



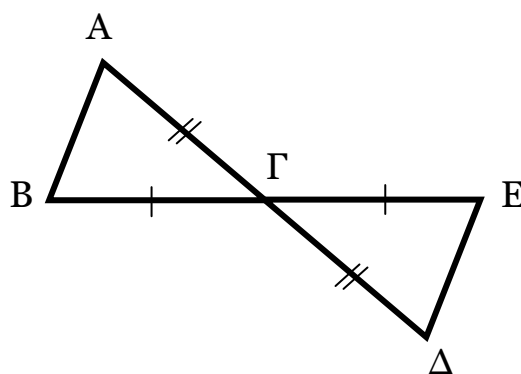
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ



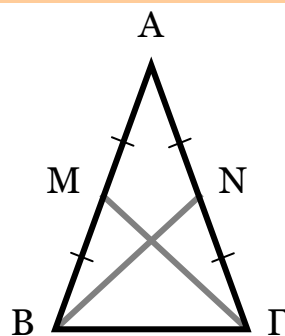
## Ισότητα Τριγώνων

### Με σχήμα

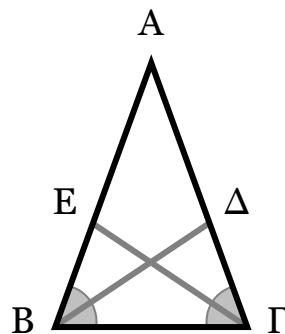
1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι ίσα:



2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τις διαμέσους  $BN$  και  $\Gamma M$ . Να αποδείξετε ότι  $BN = \Gamma M$ .

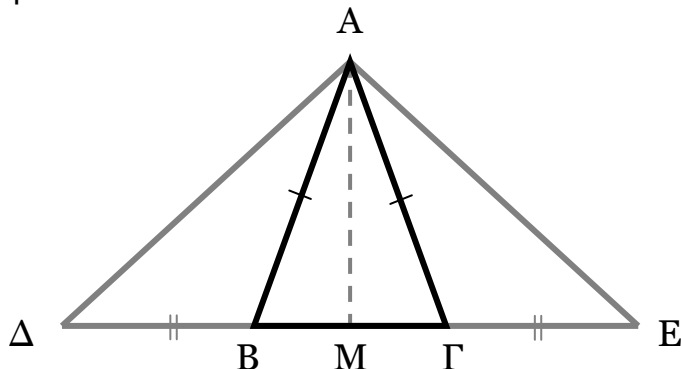


3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τις διχοτόμους  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .



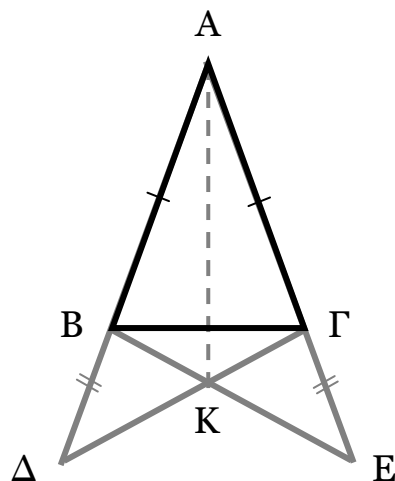
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Προεκτείνουμε τη βάση  $B\Gamma$  και προς τις δύο κατευθύνσεις, κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ .

- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.  
β. Να δείξετε ότι η διάμεσος  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι διάμεσος και του τριγώνου  $A\Delta E$ .



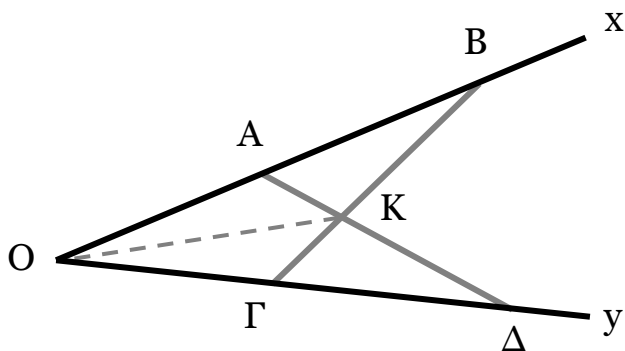
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές προς το μέρος του  $B$  και του  $\Gamma$ , κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ , αντίστοιχα.

- α. Να δείξετε ότι  $BE = \Gamma\Delta$ .  
β. Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  τότε να δείξετε ότι η  $AK$  είναι μεσοκάθετος της  $B\Gamma$ .



6. Στις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  μιας γωνίας  $\hat{xOy}$  παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα  $OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta$ . Έστω  $K$  το σημείο τομής των  $A\Delta$  και  $\Gamma B$ .

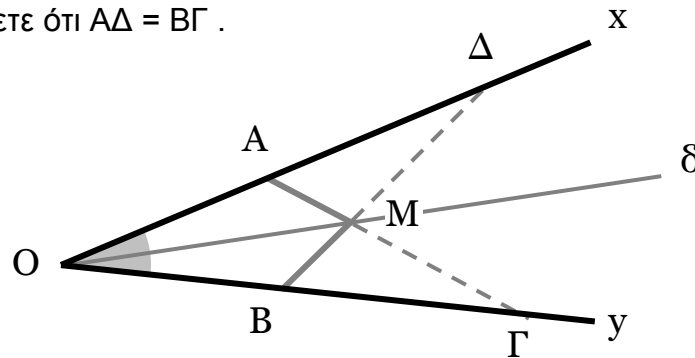
- α. Να δείξετε ότι  $A\Delta = \Gamma B$ .  
β. Να δείξετε ότι η  $OK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{xOy}$ .  
γ. Να δείξετε ότι  $AK = K\Gamma$ .



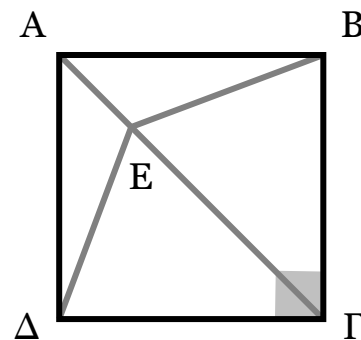
7. Στις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  μιας γωνίας  $x\hat{O}y$  παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα  $OA = OB$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο  $O\delta$  της  $x\hat{O}y$  κι έστω  $M$  τυχαίο σημείο της. Έστω επίσης οι προεκτάσεις των  $AM$  και  $BM$  και  $\Gamma$ ,  $\Delta$  τα σημεία τομής του με τις πλευρές  $Oy$  και  $Ox$ , αντίστοιχα.

α. Να δείξετε ότι  $A\Gamma = B\Delta$ .

β. Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .



8. Δίνεται ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και η διαγώνιός του  $A\Gamma$ . Αν  $E$  τυχαίο σημείο της  $A\Gamma$  τότε να δείξετε ότι  $BE = \Delta E$ .



### Χωρίς σχήμα

9. Έστω δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  τα οποία έχουν  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  κι επιπλέον  $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

10. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  πάνω στις πλευρές του  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $AK = B\Lambda = \Gamma M$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο, επίσης.

11. Σε έναν κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ , παίρνουμε τρία διαδοχικά σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της χορδής  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα  $O\Delta B$  και  $O\Delta \Gamma$  είναι ίσα.

β. Οι γωνίες  $O\hat{A}\Delta$  και  $O\hat{B}\Delta$  είναι ίσες.

**Υπόδειξη:** Θυμίζουμε ότι η μεσοκάθετος μιας οποιασδήποτε χορδής ενός κύκλου διέρχεται υποχρεωτικά από το κέντρο του.

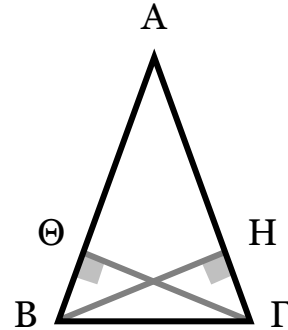
12. Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα, τότε να αποδείξετε ότι  $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$  και  $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ .
13. Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι, με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho_1 > \rho_2$ . Αν  $AB$  είναι μια διάμετρος του ενός κύκλου και  $\Gamma\Delta$  μια διάμετρος του άλλου, τότε να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AO\Gamma$  και  $BO\Delta$  είναι ίσα. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$ .
14. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ :
- α. το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .
  - β. το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .
15. Να δείξετε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δυο ύψη ίσα, τότε είναι ισοσκελές.
16. Στις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , παίρνουμε αντίστοιχα σημεία  $E$ ,  $\Delta$  τέτοια, ώστε  $AE = A\Delta$ . Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$  και  $E\Gamma$ , τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.
17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τυχαίο σημείο  $K$ , της πλευράς  $AB$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = KB$ . Ονομάζουμε  $M$  το σημείο, στο οποίο η  $K\Delta$  τέμνει τη βάση  $B\Gamma$ . Τέλος, προεκτείνουμε τη βάση  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $B$ ) κατά τμήμα  $BE = M\Gamma$ .
- α. Να δείξετε ότι  $KE = M\Delta$  και  $\hat{K}\hat{E}B = \hat{\Gamma}\hat{M}\Delta$ .
  - β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $KEM$  είναι ισοσκελές.
  - γ. Να δείξετε ότι  $KM = M\Delta$ .



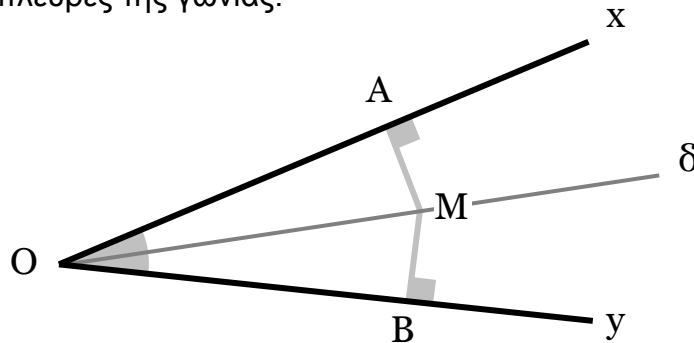
## Ισότητα Ορθογωνίων Τριγώνων

### Με σχήμα

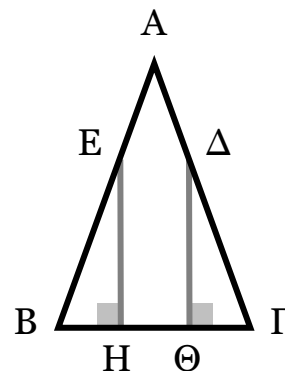
18. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τα ύψη  $BH$  και  $\Gamma\Theta$ . Να αποδείξετε ότι  $BH = \Gamma\Theta$ .



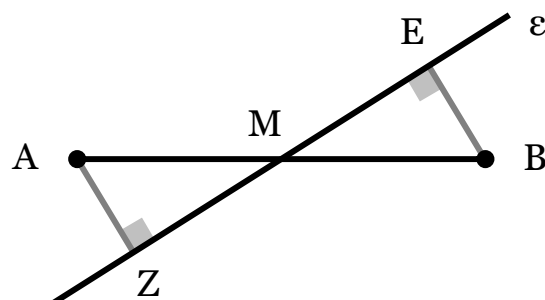
19. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου  $O\delta$  μιας γωνίας  $\chi\hat{O}\gamma$  ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.



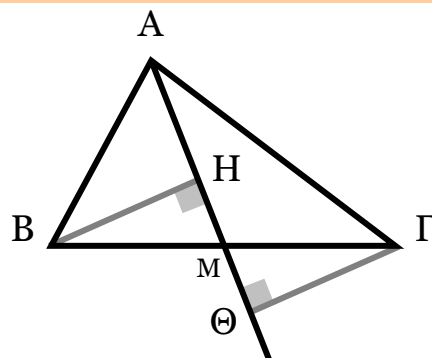
20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $E, \Delta$  σημεία στις πλευρές του, έτσι ώστε  $BE = \Delta\Theta$ . Να δείξετε ότι τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ .



21. Έστω ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , το μέσον του  $M$  και  $(\epsilon)$  μια τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το  $M$ . Να αποδείξετε ότι τα άκρα  $A$  και  $B$  ισαπέχουν από την ευθεία  $(\epsilon)$ .



22. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AM$ , την οποία και προεκτείνουμε πέραν του σημείου  $M$ . Να δείξετε ότι οι κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο  $AM$ .



### Χωρίς σχήμα

23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της βάσης  $B\Gamma$ .
- Να δείξετε ότι οι αποστάσεις  $MK$  και  $ML$ , του σημείου  $M$  από τις ίσες πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , είναι ίσες.
  - Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AKL$  είναι ισοσκελές.
24. Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  και  $u_\alpha = u_{\alpha'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
25. Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$  και  $u_\alpha = u_{\alpha'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
26. Σε κύκλο με κέντρο  $O$ , φέρνουμε τη διάμετρο  $AB$  και τις ίσες χορδές  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$ . Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .
27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $M$  το μέσο της υποτεινουσας  $B\Gamma$ . Από το  $M$  φέρνουμε τις κάθετες  $ME$  και  $M\Delta$ , προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma\Delta M$  και  $MEB$  είναι ίσα.

