηση 13. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BZ τέμνονται στο σημείο E .

Άσκηση 14. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της BA στο Δ . Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στην απόσταση του σημείου Δ από το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$.