

1 ο ΚΕΓ. ΑΛΓ. ΠΑΡ.

ΘΕΜΑ 1

α. $A(x) = (x+3)^2 - 2(x-1)(x+1) - (x-4)^2 - 7$

$= x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 2(x^2 - 1^2) - (x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2) - 7$

$= x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 2 - x^2 + 8x - 16 - 7$

$A(x) = -2x^2 + 14x - 12$

← πολυώνυμο 2ου βαθμού

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

αναγωγή ομοίων όρων

β. Εξίσωση $A(x) = 0$

$$\frac{-2x^2 + 14x - 12}{-2} = \frac{0}{-2}$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$a = 1, b = -7, \gamma = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$$

Αρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγ. ή αντισ.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = 6, x_2 = 1$$

← Εξίσωση 2ου βαθμού
Διακρίνουσα: $\Delta = b^2 - 4a\gamma$

$\Delta > 0$ έχει 2 ρίζες πραγ. ή αντισ. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta = 0$ έχει 1 διπλή ρίζα $x = -\frac{b}{2a}$	$\Delta < 0$ δεν έχει πραγ. ρίζες
---	---	---

Πότε μια εξίσ. 2ου βαθμού έχει λύση;
 $\Delta \geq 0$

ausgewählte Operatoren

$$= x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 2 - x^2 + 8x - 16 - 7$$

→ Monomsortierung der Terme

$$A(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

8. Lösen $A(x) = 0$

$$\begin{aligned} & -2x^2 + 14x - 12 = 0 \\ & \quad \quad \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ & \quad \quad \quad \times^2 - 7x + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$a = 1, b = -7, c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$$

Da $\Delta > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$= \frac{7-5}{2} = 1$$

→ Lösen der Gleichung $\Delta = b^2 - 4ac$

→ $\Delta > 0$: zwei reelle Lösungen

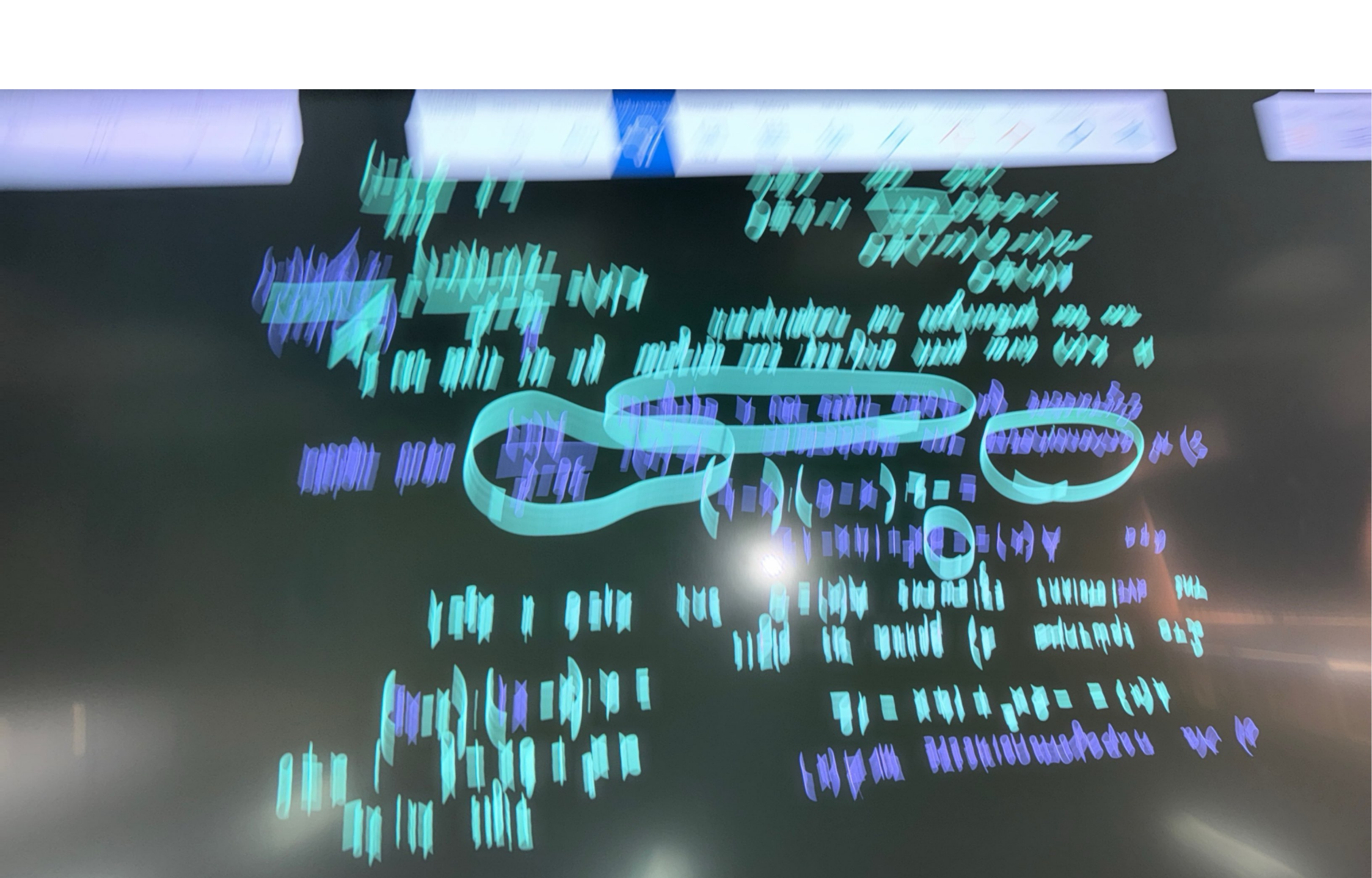
→ $\Delta = 0$: eine reelle Lösung

→ $\Delta < 0$: keine reelle Lösung

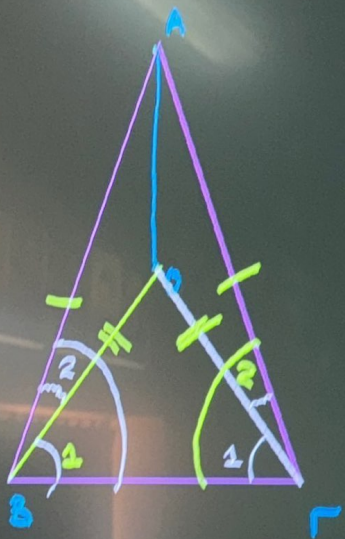
→ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

→ $x = -\frac{b}{2a}$

→ $\Delta \geq 0$: zwei reelle Lösungen



ΘΕΜΑ 6



ΠΡΟΣΕΧΗ	ΣΥΜΠΕΡ.
$\triangle BOC \cong \triangle COB$ (AB=AC)	1. $\angle OBC = \angle OCB$ ($\hat{B}_1 = \hat{C}_1$)
$OB = OG$	2. $\angle BOO = \angle COO$ ($\hat{B}_2 = \hat{C}_2$)
	3. $\angle AOB = \angle AOC$

α. Έχουμε $OB = OG$ άρα $\triangle BOG$ ισοσκελής άρα
οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες
άρα $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$

β. $\triangle BOG$ ισοσκελής άρα $\hat{B} = \hat{C}$
βρίσκουμε $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$

(αφαιρούμε κατά μέλη) $\hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{C} - \hat{C}_1$
 $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$

γ. Γέρνουμε την ΟΑ

$\triangle OAB = \triangle OAC$ διότι:

1. $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ (αποδείχθ. σε βεβαιότητα)
2. $AB = AC$ ($\triangle ABC$ ισοσκελής)
3. $OB = OC$

γράφουμε το κριτήριο με λογίδια Π-Γ-Π

άρα 1. $OA = OA$ κοινή

τα υπόλοιπα αντίστοιχα 2. $\triangle OAB = \triangle OAC$

στοιχεία της είναι ίσα 3. $\angle OAB = \angle OAC$



Μενού



Εξάγει



Κουτί γρήγορης



Λίστα



Επιλογή



Γράφω



Γόμα



Καθαρισμός



Χάρακας



Σχήμα



Μορφή



Σημείωση



Μετακίνηση



Περαιτέρω



Ανάλυση

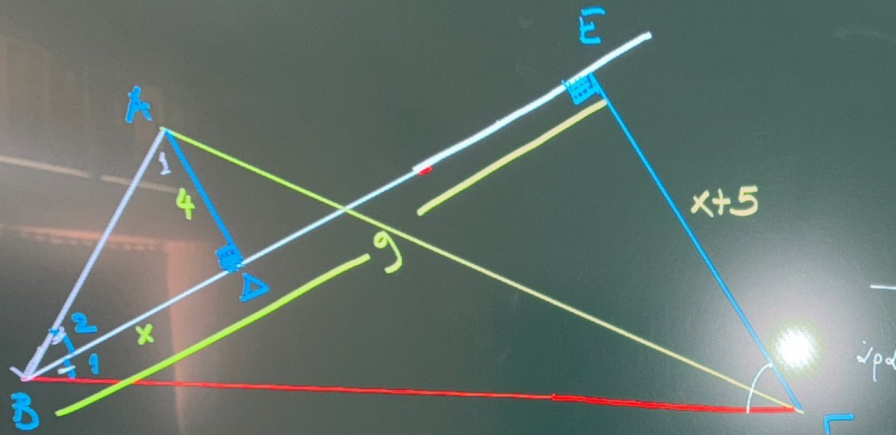


Ανάλυση ανάλυσης



Προσθήκη

ΘΕΜΑ 11



Άρα $x = 4 = BA$

Λόγος ομοιότητας = λόγος πλευρών
 $= \frac{4}{9}$

δ) Λόγος περιμέτρων τριγ = λόγος ομοιότητας
 $= \frac{4}{9}$

$\triangle AB \approx \triangle E \Gamma$ διότι :

- $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$
- $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (βλ. σχ. Β)
- $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως τρίτες γωνίες)

$$\frac{AB}{EB} = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{4}{x+5}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{BA}{B\Gamma} = \frac{4}{x+5}$$

↑ x και $\uparrow$

$$x(x+5) = 36$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0, \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ \frac{-18}{2} = -9 \text{ απορ.} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 17

(i) Να λυθεί:

$$1 - \frac{x}{2} < x - \frac{x}{3}$$

$$6 \cdot 1 - \cancel{3} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} < 6 \cdot x - \cancel{6}^2 \cdot \frac{x}{\cancel{3}}$$

$$6 - 3x < 6x - 2x$$

$$-3x - 6x + 2x < -6$$

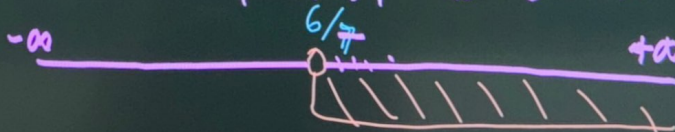
Προσοχή

$$-7x < -6$$

$$\frac{-7x}{-7} > \frac{-6}{-7}$$

$$x > \frac{6}{7}$$

→ γραφική αναπαράσταση των λύσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών



Απαλοιφή Παρονομαστών
Πολλαπλασιάζω με ΕΚΠ(2,3) = 6

Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους

← Διαίρω με τον συντελεστή του αγνώστου
(εδώ -7 που είναι αρνητικός κ' αλλάζω τη φορά της λύσεως)



Μενού



Έξοδος



Κοινή χρήση



Λίστα



Επιλογή



Γράψιμο



Γόμα



Καθαρισμός



Χάρακας



Σχήμα



Μορφή



Σημείωση



Μετακίνηση



Περισσότερα



Ανίχνευση



Ακύρωση
αναίρεσης



Προσθήκη



Προηγούμενη
σελίδα



5/7

Σελίδα

β. Να λυθεί η ανίσωση

$$4x \leq 2 \cdot (x+1)$$

$$4x \leq 2(x+1)$$

απαλοιφή παρενθέσεων (επιμεριστική)

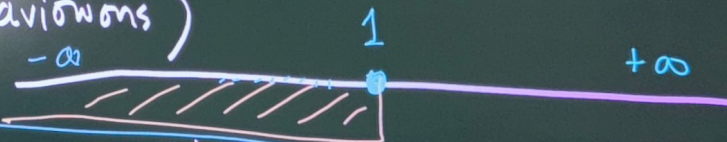
$$4x \leq 2x + 2$$

$$4x - 2x \leq 2$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{2}{2}$$

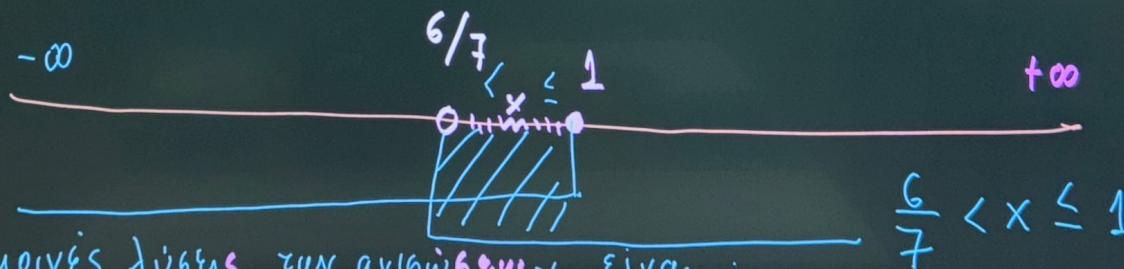
$$x \leq 1$$

διαίρω με τον συντελ. του αγνώστου
(που εδώ είναι το 2 κι είναι θετικός, άρα δε θ' αλλάξει
η φορά της ανίσωσης)



γ. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του α κ' β
ερωτήματος κ' να αναπαρασταθούν γραφικά

→ συναλήθευση
ανισώσεων



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι :

ΘΕΜΑ 14

α) Αλγεβρική Επίλυση Συστήματος

$$\begin{array}{l|l} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{5}{4} & \cdot 4 \\ -\frac{x}{2} + y = \frac{3}{4} & \cdot 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{x}{4} - 4 \cdot \frac{y}{2} = 4 \cdot \frac{5}{4} \\ -4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot y = 4 \cdot \frac{3}{4} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - 4y = 10 \\ -\cancel{2x} + 4y = 3 \\ \hline \textcircled{+} \quad 0 \cdot y = 13 \\ \text{αδύνατη} \end{array}$$

το (Σ) είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

Οπότε στη γραφική επίλυση θα σχεδιάσουμε
2 ευθείες παράλληλες

Ε ΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΘΕΜΑ 1

$$\begin{aligned}
 \text{α) } \Lambda(x) &= (x+3)^2 - 2 \cdot \overbrace{(x-1)(x+1)}^{\text{50\$}} - (x-4)^2 - 7 \\
 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 2 \cdot (x^2 - 1^2) - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 7 \\
 &= \cancel{x^2} + 6x + 9 - 2x^2 + 2 - \cancel{x^2} + 8x - 16 - 7 \\
 &= -2x^2 + 14x - 12
 \end{aligned}$$

αλγ. παρ.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

αναγωγή ομοίων όρων

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\Lambda(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2x^2}{-2} + \frac{14x}{-2} - \frac{12}{-2} &= \frac{0}{-2} \leftarrow \\
 x^2 - 7x + 6 &= 0
 \end{aligned}$$

Διαγώνισμε -2

$$a = 1, b = -7, \gamma = 6$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4a\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = \\
 &= 49 - 24 = 25 > 0
 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσω. έχει 2 ρίζες πραγμ. κ' άντισε:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x=6 \text{ ή } x=1$$

$\Delta > 0$

2 ρίζες πραγμ. κ' άντισε

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$

1 ρίζη ή 1 ρίζα

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0$

καμία πραγμ. λύση

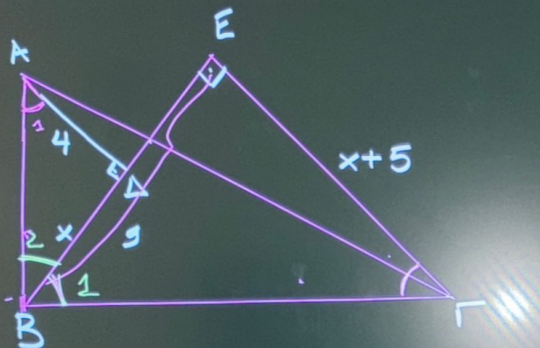
Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $A(x) = -2x^2 + 14x - 12$

Βρίσκω στο ερώτ (b) τις λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης

$-2x^2 + 14x - 12 = 0$ οπότε το πολυώνυμο $-2x^2 + 14x - 12$ παραγοντοποιείται ως εξής: $-2x^2 + 14x - 12 = \underline{-2} \cdot (x-1) \cdot (x-6)$

Να απλοποιήσετε την ρητή αλγ. παρ $K(x) = \frac{36 - x^2}{A(x)}$ αφού εξετάσετε πρώτα για ποιες τιμές του x ορίζεται

ΘΕΜΑ 11



ΥΠΟΘ.	ΣΥΜΠΕΡ.
BE διχοτ. $\hat{B}$	α) $\triangle ABD \sim \triangle BEG$
$AD \perp BE$	β) λόγοι
$GE \perp BE$	γ) $\frac{\pi_{ABD}}{\pi_{BEG}}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

2 γωνίες ίσες
μια ηρω μια !!!

Λόγος Τριγώνων Τριγ
= λόγος Ομοιότητας

$\triangle ABD \sim \triangle BEG$ διότι:

- $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 90^\circ$
- $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (BE διχ. $\hat{B}$)
- $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (ως τρίτες γωνίες)

Δεν είναι
→
υποχρεωτικό

$$\frac{DB}{EB} = \frac{BA}{BG} = \frac{DA}{EG}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{BA}{BG} = \frac{4}{x+5}$$

$$x \cdot (x+5) = 4 \cdot 9$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0 \quad \Delta = \dots$$

$$6 - 1(2x - 1) \leq 6x - 3(x - 2)$$

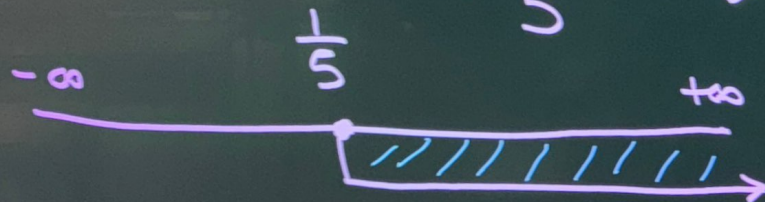
$$6 - 2x + 1 \leq 6x - 3x + 6$$

$$-2x - 6x + 3x \leq \cancel{6} - \cancel{6} - 1$$

$$-5x \leq -1$$

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{-1}{-5}$$

$$x \geq \frac{1}{5}$$



χωρίς γνωστούς από αλγεβρά

, διαιρώ με τον συντελεστή (που εδώ είναι αρνητικός & θα αλλάξει η φορά της ανίσωσης)

→ γραφική αναπαράσταση των λύσεων σε άξονα πραγματικών αριθμών

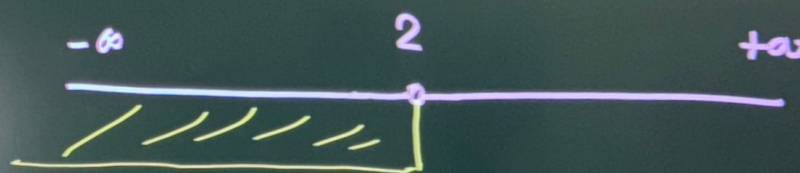
β). Να λυθεί η ανίσωση $3x < 2(x+1)$

$$3x < 2(x+1)$$

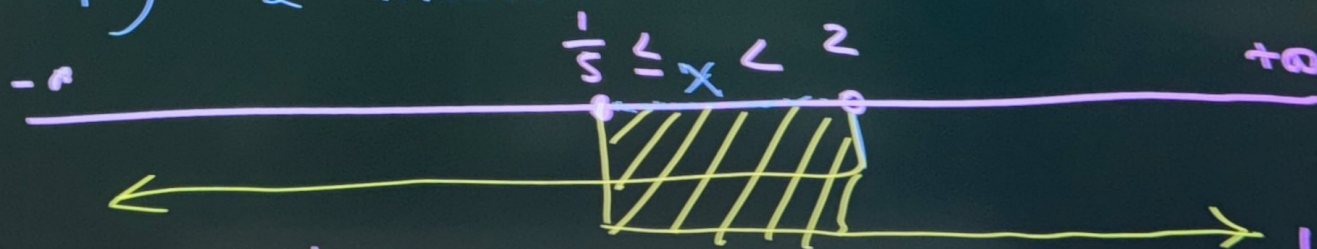
$$3x < 2x + 2$$

$$3x - 2x < 2$$

$$x < 2$$



γ). Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του α & β ερωτήματα
(Βάζουμε στον ίδιο άξονα πραγματικών τις λύσεις των
παριστάσεων) 2 ανισώσεων



Άρα οι κοινές λύσεις των 2 ανισώσεων είναι: $\frac{1}{5} \leq x < 2$

ΘΕΜΑ 15

να
προσαρμοστεί

$$\frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{2} = 3$$

• 6 πολλα με ΕΚΠ(2,3)=6

$$\textcircled{1} 3(x-1) + y = 2(y+3)$$

επιμεριβτιυή → απαλοιφή παρενθέσεων

$$\cancel{6} \cdot \frac{x+1}{\cancel{3}} - \cancel{6} \cdot \frac{y-1}{\cancel{2}} = 6 \cdot 3$$

$$\underline{2x+2} - \underline{3y+3} = \underline{18}$$

Α' μέλος: άγνωστοι

$$2x - 3y = 13$$

$$3x - y = 9 \quad | \cdot (-3)$$

$$\underline{3x-3} + \underline{y} = \underline{2y+6}$$

$$\underline{3x+y-2y} = \underline{6+3}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ -9x + 3y = -27 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ -9x + 3y = -27 \\ \hline \end{array}$$

$$3x - y = 9$$

$$3 \cdot 2 - y = 9$$

$$6 - 9 = y$$

$$y = -3$$

$$\textcircled{4} \begin{array}{r} = 7x = -14 \\ -7 \quad -7 \\ \hline \end{array} \quad x = 2$$

Άρα η λύση του συστ. είναι $(x,y) = (2,-3)$

Γραφική επίλυση του συστήματος

$$(\epsilon_1): 2x - 3y = 13$$

$$(\epsilon_2): 3x - y = 9$$

Για κάθε ευθεία θα βρω 2 σημεία
ώστε να τη σχεδιάσω. Τα σημεία
τα βρίσκω από τον πίνακα τιμών

$$(\epsilon_1): \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 13/2 \\ y & -5 & 0 \end{array}$$

$$\epsilon_2: \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 1 \\ y & 0 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{για } x = -1, 2 \cdot (-1) - 3y = 13, \text{ για } y = 0 \\ -2 - 3y = 13 \quad 2x - 3 \cdot 0 = 13 \\ -3y = 13 + 2 \quad 2x = 13 \\ -3y = 15 \quad x = \frac{13}{2} \\ -3y = 15 \\ y = -5 \end{array}$$

