

Β' Λυκείου – Μαθηματικά Προσανατολισμού

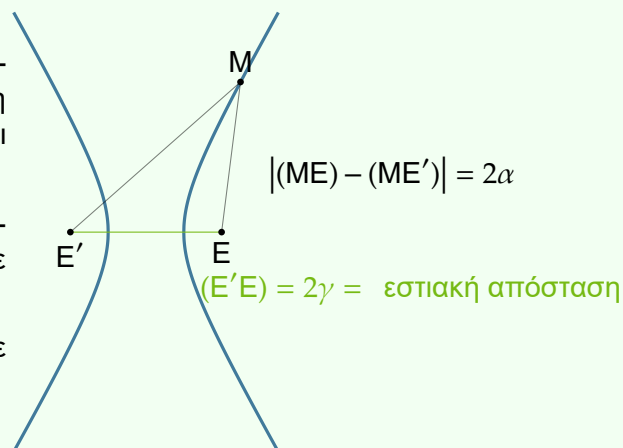
Υπερβολή

Ορισμός: Υπερβολή

Υπερβολή με εστίες δύο σημεία E και E' ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E και E' είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την συμβολίζουμε με 2α .

Την απόσταση $(E'E)$ των δύο εστιών την συμβολίζουμε με 2γ και ονομάζεται **εστιακή απόσταση**.



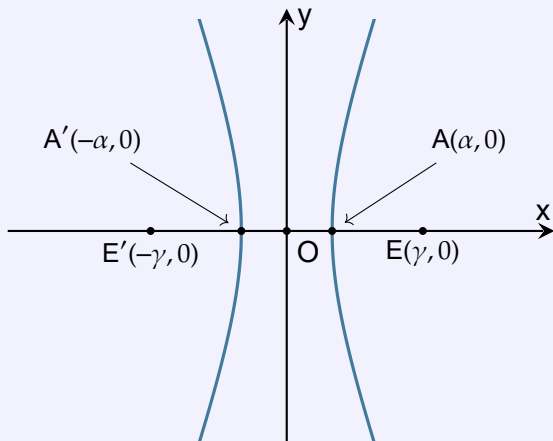
Εξίσωση της υπερβολής

Εστίες στον άξονα x'x: Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ίση με 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$



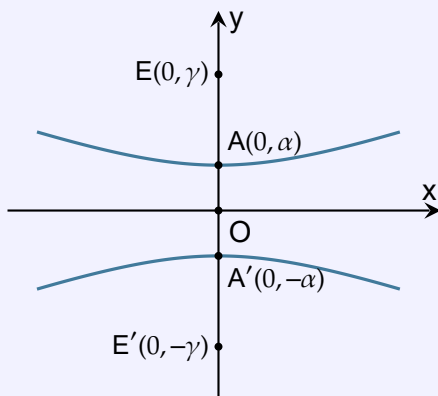
- **Εστίες** της υπερβολής: $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$
- **Κορυφές** της υπερβολής: $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$
- **Κέντρο** της υπερβολής: $O(0, 0)$

Εστίες στον άξονα y'y: Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$ και απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ίση με 2α είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

όπου

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$



- **Εστίες** της υπερβολής: $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$
- **Κορυφές** της υπερβολής: $A(0, \alpha)$ και $A'(0, -\alpha)$
- **Κέντρο** της υπερβολής: $O(0, 0)$

☞ Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\gamma > \alpha$$

και

$$\gamma > \beta$$

☞ Επιπλέον, από τον τύπο $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, προκύπτει ότι

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

☞ Αν $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής**.

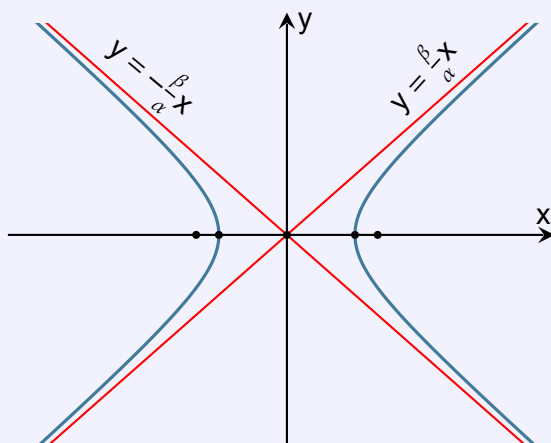
Ασύμπτωτες υπερβολής

Εστίες στον άξονα x'x: Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι οι ευθείες με εξίσωση

$$y = \frac{b}{a}x$$

και

$$y = -\frac{b}{a}x$$

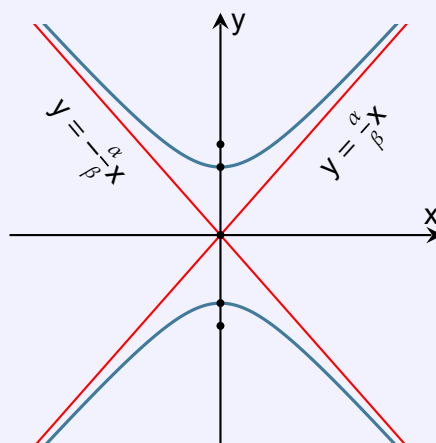


Εστίες στον άξονα y'y: Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ είναι οι ευθείες με εξίσωση

$$y = \frac{a}{b}x$$

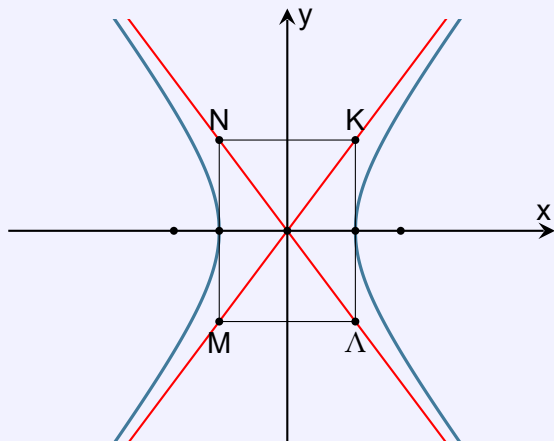
και

$$y = -\frac{a}{b}x$$

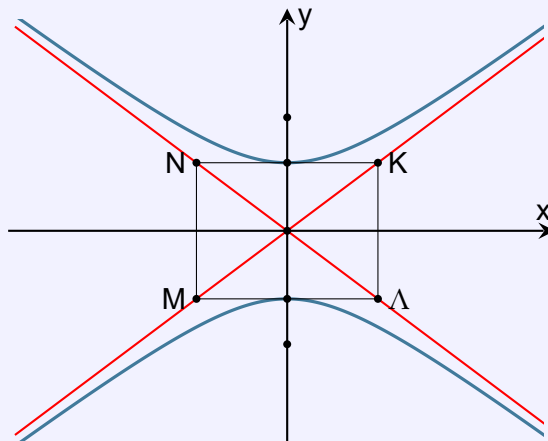


Ορθογώνιο βάσης

Εστίες στον άξονα x'x: Θεωρούμε την υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία $K(a, b)$, $\Lambda(a, -b)$, $M(-a, -b)$ και $N(-a, b)$ λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου βάσης ταυτίζονται με τις ασύμπτωτες της υπερβολής.



Εστίες στον άξονα y'y: Αντίστοιχα για την υπερβολή με εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Το ορθογώνιο ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία $K(b, a)$, $\Lambda(b, -a)$, $M(-b, -a)$ και $N(-b, a)$ λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου βάσης ταυτίζονται με τις ασύμπτωτες της υπερβολής.



Εκκεντρότητα υπερβολής

Εκκεντρότητα ε της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ονομάζεται ο λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}$.

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$$

☞ Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει πάντα ότι

$$\varepsilon > 1$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

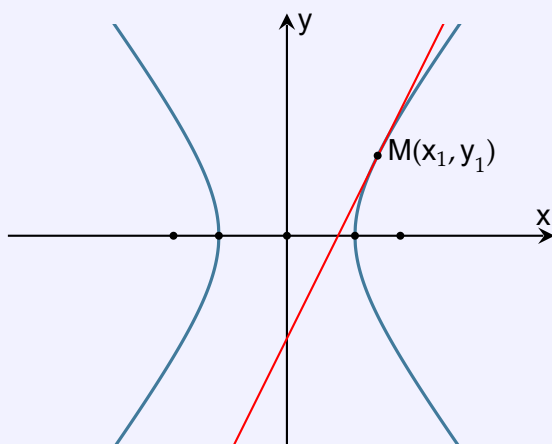
$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

☞ Όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα ε (δηλαδή όσο πιο κοντά στο 1 είναι), τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή και αντίστροφα, όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή.

Εφαπτομένη υπερβολής

Εστίες στον άξονα x' : Η εφαπτομένη της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ η οποία διέρχεται από ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$, το οποίο ανήκει στην υπερβολή, έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



Εστίες στον άξονα $y'y$: Η εφαπτομένη της υπερβολής με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ η οποία διέρχεται από ένα σημείο $M(x_1, y_1)$, το οποίο ανήκει στην υπερβολή, έχει εξίσωση

$$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

