

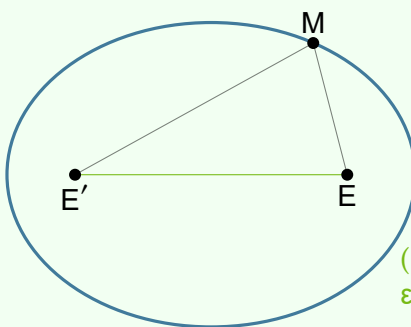
Β' Λυκείου – Μαθηματικά Προσανατολισμού Έλλειψη

Ορισμός: Έλλειψη

Έλλειψη με εστίες δύο σημεία E και E' ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E και E' είναι σταθερό (και μεγαλύτερο του $(E'E)$).

Το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της έλλειψης από τις εστίες την συμβολίζουμε με 2α .

Την απόσταση $(E'E)$ των δύο εστιών την συμβολίζουμε με 2γ και ονομάζεται **εστιακή απόσταση**.



$$(ME) + (ME') = 2\alpha$$

$$(E'E) = 2\gamma = \text{εστιακή απόσταση}$$

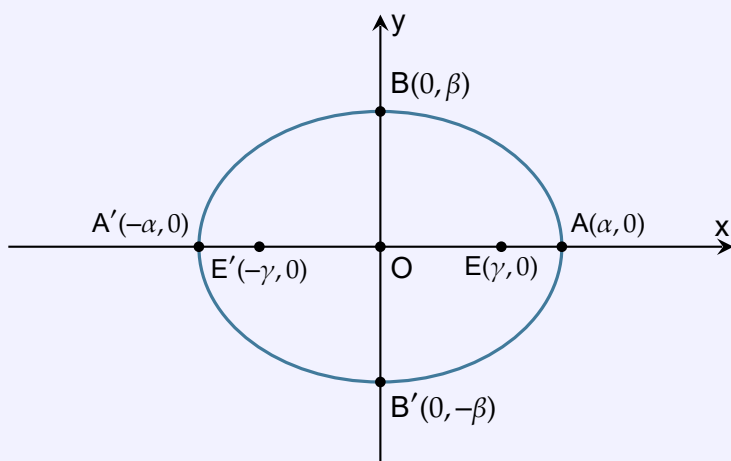
Εξίσωση της έλλειψης

Εστίες στον άξονα x' : Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα ίσο με 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



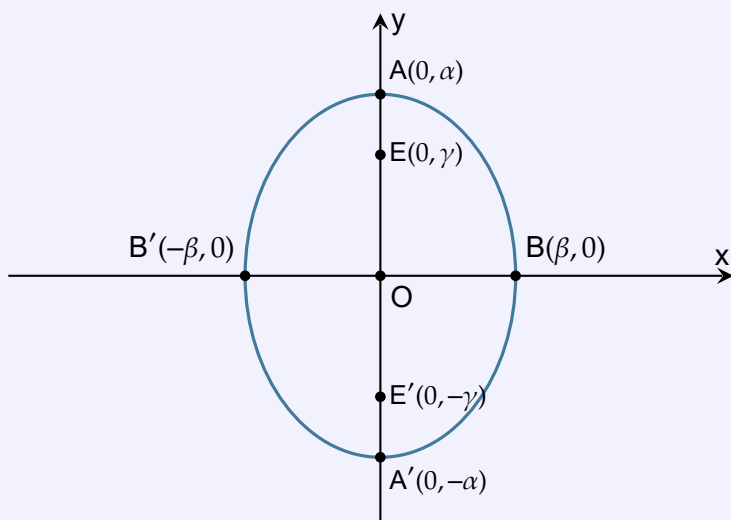
- **Εστίες** της έλλειψης:
 $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$
- **Κορυφές** της έλλειψης:
 $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ και $B'(0, -\beta)$
- **Κέντρο** της έλλειψης: $O(0, 0)$
- **Μεγάλος άξονας:** AA' με μήκος 2α
- **Μικρός άξονας:** BB' με μήκος 2β
- **Εστιακή απόσταση:** 2γ

Εστίες στον άξονα y' : Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$ και σταθερό άθροισμα ίσο με 2α είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

όπου

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



- **Εστίες** της έλλειψης:
 $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$
- **Κορυφές** της έλλειψης:
 $A(0, \alpha)$, $A'(0, -\alpha)$, $B(\beta, 0)$ και $B'(-\beta, 0)$
- **Κέντρο** της έλλειψης: $O(0, 0)$
- **Μεγάλος άξονας:** AA' με μήκος 2α
- **Μικρός άξονας:** BB' με μήκος 2β
- **Εστιακή απόσταση:** 2γ

☞ Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\alpha > \gamma$ και $\alpha > \beta$

☞ Επιπλέον, από τον τύπο $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, προκύπτει ότι $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

☞ Αν $c, d > 0$, τότε η εξίσωση $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$ παριστάνει έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων· ο μεγαλύτερος παρονομαστής μάς δείχνει σε ποιον άξονα βρίσκονται οι εστίες:

αν $c > d$ τότε η εστίες είναι στον άξονα $x'x$

αν $d > c$ τότε οι εστίες βρίσκονται στον άξονα των $y'y$.

Εκκεντρότητα έλλειψης

Εκκεντρότητα ε της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ονομάζεται ο λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}$.

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$$

☞ Για την εκκεντρότητα της έλλειψης ισχύει πάντα ότι $0 < \varepsilon < 1$

Επιπλέον, ισχύει ότι

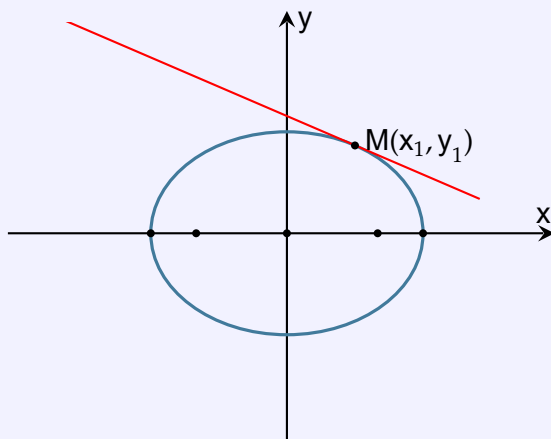
$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

☞ Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα ε (δηλαδή όσο πιο κοντά στο 1 είναι), τόσο πιο πεπλατυσμένη είναι η έλλειψη και αντίστροφα, όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα, τόσο τείνει να μοιάζει με κύκλο.

Εφαπτομένη έλλειψης

Εστίες στον άξονα $x'x$: Η εφαπτομένη της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία διέρχεται από ένα σημείο $M(x_1, y_1)$, το οποίο ανήκει στην έλλειψη, έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



Εστίες στον άξονα $y'y$: Η εφαπτομένη της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ η οποία διέρχεται από ένα σημείο $M(x_1, y_1)$, το οποίο ανήκει στην υπερβολή, έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$$

