ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης Σπύρος Φερεντίνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Ιωάννης Βανδουλάκης**, Μαθηματικός, διδάσκων με σύμβαση εργασίας (Π.Δ. 407/80) στο Πανεπιστήμιο του Αιγαίου **Χαράλαμπος Καλλιγάς**, Μαθηματικός - Πληροφορικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης **Νικηφόρος Μαρκάκης**, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης **Σπύρος Φερεντίνος**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Χαράλαμπος Τσίτουρας**, Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας **Γεώργιος Μπαραλός**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών **Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου**, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Κλειώ Γκιζελή**, Ζωγράφος **Ιόλη Κυρούση**, Γραφίστρια
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Βαρβάρα Δερνελή**, Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Αθανάσιος Σκούρας**, Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Μανώλης Χάρος**, Ζωγράφος
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η **Θεοδώρα Αστέρη**, Εκπαιδευτικός Α/θμιας Εκπαίδευσης

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο Δημοτικό σχολείο ολοκληρώθηκε ο πρώτος κύκλος της βασικής εκπαίδευσης. Στο Γυμνάσιο, θα στηριχτούμε στις γνώσεις που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, θα τις αξιοποιήσουμε και θα προσπαθήσουμε να τις αναπτύξουμε και να τις διευρύνουμε.

Στην πορεία αυτή, ίσως διαπιστώσουμε ότι οι γνώσεις που διαθέτουμε δεν επαρκούν πάντα. Πρέπει, λοιπόν, να συμπληρωθούν κατάλληλα και μετά να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, στον νέο προβληματισμό και τέλος στην καινούρια γνώση. Έτσι, με τη δική μας προσπάθεια και παράλληλα με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή μας, θα καταφέρουμε, όλοι μαζί μέσα στην τάξη, να αναπτύξουμε τις δυνατότητές μας, προσθέτοντας, όχι μόνο γνώσεις αλλά και νέους τρόπους να τις αποκτούμε.

Τα Μαθηματικά τα γνωρίζουμε ως ένα σχολικό μάθημα. Δεν πρέπει όμως να μείνουμε μόνο σ' αυτό. Όσα περισσότερα Μαθηματικά ξέρουμε και χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα ερμηνεύουμε τον κόσμο μας και τελικά τον κατανοούμε. Είναι ένας κώδικας απαραίτητος για την κατανόηση του κόσμου μας, που λειτουργεί όπως η "γλώσσα" προγραμματισμού στους υπολογιστές. Όσες περισσότερες "λέξεις" ξέρει κανείς από αυτή τη "γλώσσα", δηλαδή τα Μαθηματικά, τόσο καλύτερα αξιοποιεί τις δυνατότητες του μυαλού του. Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα εργαλείο για τη βελτίωση των ατομικών επιδόσεων, αλλά ένας βασικός μοχλός που βοηθάει την κοινωνική ανάπτυξη.

Το βιβλίο αυτό φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα βήμα προς τις κατευθύνσεις αυτές. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου, καθώς και τις συγκεκριμένες προδιαγραφές και οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι ότι η παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται συχνά, για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια των καθηγητών τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος την αναγκαία σύνθεση.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται και προηγούνται της θεωρίας, έχουν στόχο να υπάρξει ο προβληματισμός και η αναζήτηση που θα μας οδηγήσει στην ανάγκη να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η θεωρία είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Οδηγός σ' αυτό τον βηματισμό θα είναι και πάλι ο συνάδελφος καθηγητής του Γυμνασίου, που χωρίς τη δική του ουσιαστική συμβολή τίποτα δεν ολοκληρώνεται.

Πιστεύουμε ότι οι γονείς των μαθητών της Α' Γυμνασίου γνωρίζουν καλά, ότι σ' αυτή την ηλικία το σημαντικότερο δεν είναι η συνεχής συσσώρευση γνώσεων – που φαίνονται ατελείωτες και συχνά μένουν στείρες – αλλά ο τρόπος που αποκτάται σε κάθε περίπτωση η απαραίτητη γνώση. Αν στον τρόπο αυτό προστεθεί και η μέθοδος εμπέδωσης και αξιοποίησής της, τότε αυτή η γνώση παίρνει διαστάσεις του πολύτιμου αγαθού και της κοινωνικής αξίας, που παραμένει ο τελικός στόχος κάθε εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Στην εποχή μας, που όλα μεταβάλλονται ταχύτατα – και μαζί τους οι θεωρίες, οι απόψεις και οι θέσεις – κανείς δεν ισχυρίζεται ότι ένα σχολικό βιβλίο μπορεί να συνθέσει όλες τις απόψεις και να περιλάβει, στο σύνολό της, την εκπαιδευτική εμπειρία τόσων αιώνων.

Ως συγγραφείς του βιβλίου, θα είμαστε ευτυχείς αν οι συνάδελφοι καθηγητές, αλλά και όλοι οι ενδιαφερόμενοι, στείλουν στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο τις κρίσεις και τις παρατηρήσεις τους, ώστε να γίνει κατά το δυνατόν καλύτερο τούτο το βιβλίο. Το ποσοστό της "αλήθειας" που αυτό περιέχει θα διευρυνθεί όταν η προσπάθεια γίνει πιο συλλογική. Γι' αυτή την "αλήθεια" που, όπως λέει ο Ελύτης:

> *"Αιώνες τώρα ρωτούν οι μάγοι*
> *μα οι αστέρες αποκρίνονται κατά προσέγγιση".*

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕΡΟΣ Β′ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ Γ′ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Φυσικοί αριθμοί

1.1. Φυσικοί Αριθμοί - Διάταξη - Στρογγυλοποίηση
- *Κατανοώ τους φυσικούς αριθμούς*
- *Αντιστοιχίζω τους φυσικούς αριθμούς με σημεία του άξονα*
- *Συγκρίνω φυσικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ φυσικούς αριθμούς*

1.2. Πρόσθεση - Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών
- *Προσθέτω, αφαιρώ και πολλαπλασιάζω φυσικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών
- *Κατανοώ την έννοια της δύναμης* $α^ν$ *και διαβάζω δυνάμεις*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με μικρό εκθέτη και για τις δυνάμεις του 10 εφαρμόζω τις ισότητες:* $10^ν = 10 \ldots 0$ *(ν μηδενικά),* $2 \cdot 10^ν = 20 \ldots 0$ *(ν μηδενικά) κ.λπ.*
- *Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων με δυνάμεις και παρενθέσεις*

1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα
- *Γνωρίζω την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης*
- *Υπολογίζω το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδιας διαίρεσης δύο ακεραίων και γράφω την ισότητα αυτής*
- *Κατανοώ ότι οι εκφράσεις: "Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ", "Ο δ είναι διαιρέτης του Δ" και "Ο Δ διαιρείται με τον δ" είναι ισοδύναμες με την έκφραση: "Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια"*

1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- *Γνωρίζω ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι*
- *Γνωρίζω και χρησιμοποιώ τα κριτήρια διαιρετότητας με το 2, το 4, το 5 και το 10 καθώς και με το 3 και το 9*
- *Αναλύω δύο ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκω μ' αυτόν τον τρόπο το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών*

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ
(580 - 500 π.Χ.)

- Θέλεις να έχεις ή να ξέρεις; ρώτησε ο θείος τον ανηψιό του λίγο πριν τον αποχαιρετήσει στο αεροδρόμιο.

Το αγόρι κοίταξε το θείο του με μεγάλη απορία προσπαθώντας να καταλάβει τι εννοούσε με την ερώτησή του.

- Θέλεις να έχεις πράγματα ή να ξέρεις γι' αυτά; συμπλήρωσε ο θείος του.

Πριν ακόμα προλάβει το παιδί να απαντήσει, ο θείος του συνέχισε:

- Περάσαμε όμορφα στις διακοπές. Τώρα είναι Σεπτέμβριος, εγώ γυρίζω στη δουλειά μου κι εσύ αρχίζεις το Γυμνάσιο. Θα σε ξαναδώ του χρόνου το καλοκαίρι και θα είσαι ένα χρόνο και μία τάξη μεγαλύτερος. Έπιασε το αγόρι από τους ώμους και κοιτώντας το στα μάτια πρόσθεσε:

- Δε θέλω να μου απαντήσεις τώρα. Θα σε ξαναρωτήσω του χρόνου. Έχεις, λοιπόν, καιρό να το ψάξεις, να κάνεις υποθέσεις, να φτιάξεις ιστορίες και πιθανά σενάρια, να σκεφτείς. Κυρίως αυτό: να σκεφτείς, είπε, σφίγγοντάς του τα χέρια.

"Παρακαλούνται οι επιβάτες της πτήσης για Παρίσι να προσέλθουν στον έλεγχο των εισιτηρίων", ακούστηκε η αναγγελία από τα μεγάφωνα.

- Και κοίτα, αν δεν έχεις σίγουρη απάντηση, δεν πειράζει. Η διαδρομή αυτή μπορεί να αξίζει περισσότερο. Το μυαλό μπορεί να φτιάξει μόνο του έναν ολόκληρο κόσμο. "Καλή πορεία, αγόρι μου".

- Καλό ταξίδι, θείε...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η τάξη είναι η ίδια ένα ταξίδι. Είναι μια διαδρομή από σκέψη σε σκέψη, από μία γνώμη σε μια άλλη, από μια έκφραση σε έναν συλλογισμό. Απόψεις που συμφωνούν, γνώμες που είναι διαφορετικές, ιδέες που διαμορφώνονται, συνθέτουν νέες γνώσεις και προσθέτουν εμπειρίες. Η θεωρία αναπτύσσεται μετά από τον σχετικό προβληματισμό και τον διάλογο που γίνεται μέσα στην τάξη. Είναι η τελική θέση στην οποία καταλήγουμε, αφού δοκιμάσουμε και επαληθεύσουμε τη σκέψη μας. Ακριβώς γι αυτό προηγούνται οι σχετικές δραστηριότητες. Μέσα απ' αυτές θα προβληματιστούμε και θα εκφράσουμε την άποψή μας. Δε σημαίνει ότι σε όλα θα έχουμε απαντήσεις και ότι όλα θα τα μπορέσουμε μόνοι μας. Γι' αυτό είναι και οι άλλοι. Αρκεί να μάθουμε ν' ακούμε τη γνώμη τους. Η σκέψη των άλλων θα πάει τη δική μας ένα βήμα παραπέρα. Σ' αυτό μας συντονίζει και μας βοηθάει ο καθηγητής μας. Όλοι μαζί και ομαδικά θα καταφέρουμε περισσότερα. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση

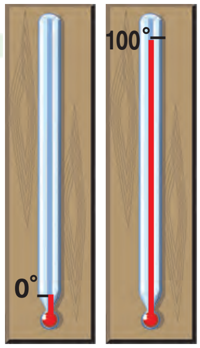
Από το Δημοτικό σχολείο μάθαμε την έννοια του φυσικού αριθμού. Στην παράγραφο αυτή γίνεται επανάληψη της έννοιας, της διάταξης και της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών. Μέσα από τις δραστηριότητες, που ακολουθούν, θα προσπαθήσουμε να ξαναθυμηθούμε αυτά που έχουμε μάθει και να τα διατυπώσουμε με πιο οργανωμένη σκέψη.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Διάλεξε έναν τριψήφιο αριθμό. Βρες όλους τους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξεις τα ψηφία του αριθμού που διάλεξες και γράψε αυτούς με όλους τους δυνατούς τρόπους.

- *Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;*
- *Γράψε όλους τους αριθμούς που βρήκες με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.*
- *Στη συνέχεια, γράψε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



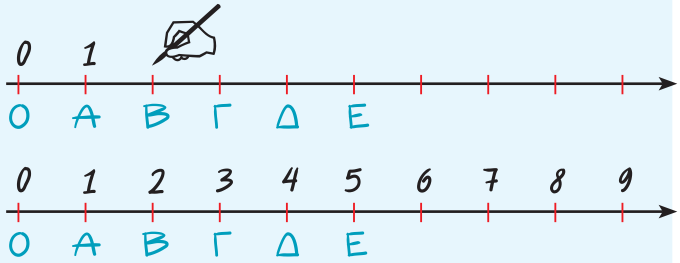
Για να βαθμολογήσουμε ένα θερμόμετρο ακολουθούμε μια συγκεκριμένη μέθοδο: Το αφήνουμε στον πάγο αρκετή ώρα και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το μηδέν (0°). Στη συνέχεια το αφήνουμε μέσα σε νερό που βράζει και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το εκατό (100°).

- *Σκέψου και διατύπωσε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούσες να σημειώσεις και όλες τις ενδιάμεσες ενδείξεις.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 98, 99, 100, ..., 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί.**
  - **Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.**
- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους **άρτιους ή ζυγούς** και τους **περιττούς ή μονούς**.
- **Άρτιοι** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 και **περιττοί** εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.
- Το **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης** δίνει τη δυνατότητα να σχηματίζουμε το **απεριόριστο** πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας μόνο τα δέκα γνωστά ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
  - **Η δυνατότητα αυτή υπάρχει γιατί η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται και από τη θέση που κατέχει, δηλαδή τη δεκαδική τάξη του** (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, ...).
- Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:
  το = που σημαίνει "**ίσος με**",
  το < που σημαίνει "**μικρότερος από**" και
  το > που σημαίνει "**μεγαλύτερος από**".
  - **Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς μεταξύ τους.** Επομένως έχουμε τη δυνατότητα **να διατάξουμε** τους φυσικούς αριθμούς **από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο**, δηλαδή με **αύξουσα** σειρά μεγέθους. Για παράδειγμα: $0<1<2<3< \dots <10<11<12< \dots <297< \dots <1000< \dots$

- Η δυνατότητα αυτή, της διάταξης των φυσικών αριθμών, επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον παρακάτω τρόπο: Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο **Ο** της ευθείας, που το λέμε **αρχή**, για να παραστήσουμε τον αριθμό 0. Μετά δεξιά από το σημείο **Ο** διαλέγουμε ένα άλλο σημείο **Α**, που παριστάνει τον αριθμό **1**. Τότε, με μονάδα μέτρησης το **ΟΑ**, βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: **2**, **3**, **4**, **5**, ...



Στρογγυλοποίηση

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Στις 13 Ιουνίου 2004, ακούστηκε στις ειδήσεις ότι από τα 450 *εκατομμύρια πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, ψηφίζουν τα* 338 *εκατομμύρια για να εκλέξουν* 732 *βουλευτές του Ευρωκοινοβουλίου.*

- *Γιατί δεν αναφέρθηκε το ακριβές πλήθος των* 454.018.512 *πολιτών της Ε.Ε., καθώς και ο ακριβής αριθμός των* 337.922.145 *που είχαν δικαίωμα ψήφου;*
- *Γιατί, αντίθετα, στην περίπτωση των* 732 *ευρωβουλευτών, αναφέρθηκε ο ακριβής αριθμός;*
- *Πότε επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε αυτή τη διαδικασία προσέγγισης ενός φυσικού αριθμού;*

Σκεφτόμαστε

Η δραστηριότητα αυτή μας οδηγεί να προβληματιστούμε γιατί σε αριθμούς, όπως το ακριβές πλήθος των πολιτών της Ε.Ε., δε χρειάζεται να αναφερθούμε με ακρίβεια, ενώ σε άλλους, όπως ο αριθμός των ευρωβουλευτών, απαιτείται ακρίβεια. Πότε, γενικότερα, η ακριβής διατύπωση ενός αριθμού είναι αναγκαία;

Στην περίπτωση του πλήθους των πολιτών ή των ψηφοφόρων της Ε.Ε., αυτό που κυρίως ενδιαφέρει είναι η "τάξη μεγέθους", π.χ. τα εκατομμύρια. Ενώ για τους ευρωβουλευτές ο ακριβής αριθμός είναι απαραίτητος, π.χ. στις ψηφοφορίες.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι χρειάζεται μια διαδικασία που μας βοηθάει να εκφράσουμε, με τρόπο κοινά αποδεκτό, έναν φυσικό αριθμό για τον οποίο δεν απαιτείται ακρίβεια. Για παράδειγμα το ύψος ενός βουνού που είναι 1987 m., λέμε, συνήθως, 2000 m. Ενώ ο αριθμός ενός τηλεφώνου, το ΑΦΜ ή ο ταχυδρομικός κωδικός αναφέρονται πάντα με ακρίβεια.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Πολλές φορές αντικαθιστούμε έναν φυσικό αριθμό με μια προσέγγισή του, δηλαδή κάποιο άλλο λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερό του. Τη διαδικασία αυτή την ονομάζουμε **στρογγυλοποίηση**.
- Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό:
  — Προσδιορίζουμε την τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
  — Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
  — Αν αυτό είναι **μικρότερο** του **5** (δηλαδή **0**, **1**, **2**, **3** ή **4**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων **μηδενίζονται**.
  — Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** του **5** (δηλαδή **5**, **6**, **7**, **8** ή **9**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 9.573.842 στις (α) εκατοντάδες, (β) χιλιάδες, (γ) εκατομμύρια.

Λύση

(α) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατοντάδες.** Προηγούμενη τάξη: 4 < 5. Το 4 και όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν. 9.573.842 9.573.800

(β) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **χιλιάδες.** Προηγούμενη τάξη: 8 > 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 3 γίνεται 4. 9.573.842 9.574.000

(γ) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατομμύρια.** Προηγούμενη τάξη: 5 = 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 9 γίνεται 10. 9.573.842 10.000.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Γράψε με ψηφία τους αριθμούς που δίνονται παρακάτω σε φυσική γλώσσα:* *(α)* διακόσια πέντε, *(β)* επτακόσια τριάντα δύο, *(γ)* είκοσι χιλιάδες οκτακόσια δέκα τρία.

2. *Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς: (α)* 38.951, *(β)* 5.000.812, *(γ)* 120.003.

3. *Ποιοι είναι οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του* 289 *και ποιοι οι δύο επόμενοι;*

4. *Τοποθέτησε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:* 3.515, 4.800, 3.620, 3.508, 4.801.

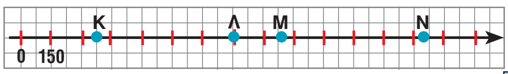
5. *Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των ακόλουθων αριθμών:* *(α)* 45...45 *(β)* 38...36, *(γ)* 456...465, *(δ)* 8.765...8.970, *(ε)* 90.876...86.945, *(στ)* 345...5.690.

6. *Κατασκεύασε έναν άξονα με αρχή το σημείο* Ο *και μονάδα* ΟΑ *ίσο με* 2 cm. *Τοποθέτησε τα σημεία* Β, Γ, Δ, Ε *σε αποστάσεις* 6 cm, 10 cm, 12 cm *και* 14 cm *αντίστοιχα. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;*

7. *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.*

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) *Στον αριθμό* 5780901 *το μηδέν δηλώνει απουσία δεκάδων και χιλιάδων.*		
(β) *Δέκα χιλιάδες είναι μία δεκάδα χιλιάδων.*		
(γ) *Σε μια πενταήμερη εκδρομή θα γίνουν πέντε διανυχτερεύσεις.*		
(δ) *Από τον αριθμό* 32 *ως και τον αριθμό* 122 *υπάρχουν* 91 *αριθμοί.*		
(ε) *Σε οκτώ ημέρες από σήμερα, που είναι Πέμπτη,θα είναι Παρασκευή.*		
(στ) *Από την* 12η *σελίδα του βιβλίου μέχρι και την* 35η *είναι* 24 *σελίδες.*		
(ζ) *Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ των αριθμών* 2 *και* 3.		

Οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα.



	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(η) *Στο σημείο* Κ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 370.		
(θ) *Στο σημείο* Λ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1050.		
(ι) *Στο σημείο* Μ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1200.		
(ια) *Στο σημείο* Ν *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1875.		

8. *Στρογγυλοποίησε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς:* 345, 761, 659, 2.567, 9.532, 123.564, 34.564, 31.549 *και* 8.765.

9. *Στρογγυλοποίησε τον αριθμό* 7.568.349 *στις πλησιέστερες: (α) δεκάδες, (β) εκατοντάδες, (γ) χιλιάδες, (δ) δεκάδες χιλιάδες, (ε) εκατοντάδες χιλιάδες.*

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις "πράξεις" των φυσικών αριθμών. Το ουσιαστικό "πράξη" προκύπτει από το ρήμα "πράττω" και δηλώνει μια δράση ή ενέργεια. Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα υλοποιούν ανάγκες μέτρησης. Σύνθετες μετρήσεις προκύπτουν από απλές μετρήσεις με τη διαδικασία των πράξεων, όπως για παράδειγμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ο διπλανός πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψήφιων φυσικών αριθμών.

- *Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;*
- *Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;*
- *Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;*
- *Σύγκρινε τα αθροίσματα 3 + 6 και 6 + 3 και μετά τα αθροίσματα (5+4) + 2 και 5 + (4+2)*
- *Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.*
- *Φτιάξε ένα παρόμοιο πίνακα για τον πολλαπλασιασμό, διατύπωσε τα αντίστοιχα ερωτήματα και προσπάθησε να δώσεις τις κατάλληλες απαντήσεις.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να προσθέσουμε δύο μόνο αριθμούς, συνεπώς από τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν άθροισμα 12, δηλαδή $9+3$, $8+4$, $7+5$, $6+6$, εκείνο που έχει διαφορά 2 είναι το ζευγάρι των αριθμών 7 και 5.
Επίσης, παρατηρούμε ότι: $0+1=1+0=1$, $0+2=2+0=2$, $0+3=3+0=3$, κ.ο.κ.
Η σύγκριση των αθροισμάτων $3+6=9$ και $6+3=9$, όπως και άλλων τέτοιων αθροισμάτων π.χ. $7+1=8$ και $1+7=8$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.
Επίσης, η σύγκριση των αθροισμάτων: $(5+4)+2=11$ και $5+(4+2)=11$, αλλά και άλλων αθροισμάτων, όπως π.χ. $(9+1)+3=13$ και $9+(1+3)=13$ κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της προσεταιριστικής ιδιότητας. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

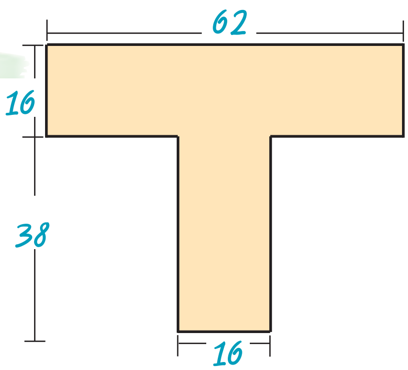
Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

- *Μπορείς να βρεις τις μεταξύ των πόλεων αποστάσεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

- *Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Πρόσθεση

$$\underbrace{13 + 5}_{\text{Προσθετέοι}} = \underbrace{18}_{\text{Άθροισμα}}$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- Το **άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με το μηδέν** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\quad a + 0 = 0 + a = a$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος) $\quad a + \beta = \beta + a$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $\quad (a+\beta)+\gamma=a+(\beta+\gamma)$

- **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.

$$M = A + \Delta$$

και γράφουμε

$$\Delta = M - A$$

- **Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ**. Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

Πολλαπλασιασμός

$$\underbrace{7 \cdot 6}_{\text{Παράγοντες}} = \underbrace{42}_{\text{Γινόμενο}}$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- **Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με τη μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου) $\quad a \cdot \beta = \beta \cdot a$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $\quad (a\cdot\beta)\cdot\gamma=a\cdot(\beta\cdot\gamma)$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση** $\quad a\cdot(\beta+\gamma)=a\cdot\beta+a\cdot\gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση** $\quad a\cdot(\beta-\gamma)=a\cdot\beta-a\cdot\gamma$
- **Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί το μηδέν** ισούται με **το μηδέν** $\quad a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$

*Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** και **–** χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «**:**». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα **x** και **=** καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) 35 · 10, (β) 421 · 100, (γ) 5 · 1.000, (δ) 27 · 10.000*

Λύση

(α) 35 · 10 = 350
(β) 421 · 100 = 42.100
(γ) 5 · 1.000 = 5.000
(δ) 27 · 10.000 = 270.000

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει κάθε φορά ο παράγοντας 10, 100, 1.000 ....

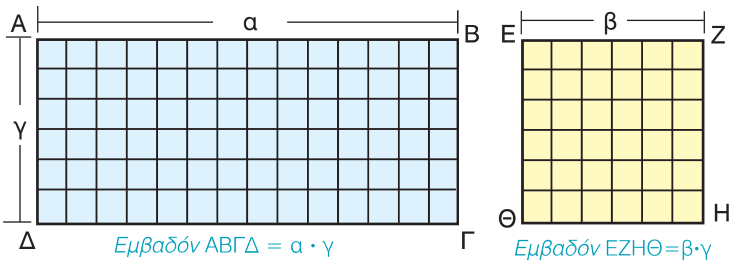
2. *Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:*
(α) 89 · 7 + 89 · 3, (β) 23 · 49 + 77 · 49, (γ) 76 · 13 – 76 · 3, (δ) 284 · 99

Λύση

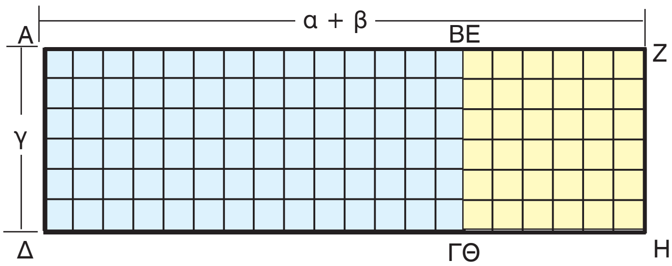
(α) 89 · 7 + 89 · 3 = 89 · (7 + 3) = 89 · 10 = 890
(β) 23 · 49 + 77 · 49 = (23 + 77) · 49 = 100 · 49 = 4.900
(γ) 76 · 13 - 76 · 3 = 76 · (13-3) = 76 · 10 = 760
(δ) 284 · 99 = 284 · (100 - 1) = 284 · 100 - 284 · 1 = 28.400 - 284 = 28.116

3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
(α + β) · γ = α · γ + β · γ και (α – β) · γ = α · γ – β · γ

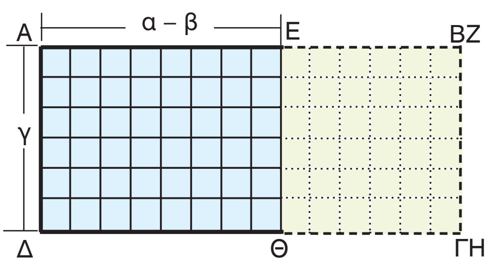
Λύση



Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα (μπλε και κίτρινο) έχουν μία διάσταση με το ίδιο μήκος **γ**. Για αυτό τον λόγο μπορούμε, αν τα "κολλήσουμε", όπως φαίνεται στο σχήμα, να φτιάξουμε ένα τρίτο, το **ΑΖΗΔ**, με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους. Αν βάλουμε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα αποκτήσουμε ένα άλλο, το **ΑΕΘΔ**, που θα έχει εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο αρχικών.



Εμβ. ΑΖΗΔ = Εμβ. ΑΒΓΔ + Εμβ. ΕΖΗΘ
Οπότε: (α+β) · γ = α · γ + β · γ



Εμβ. ΑΕΘΔ = Εμβ. ΑΒΓΔ – Εμβ. ΕΖΗΘ
Οπότε: (α–β) · γ = α · γ – β · γ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο **Γκάους** *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1784, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:*

1+2+3+....+98+99+100, *πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{50 \text{ φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 *και να μετρήσεις τον χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) *Η ιδιότητα* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ *λέγεται* ....

(β) *Η ιδιότητα* $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ *λέγεται* ....

(γ) *Ο αριθμός που προστίθεται σε αριθμό α και δίνει άθροισμα α είναι* ....

(δ) *Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης λέγεται* ....

(ε) *Σε μια αφαίρεση οι αριθμοί* Μ, Α *και* Δ *συνδέονται με τη σχέση:* ....

(στ) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ *λέγεται* ....

(ζ) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ *λέγεται* ....

(η) *Η ιδιότητα* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ *λέγεται* ....

2. *Συμπλήρωσε τα γινόμενα: (α)* $52 \cdot \square = 5.200$, *(β)* $37 \cdot \square = 370$, *(γ)* $490 \cdot \square = 4.900.000$.

3. *Συμπλήρωσε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστά αθροίσματα:*

(α) $\begin{array}{r} \square 5\,8\,2 \\ +\ 7\,5\,\square\,1 \\ \hline \square\,1\,\square\,7\,3 \end{array}$ *(β)* $\begin{array}{r} 4\,\square\,5 \\ +\ 5\,2\,\square \\ \hline \square\,\square\,1\,0 \end{array}$ *(γ)* $\begin{array}{r} \square\,5\,\square\,5 \\ +\ 5\,2\,\square \\ \hline 4\,\square\,9\,3 \end{array}$

4. *Αντιστοίχισε κάθε γραμμή του πρώτου πίνακα με ένα από τα αποτελέσματα που υπάρχουν στον δεύτερο πίνακα.*

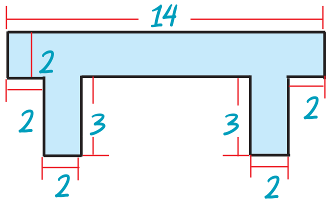
1 + 2 + 3 + 4	14
1 + 2 + 3 · 4	24
1 · 2 + 3 · 4	10
1 · 2 · 3 · 4	15

5. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	157 + 33 =	190 ☐	200 ☐	180 ☐
(β)	122 + 25 + 78 =	200 ☐	250 ☐	225 ☐
(γ)	785 – 323 =	462 ☐	458 ☐	562 ☐
(δ)	7.321 – 4.595 =	2.724 ☐	2.627 ☐	2.726 ☐
(ε)	60 – (18 – 2) =	60+18–2 ☐	(60–18)–2 ☐	60–18+2 ☐
(στ)	52 – 11 – 9 =	52–(11+9) ☐	(52–11)–9 ☐	52–20 ☐
(ζ)	23 · 10 =	230 ☐	240 ☐	2.300 ☐
(η)	97 · 100 =	970 ☐	9.700 ☐	9.800 ☐
(θ)	879 · 1000 =	87900 ☐	879000 ☐	880000 ☐

6. Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:
(α) 3•13, (β) 7•11, (γ) 45•12, (δ) 12•101, (ε) 5•110, (στ) 4•111, (ζ) 34•99, (η) 58•98.

7. Υπολόγισε το εμβαδόν του σχήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα.



8. Αγοράσαμε διάφορα σχολικά είδη που κόστιζαν: 156 €, 30 €, 38 €, 369 € και 432 €.
(α) Υπολόγισε πρόχειρα αν αρκούν 1.000 € για να πληρώσουμε τα είδη που αγοράσαμε.
(β) Βρες πόσα ακριβώς χρήματα θα πληρώσουμε.

9. Ο Νίκος κατέβηκε για ψώνια με 160 €. Σε ένα μαγαζί βρήκε ένα πουκάμισο που κόστιζε 35 €, ένα πανταλόνι που κόστιζε 48 € και ένα σακάκι που κόστιζε 77 €. Του φτάνουν τα χρήματα για να τα αγοράσει όλα;

10. Σε ένα αρτοποιείο έφτιαξαν μία μέρα 120 κιλά άσπρο ψωμί, 135 κιλά χωριάτικο, 25 κιλά σικάλεως και 38 κιλά πολύσπορο. Πουλήθηκαν 107 κιλά άσπρο ψωμί, 112 κιλά χωριάτικο, 19 κιλά σικάλεως και 23 κιλά πολύσπορο. Πόσα κιλά ψωμί έμειναν απούλητα;

11.

Ο Άρης γεννήθηκε το 1983 και είναι 25 χρόνια μικρότερος από τον πατέρα του.
(α) Πόσων χρονών είναι ο Άρης σήμερα;
(β) Πότε γεννήθηκε ο πατέρας του;

12. Ένα γκαράζ έχει 12 πατώματα. Τα 7 πατώματα έχουν 20 διπλές θέσεις το καθένα και τα υπόλοιπα από 12 διπλές θέσεις. Στο γκαράζ μπήκαν 80 μοτοσυκλέτες, 58 επιβατικά και 61 ημιφορτηγά. Επαρκούν οι θέσεις για όλα αυτά;

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Αρχικά ο άνθρωπος έκανε μόνο τον διαχωρισμό: **ένα, δύο, πολλά**. *Με την πρόοδο του πολιτισμού, την ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου διαμορφώνει τις έννοιες των αριθμών. Σ' αυτό βοήθησαν και τα* **φυσικά πρότυπα αρίθμησης**, *όπως π.χ. τα δάκτυλα του ενός χεριού (αρίθμηση βάση το 5) ή των δύο χεριών (βάση το 10). Μετά, τα πρώτα αυτά αριθμητικά συστήματα, συμπληρώνονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.*

Τα αποτελέσματα της αρίθμησης καταγράφονταν με τη βοήθεια χαραγών πάνω σε ξύλα ή κόκαλα ή με κόμπους σε σχοινιά. Το αρχαιότερο εύρημα ανάγεται στους προϊστορικούς χρόνους και είναι το κόκαλο ποδιού ενός μικρού λύκου μήκους 18 εκατοστών που βρέθηκε, το 1937, στην πόλη Βεστόνιτσε της Μοραβίας (εικόνα).

Η ανάγκη υπολογισμού μεγεθών απαιτεί σύγκριση με ένα σταθερό υπόδειγμα, τη **μονάδα μέτρησης**. *Οι πρώτες μονάδες αντιστοιχούν πάλι σε μέλη του σώματος, όπως παλάμες, δάχτυλους, πόδια, οργιά, πήχη. Από τα φυσικά πρότυπα, τις χαραγές, τους κόμπους, τα βότσαλα περάσαμε μέσα σε περίοδο χιλιάδων ετών στα* **σύμβολα που παρίσταναν αριθμούς**. *Τα σύμβολα αυτά ήταν διαφορετικά στους διάφορους αρχαίους πολιτισμούς. Η ενοποίηση του συμβολισμού των αριθμών που υπάρχει σήμερα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια για να γίνει.*

Η **ιστορία του μηδενός** *και ο συμβολισμός του ακολουθεί διαφορετική πορεία. Κι αυτό γιατί η ανάγκη ύπαρξης ξεχωριστού συμβόλου για το* **"τίποτα"** *εμφανίστηκε πολύ αργότερα.*

Οι **Σουμέριοι** *και οι* **Βαβυλώνιοι** *άφηναν ένα* **κενό** *διάστημα για να δηλώσουν την απουσία αριθμητικού ψηφίου σε κάποια θέση. Οι παρανοήσεις και τα λάθη που προέκυπταν τους οδήγησαν στην υιοθέτηση του ειδικού συμβόλου*  *ή*  *ή*  *κατά την Περσική περίοδο.*

Το σύμβολο αυτό το τοποθετούσαν μόνο μεταξύ δύο ψηφίων και όχι στο τέλος ενός αριθμού. Από τον 3ο - 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν είναι μια κουκίδα. Ο μαθηματικός και αστρονόμος Βραχμαγκούπτα, το 628 μ.Χ. ονομάζει το μηδέν ως "το τίποτα". Τον 9ο αιώνα συναντάμε επιγραφή με σαφή συμβολισμό για το μηδέν.

Οι **Ινδοί** *χρησιμοποιούν το σύμβολο του μηδενός και ως τελευταίο ψηφίο αριθμού. Έτσι είχαν 10 ισότιμα ψηφία τα:* • *ή* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *και* 9.

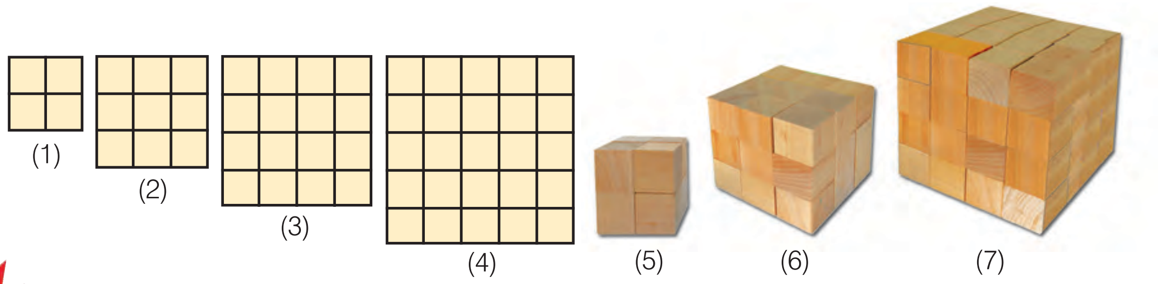
Ο Άραβας μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.), στο έργο του "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών" γράφει το 820 μ.Χ. για το μηδέν: **"Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε, για να μη μείνει άδεια η θέση πρέπει να μπαίνει ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί π.χ. η δεύτερη να θεωρηθεί ως πρώτη"**.

Ο Έλληνας μαθηματικός **Κλαύδιος Πτολεμαίος** *(100 - 178 μ.Χ.) χρησιμοποιεί το σύμβολο* 0 *για να παραστήσει το μηδέν, στο βιβλίο του "Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη" ή* **"Αλμαγέστη"** *(150 μ.Χ.). Το επινόησε από το αρχικό γράμμα της λέξης* **"ουδέν"** *που σημαίνει* **κανένα** *(ψηφίο).*

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Από πόσα τετράγωνα ☐ *αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους κύβους* ■ *τα επόμενα τρία;*



Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι έχουμε: (1) $4=2\cdot2=2^2$, (2) $9=3\cdot3=3^2$, (3) $16=4\cdot4=4^2$, (4) $25=5\cdot5=5^2$

Και αντίστοιχα: (5) $8=2\cdot2\cdot2=2^3$, (6) $27=3\cdot3\cdot3=3^3$, (7) $64=4\cdot4\cdot4=4^3$

Οι περιπτώσεις (1) έως και (4) αφορούν τα **τετράγωνα** των φυσικών αριθμών 2, 3, 4 και 5.

Οι περιπτώσεις (5) έως και (7) αφορούν τους **κύβους** των φυσικών αριθμών 2, 3 και 4.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε ονομασίες και συμβολικές εκφράσεις όπως φαίνεται παρακάτω.

- Το γινόμενο **α·α·α· ... · α,** που έχει **ν** παράγοντες ίσους με το **α**, λέγεται **δύναμη του α στη ν** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με α^ν.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ο αριθμός **α** λέγεται **βάση της δύναμης** και ο **ν** λέγεται **εκθέτης.**

- Η **δύναμη** του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το α^2, λέγεται και **τετράγωνο του α**. α^2

- Η **δύναμη** του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το α^3, λέγεται και **κύβος του α**. α^3

  ► Το α^1, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α**. $\alpha^1=\alpha$

- Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^ν, είναι **όλες ίσες με 1**. $1^\nu=1$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση: $4 \cdot (7 + 7 \cdot 9) + 20$ *και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε* 335, *η Ρένα* 300 *και ο Δημήτρης* 524.

➢ *Ποιός νομίζεις ότι έχει δίκιο; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Σε μία αριθμητική παράσταση συμφωνούμε η **προτεραιότητα των πράξεων** να είναι η ακόλουθη:
  1. Υπολογισμός **δυνάμεων**.
  2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών** και **διαιρέσεων**.
  3. Εκτέλεση **προσθέσεων** και **αφαιρέσεων**.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** με την παραπάνω σειρά. Το τελικό αποτέλεσμα που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μία αριθμητική παράσταση το λέμε **τιμή** της.

Η χρήση των παρενθέσεων ξεκίνησε από τον 17ο αιώνα με στόχο να υποδείξει την προτεραιότητα των πράξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;*

Λύση

$$
\begin{aligned}
10^2 &= 10 \cdot 10 & & & &= 100\\
10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 100 \cdot 10 &&= 1.000\\
10^4 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 1.000 \cdot 10 &&= 10.000\\
10^5 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 10.000 \cdot 10 &&= 100.000\\
10^6 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 100.000 \cdot 10 &&= 1.000.000
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις δυνάμεις του 10, που υπολογίστηκαν, έχει τόσα μηδενικά όσος είναι και ο εκθέτης της δύναμης. Για παράδειγμα: $10^6 = 1.000.000$ *(έξι μηδενικά).*

2. *Να εκτελεστούν οι πράξεις: (α)* $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$ *(β)* $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$

Λύση

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3+2)^2 = 10^4 + 4 \cdot 5^2 = 10.000 + 4 \cdot 25 = 10.000 + 100 = 10.100$

(β) $(2+3)^3 - 8 \cdot 3^2 = 5^3 - 8 \cdot 9 = 125 - 72 = 53$

3. *Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 7.604 με χρήση των δυνάμεων του 10.*

Λύση

Είναι: $7.604 = 7_{\text{χιλιάδες}} + 6_{\text{εκατοντάδες}} + 0_{\text{δεκάδες}} + 4_{\text{μονάδες}}$

$= 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1 =$

$= 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$

Η μορφή αυτή $7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$ του αριθμού 7.604 είναι **το ανάπτυγμα του αριθμού σε δυνάμεις του 10.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
$α^2$														
$α^3$														

2. Γράψε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα: (α) 5•5•5•5•5•5 (β) 8•8•8•8•8•8•6•6•6 (γ) 1•1•1•1•1•1 (δ) α•α•α•α (ε) x•x•x (στ) 2•2•2•2•α•α•α .

3. Υπολόγισε τις δυνάμεις: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}.

4. Βρες τα τετράγωνα των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.

5. Βρες τους κύβους των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50.

6. Κάνε τις πράξεις: (α) $3 \cdot 5^2$, (β) $3 \cdot 5^2 + 2$, (γ) $3 \cdot 5^2 + 2^2$, (δ) $3 \cdot 5 + 2^2$, (ε) $3 \cdot (5 + 2)^2$.

7. Κάνε τις πράξεις: (α) $3^2+3^3+2^3+2^4$, (β) $(13–2)^4 + 5 \cdot 3^2$.

8. Βρες τις τιμές των παραστάσεων: (α) $(6+5)^2$και 6^2+5^2, (β) $(3+6)^2$ και 3^2+6^2. Τι παρατηρείς;

9. Γράψε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
(α) α+α+α, (β) α•α•α, (γ) x+x+x+x, (δ) x•x•x•x .

10. Γράψε τους αριθμούς: (α) 34.720, (β) 123.654, (γ) 890.650 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.

11. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στον δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

(1+2) • (3+4)	20
1 • (2+3•4)	21
(1•2+3)• 4	9
1 + (2+3) • 4	14

12. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στον δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

2 + 2• 2	150
3 + 3• 3	68
4 + 4• 4• 4	16
5+5• 5+5• 5	6
5 • 5+5 • 5• 5	12
4 + 4• 4 – 4	55

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Χρησιμοποίησε μόνο τα σύμβολα των πράξεων: + και • και τις παρενθέσεις "(" και ")" για να συμπληρώσεις τις γραμμές ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες.

1	2	3	4 = 13
1	2	3	4 = 14
1	2	3	4 = 15
1	2	3	4 = 36

2. Συμπλήρωσε τα μαγικά τετράγωνα.

20		18
	17	
		14

26		
27	25	23

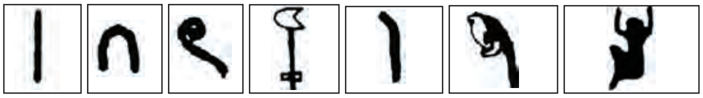
8	1	6
		7

	19	
	15	17
	11	

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πιο παλιοί αριθμοί γράφτηκαν από τους **Σουμέριους** *σε πήλινα πινακίδια της 3ης - 2ης χιλιετηρίδας π.Χ. Οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Πρώτα οι μονάδες, μετά οι δεκάδες κ.λπ. Το 1854 ανακαλύφθηκαν κοντά στις όχθες του Ευφράτη, πήλινα πινακίδια γραμμένα στην περίοδο 2300 - 1600 π.Χ. από τους* **Βαβυλώνιους** *που χρησιμοποιούσαν και το δεκαδικό σύστημα.*

Οι **Αιγύπτιοι** *από το 3000 - 2500 π.Χ. είχαν ειδικά ιερογλυφικά για την παράσταση των αριθμών. Τα ειδικά σύμβολα που είχαν για να παριστάνουν τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:*



1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Τον 5ο αιώνα π.Χ. στην **Ιωνία** *δημιουργήθηκε το* **αλφαβητικό** *σύστημα αρίθμησης, που ήταν το τελειότερο σύστημα αρίθμησης μετά το αραβικό και έμεινε σε χρήση μέχρι και την Αναγέννηση, παράλληλα με το ρωμαϊκό. Σ' αυτό κάθε αριθμός από το 1 ως το 9, κάθε δεκάδα 10, 20, 30,..., 90, κάθε εκατοντάδα 100, 200, ..., 900, συμβολίζονταν από ένα γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου με μια οξεία πάνω αριστερά για να τα ξεχωρίζουν από τα γράμματα των λέξεων. Επειδή χρειάζονταν 27 γράμματα για τον συμβολισμό όλων αυτών των αριθμών και το αλφάβητο έχει μόνο 24, χρησιμοποίησαν ακόμη τρία σύμβολα το* **στίγμα** ϛ *που παρίστανε τον αριθμό 6, το* **κόππα** ϟ *που παρίστανε τον αριθμό 90 και το* **σαμπί** ϡ *που παρίστανε τον αριθμό 900.*

Έτσι είχαν:

Για μεγαλύτερους αριθμούς είχαν μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά, που δήλωνε ότι η αξία του γράμματος πολλαπλασιαζόταν επί 1.000. Δηλαδή: ͵δ=4x1.000=4.000 και ͵η=8x1.000 = 8.000.
Με το αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα γράφουμε: ͵βδ' για τον αριθμό 2004 και ω'λ'α' για τον 831.
Οι **Ρωμαίοι** *εισήγαγαν ένα δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 1, 5, 10, 50, 100, 500 και 1000. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούσαν τα σύμβολα:*

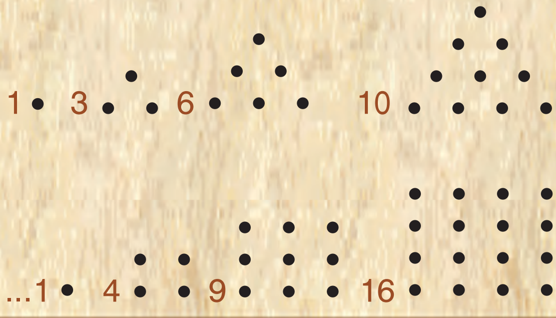
I	V	X	L	C	D	M	$\overline{L}$	$\|\overline{C}\|$
1	5	10	50	100	500	1.000	50x1.000=50.000	100x100x1.000=10.000.000

Στη γραφή των αριθμών τους χρησιμοποιούσαν την προσθετική αρχή από τα αριστερά προς τα δεξιά αλλά και την αφαιρετική αρχή. Το **2** *γράφεται* **II**, *το* **3** *γράφεται* **III**, *κ.λπ. Το* **4** *γράφεται* **IV** *(5–1), το* **9** *γράφεται* **IX** *(10–1), το* **40** *γράφεται* **XL** *(50–10), το* **900** *γράφεται* **CM** *(1.000–100), κ.λπ.*

Για πολλούς αιώνες κυριάρχησε το ελληνικό και το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Το 1299 οι Κανονισμοί της "Τέχνης της Συναλλαγής" (Arte del Cambio) απαγόρευαν στους τραπεζίτες της Φλωρεντίας να χρησιμοποιούν τα Ινδοαραβικά αριθμητικά ψηφία και επέβαλαν τα ρωμαϊκά.

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα του **δεκαδικού συστήματος** *έφτασαν και διαδόθηκαν στην Ευρώπη μέσω των Αράβων, για τον λόγο αυτό ονομάστηκαν* **Αραβικά**, *αλλά είναι* **Ινδοαραβικά**, *διότι από τα συστήματα αρίθμησης που υπήρχαν στους Άραβες, το δεκαδικό σύστημα ήρθε απ' τους Ινδούς. Αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά στο έργο του Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.) "Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών". Ήρθε στη Μέση Ανατολή με τα καραβάνια από την Περσία και την Αίγυπτο την περίοδο 224 - 641 μ.Χ. Οι τύποι Ινδικών συμβόλων είναι τα λεγόμενα* **"γκομπάρ"** *που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες στην Ισπανία που την είχαν καταλάβει από το 711 μ.Χ.*

Οι αριθμοί είχαν αναχθεί από τη σχολή του **Πυθαγόρα** *σε θεμέλιο όλων των επιστημών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι όλοι οι νόμοι του σύμπαντος μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών και των λόγων τους. Αυτή η τολμηρή υπόθεση εκφράζεται παραστατικά στην περίφημη θέση τους “τα πάντα είναι αριθμός”. Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει έναν ιδιότυπο τρόπο συμβολισμού των αριθμών με τη βοήθεια “ψήφων” διατεταγμένων στη μορφή κανονικών γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι σχημάτιζαν ακολουθίες “τρίγωνων αριθμών”, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τριγώνων, τετράγωνων αριθμών, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τετραγώνων:*



Είδαμε ότι υπάρχουν αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούν διαφορετικό αριθμό ψηφίων, όπως π.χ. είναι το δυαδικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιεί μόνο τα ψηφία 0 και 1. Στο δυαδικό σύστημα αντί για μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ. έχουμε: μονάδες, δυάδες, τετράδες, οκτάδες, δεκαεξάδες κ.λπ. Έτσι στο τριαδικό *σύστημα αρίθμησης αντίστοιχα θα χρησιμοποιούμε μόνο τρία ψηφία: 0, 1, 2, θα έχουμε μονάδες, τριάδες, εννιάδες κ.λπ.*

Δεκαδικό	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
Δυαδικό	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	...
Τριαδικό	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120	121	...

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

► *Με βάση την παραπάνω ιστορική αναδρομή κάνε ένα νοερό ταξίδι στον χρόνο προς το παρελθόν και φαντάσου ότι ζεις στη χώρα των Σουμερίων το 3000 π.Χ., των Αιγυπτίων από το 2500 π.Χ., των Ιώνων το 500 π.Χ., των Ρωμαίων το 1200 μ.Χ., των Ισπανών το 1300 μ.Χ., μέχρι την εποχή μας του 21ου αιώνα και γράψε δύο αριθμούς δικής σου επιλογής, όπως τους έγραφαν εκείνοι τότε.*

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καθηγητής φυσικής αγωγής πρέπει να αποφασίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου.

- *Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες, εξάδες ή επτάδες;*
- *Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;*

Σκεφτόμαστε

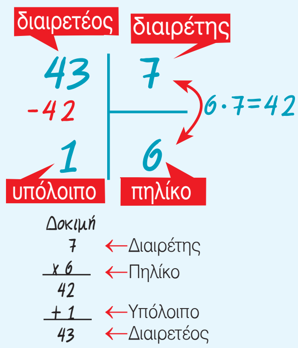
Για να αποφασίσει ο καθηγητής με ποιο τρόπο θα παρατάξει τους 168 μαθητές, πρέπει να διαιρέσει το 168 με τους αριθμούς 3, 4, 5, 6 και 7.

Παρατηρούμε ότι το 168 διαιρείται ακριβώς με το 3 και δίνει πηλίκο 56, οπότε μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές σε 56 τριάδες.

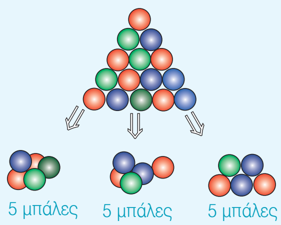
Παρόμοια, η διαίρεση του αριθμού 168 με τους αριθμούς 4, 6, και 7 δίνει τα πηλίκα: 42, 28 και 24 αντίστοιχα. Επομένως, μπορούν να παραταχθούν οι μαθητές σε 42 τετράδες ή 28 εξάδες ή σε 24 επτάδες. Τέλος, η διαίρεση του 168 με το 5 δίνει πηλίκο 33 και αφήνει υπόλοιπο 3. Άρα, δεν μπορεί ο καθηγητής να παρατάξει τους μαθητές σε πλήρεις πεντάδες.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon}$
- Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ** **υπόλοιπο** της διαίρεσης.



- Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{\upsilon < \delta}$
- Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.
- Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση**: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$



- Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη του πολλαπλασιασμού**, δηλαδή: αν $\Delta = \delta \cdot \pi$ τότε $\Delta : \delta = \pi$ ή $\Delta : \pi = \delta$.
  - Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι **0**. $\delta \neq 0$
  - Όταν $\Delta = \delta$, τότε το πηλίκο $\pi = 1$. $\alpha : \alpha = 1$
  - Όταν ο διαιρέτης $\delta = 1$, τότε το πηλίκο $\pi = \Delta$. $\alpha : 1 = \alpha$
  - Όταν ο διαιρετέος $\Delta = 0$, τότε το πηλίκο $\pi = 0$. $0 : \alpha = 0$

Ονομάζουμε **“Ευκλείδεια Διαίρεση”** *τη διαίρεση δύο αριθμών, προς τιμήν του* **Ευκλείδη,** *μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος άκμασε περίπου το 300 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α'. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι* **“Τα Στοιχεία”** *που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν “Ευκλείδεια διαίρεση”;*
(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$, (β) $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$, (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$.

Λύση

(α) Έχουμε $υ = 8$, που είναι μικρότερος από το 28 και μεγαλύτερος από το 4. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 28 και όχι το 4.

(β) Έχουμε $υ = 106$, που είναι μεγαλύτερος από το 59 και από το 21. Άρα δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το 21.

(γ) Έχουμε $υ = 6$, που είναι μικρότερος από το 8 και από το 48. Άρα είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

2. *Στη μονάδα μνήμης μιας φωτογραφικής μηχανής μπορούν να αποθηκευτούν 11 φωτογραφίες. (α) Πόσες τέτοιες ίδιες μνήμες χρειάζονται για να αποθηκευτούν 5 φωτογραφίσεις των 36 φωτογραφιών η καθεμιά; (β) Για πόσες φωτογραφίες θα μείνει χώρος στην τελευταία μονάδα;*

Λύση

(α) Οι 5 φωτογραφήσεις των 36 φωτογραφιών η καθεμιά είναι συνολικά $5 \cdot 36 = 180$ φωτογραφίες. Η διαίρεση των 180 φωτογραφιών με τις 11 που μπορούν να αποθηκευτούν σε μια μονάδα, έχει πηλίκο 16 και υπόλοιπο 4, δηλαδή έχουμε $180 = 11 \cdot 16 + 4$. Έτσι, χρειαζόμαστε 16 μονάδες, περισσεύουν όμως 4 φωτογραφίες ακόμη, επομένως, θα πρέπει να πάρουμε επιπλέον μία μονάδα, άρα θα χρειασθούν $16 + 1 = 17$ μονάδες μνήμης.

(β) Αφού στην τελευταία μονάδα μνήμης θα αποθηκευτούν οι 4 φωτογραφίες, που περίσσεψαν, θα μείνει χώρος για $11 - 4 = 7$ φωτογραφίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να κάνεις τις ακόλουθες διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:*
(α) 4002:69, (β) 1445:17, (γ) 925:37, (δ) 3621:213, (ε) 35280:2940, (στ) 5082:77.

2. *Να υπολογίσεις: (α) Πόσο κοστίζει το 1 μέτρο υφάσματος αν τα 5 μέτρα κοστίζουν 65 €; (β) Πόσο κοστίζει το 1 κιλό κρέας αν για τα 3 κιλά πληρώσαμε 30 €; (γ) Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού;*

3. *Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις: (α) $125=35\cdot3+20$, (β) $762=38\cdot19+40$, (γ) $1500=42\cdot35+30$, (δ) $300=18\cdot16+12$.*

4. *Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης ν:8;*

5. *Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 9 δίνει πηλίκο 73 και υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο αριθμός;*

6. *Αν σήμερα είναι Τρίτη, τι μέρα θα είναι μετά από 247 ημέρες;*

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το τοπικό γραφείο της UNICEF θα μοιράσει 150 τετράδια, 90 στυλό και 60 γόμες σε πακέτα δώρων, ώστε τα πακέτα να είναι τα ίδια και να περιέχουν και τα τρία είδη.

- *Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;*
- *Πόσα όμοια πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;*
- *Πόσα το πολύ όμοια πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού **α** είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς. $0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha,\ \ldots$
  - **Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.**
  - **Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.**
  - **Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.**
- Το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών ($\neq 0$) το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
- **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
  - **Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α.**
- Ένας αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός,** διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί **α** και **β** μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των **α** και **β** και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α, β)**.
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;*

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
Πολλαπλάσια του 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

Οι αριθμοί **0, 12, 24, 36,** ... είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών **3** και **4**. Επειδή, το μικρότερο ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το **12**, γράφουμε: ΕΚΠ(3, 4) = 12.

Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

Κριτήρια Διαιρετότητας

- **Κριτήρια Διαιρετότητας** με **2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν λήγει σε **ένα μηδενικό.**
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5**.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
  - Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι μηδέν.

2. *Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.*

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΜΚΔ$(2520, 2940, 3780) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ και

ΕΚΠ$(2520, 2940, 3780) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

3. *Να βρεθεί αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 100.*

Λύση

	2	3	4	5	9	10	25	100
12510			–				–	–
772		–		–	–	–	–	–
225	–		–			–		–
13600		–			–			

4. *Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100.*

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

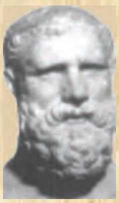
Λύση

Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός**, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως "**Κόσκινο του Ερατοσθένη**", που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από δοσμένο αριθμό.

Στον διπλανό πίνακα διαγράφουμε τον αριθμό 1 που δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Μετά σημαδεύουμε το 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Το ίδιο κάνουμε και με τους αριθμούς 3, 5 και 7. Μ' αυτό τον τρόπο διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και μένουν μόνο οι πρώτοι, από το 1 έως το 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.



Ο **Ερατοσθένης** *(γεννήθηκε στην Κυρήνεια και πέθανε στην Αλεξάνδρεια) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια, διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης,** *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 km, έναντι της πραγματικής 40.000 km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000 στάδια** *και του Ήλιου* **804.000.000 στάδια.**

Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε έναν κατάλογο που περιελάμβανε 675 *αστέρες. Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η τύφλωση που τον έπληξε στα γεράματα και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, αφού αρνιότανε να φάει οτιδήποτε.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός .... και το ΕΚΠ(5, 8) = ...

(β) Αν το ΕΚΠ(α, β) = β, ο β είναι .... του α.

(γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που ....
και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που ....

(δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν..

2. Συμπλήρωσε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9: (α) 6☐4, (β) 95☐4, (γ) 601☐.

3. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

(α)	ΕΚΠ (3, 5) =	8 ☐	9 ☐	15 ☐	30 ☐
(β)	ΕΚΠ (11, 6) =	17 ☐	36 ☐	66 ☐	132 ☐
(γ)	ΕΚΠ (5, 10) =	10 ☐	15 ☐	45 ☐	50 ☐
(δ)	ΕΚΠ (3, 2, 5) =	15 ☐	20 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε)	ΕΚΠ (3, 6, 9) =	9 ☐	18 ☐	36 ☐	27 ☐
(στ)	ΕΚΠ (8, 12, 15) =	15 ☐	30 ☐	60 ☐	120 ☐

4. Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;

5. Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της α' γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι ήταν οι μαθητές της α' γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

6. Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεών τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

7. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

(α)	ΜΚΔ (5, 8) =	1 ☐	5 ☐	8 ☐	40 ☐
(β)	ΜΚΔ (16, 24) =	4 ☐	8 ☐	16 ☐	24 ☐
(γ)	ΜΚΔ (30, 15) =	3 ☐	5 ☐	15 ☐	30 ☐
(δ)	ΜΚΔ (10, 30, 60) =	5 ☐	10 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε)	ΜΚΔ (22, 32, 50) =	2 ☐	11 ☐	72 ☐	82 ☐

8. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσεις γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.

9. Βρες τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

10. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

11. Να βρεις όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών: (α) 28, (β) 82, (γ) 95, (δ) 105, (ε) 124, (στ) 345, (ζ) 1.232, (η) 3.999.

12. Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:
(α) 78, (β) 348, (γ) 1.210, (δ) 2.344.

Ανακεφαλαίωση

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: 0, 1, 2, 3, 4,...

Άρτιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί που διαιρούνται με το **2**
Περιττοί αριθμοί είναι οι φυσικοί που δεν διαιρούνται με το **2**

Πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών.

Πρόσθεση: $\alpha + \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **προσθετέοι** και το **γ** λέγεται **άθροισμα** των α και β.

Ιδιότητες της πρόσθεσης:
- $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ *(το 0 δεν τον μεταβάλλει)*

Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **παράγοντες** και το **γ** λέγεται **γινόμενο** των α και β.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:
- $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$ *(το 1 δεν τον μεταβάλλει)*

Αφαίρεση: $\alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha>\beta$

Το **α** λέγεται **μειωτέος**, το **β** λέγεται **αφαιρετέος** και το **γ** λέγεται **διαφορά**.

Αν $\alpha - \beta=\gamma$ τότε $\alpha=\beta+\gamma$ ή $\alpha-\gamma=\beta$
- $\alpha-0=\alpha$

Τέλεια Διαίρεση $\alpha : \beta = \gamma, \quad \beta \neq 0$

Το **α** λέγεται **διαιρετέος**, το **β** λέγεται **διαιρέτης** και το **γ** λέγεται **πηλίκο**.

Αν $\alpha : \beta=\gamma$ τότε $\alpha=\beta \cdot \gamma$ ή $\alpha : \gamma=\beta$
- $\alpha : 1=\alpha$ και $\alpha : \alpha=1$ και $0 : \alpha=0$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ.

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση: $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

Δύναμη: $\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot\alpha$ (ν παράγοντες) Το α λέγεται βάση και το ν εκθέτης.

Ευκλείδεια Διαίρεση: $\Delta= \delta \cdot \pi + \upsilon, \quad \upsilon < \delta.$
Το Δ λέγεται διαιρετέος, το δ διαιρέτης, το π πηλίκο και το υ υπόλοιπο.

Προτεραιότητα Πράξεων.

Δυνάμεις — Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις — Προσθέσεις και Αφαιρέσεις.
Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

- Το **μικρότερο** ($\neq 0$) **από τα κοινά πολλαπλάσια** που έχουν δύο αριθμοί ($\neq 0$) λέγεται **ΕΚΠ** αυτών.
- Ο **μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες** που έχουν δύο αριθμοί λέγεται **ΜΚΔ** αυτών.
- Ένας αριθμός **α** που έχει **διαιρέτες** μόνο τον **α** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, αλλιώς λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** όταν ΜΚΔ(α, β) = 1

Κριτήρια Διαιρετότητας: *Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:*

- με το **10, 100, 1000**, ... αν λήγει σε **1, 2, 3,... μηδενικά.**
- με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι **0, 2, 4, 6, 8**.
- με το **5**, αν λήγει σε **0** ή **5.**
- με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων** του διαιρείται με το **3** ή το **9.**
- με το **4** ή **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι αριθμός που διαιρείται με το **4** ή **25**.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1.	*Ισχύει ότι:* $(100 - 30) - 10 = 100 - (30 - 10)$.		
2.	*Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το 11 τον πολλαπλασιάζουμε με το 10 και προσθέτουμε 1.*		
3.	*Το γινόμενο* $3 \cdot 3 \cdot 3$ *γράφεται* 3^3.		
4.	*Το* 2^5 *ισούται με 10.*		
5.	$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4 \cdot \alpha$.		
6.	$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$.		
7.	$2^3 + 3 = 11$.		
8.	$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 = 322$.		
9.	$20 - 12 : 4 = 2$.		
10.	$9 \cdot 3 - 2 + 5 = 30$.		
11.	$(3 \cdot 1 - 3) : 3 = 0$.		
12.	*Στη σειρά των πράξεων:* $7 + (6 \cdot 5) + 4$, *οι παρενθέσεις δεν χρειάζονται.*		
13.	*Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.*		
14.	*Αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του αριθμού β, τότε ο α διαιρείται με το β.*		
15.	*Το 38 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3.*		
16.	*Ο αριθμός 450 διαιρείται με το 3 και το 9.*		
17.	*Ο 35 και ο 210 έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον αριθμό 5.*		
18.	*Το ΕΚΠ των 2 και 24 είναι ο αριθμός 48.*		
19.	*Η διαίρεση 420 : 15 δίνει υπόλοιπο 18.*		
20.	*Η σχέση* $177 = 5 \cdot 35 + 2$ *είναι μια ευκλείδια διαίρεση.*		
21.	*Ο αριθμός* $3 \cdot \alpha + 9$ *διαιρείται με το 3.*		
22.	*Ο αριθμός 300 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως* $3 \cdot 10^2$.		
23.	*Ο αριθμός 224 διαιρείται με το 4 και το 8.*		

ΜΕΡΟΣ Α΄

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Κλάσματα

2.1. Η έννοια του κλάσματος

- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού του "όλου" σε μέρη*
- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασία αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.*
- *Υπολογίζω με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο.*
- *Υπολογίζω την τιμή του όλου από την τιμή ενός μέρους του.*

2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

- *Κατανοώ την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων.*
- *Απλοποιώ τα κλάσματα.*
- *Μετατρέπω κλάσματα σε ομώνυμα.*
- *Χρησιμοποιώ τη "χιαστί ιδιότητα" για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων:*

  « Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$».

2.3. Σύγκριση κλασμάτων

- *Συγκρίνω κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

- *Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

- *Πολλαπλασιάζω κλάσματα.*
- *Βρίσκω τον αντίστροφο ενός αριθμού.*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων, τις διατυπώνω με τη βοήθεια των συμβόλων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης.*

2.6. Διαίρεση κλασμάτων.

- *Κάνω διαίρεση κλασμάτων.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ Ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ
(287 - 212 π.Χ.)

Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

Η λέξη “κλάσμα” προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη “κλάω” ή “κλω” που σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα λοιπόν δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι, δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα Μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται, μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το “κλάσμα” πρέπει να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε το ολόκληρο (τον “όλον”) και πόσα από αυτά πήραμε.

Κλάσμα: $\dfrac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}}$: $\dfrac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$ (παρονομαστής όχι μηδέν)

Στη συνέχεια θα θυμηθούμε όσα ήδη έχουμε μάθει για τα κλάσματα και θα επεκτείνουμε τις γνώσεις μας στις πράξεις των κλασμάτων.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

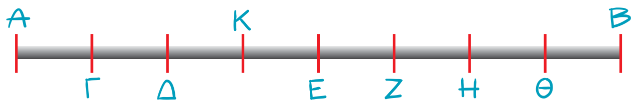
Τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και τη χωρίζουν σε οκτώ κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα κομμάτι, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια.

- *Μπορείς να βρεις το μέρος της πίτσας που έφαγε ο καθένας;*
- *Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα προσπάθησε:

- *Να βρεις ποιό μέρος του μήκους του τμήματος ΑΒ είναι το μήκος του τμήματος ΑΚ.*
- *Να υπολογίσεις το μήκος του ΑΚ, αν γνωρίζουμε ότι το ΑΒ είναι 32 cm;*
- *Να βρεις ζεύγη τμημάτων που το ένα να είναι:* $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ *του άλλου.*



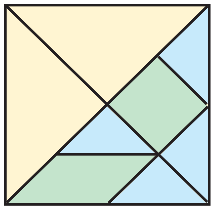
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

- *Προσπάθησε να μοιράσεις τρεις σοκολάτες (όπως αυτή του σχήματος) σε οκτώ παιδιά.*

Σκεφτόμαστε

Είναι προφανές ότι για να μοιραστούν οι τρεις σοκολάτες σε οκτώ παιδιά, πρέπει να γίνει διαίρεση $3:8$. Πρακτικά, για να γίνει το μοίρασμα αυτό, χρειάζεται πρώτα να χωριστεί μια σοκολάτα σε οκτώ (8) ίσα μέρη, ώστε κάθε κομμάτι να είναι το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας. Επειδή έχουμε τρεις (3) σοκολάτες, τελικά, το κάθε παιδί θα πάρει τα $\frac{3}{8}$ από τις τρεις σοκολάτες. Επομένως το κλάσμα $\frac{3}{8}$ και το πηλίκο $3:8$ εκφράζουν την ίδια ποσότητα. Άρα μπορούμε να πούμε ότι το κλάσμα $\frac{3}{8}$ παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή, δηλαδή: $\frac{3}{8} = 3:8$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η



Στο διπλανό σχήμα ένα τετράγωνο έχει χωριστεί, ανάλογα με το χρώμα, σε τριών ειδών μέρη.

- *Μπορείς να βρεις τι κλάσμα του τετραγώνου είναι το καθένα μέρος του;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Το σύμβολο $\frac{1}{\nu}$ (ν φυσικός, $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα ν ίσα μέρη, στα οποία χωρίζεται μία ποσότητα, ονομάζεται **κλασματική μονάδα**.
- **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

  Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ν ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μία ποσότητα. Γενικά:

  $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa \cdot \frac{1}{\nu}$, όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

αριθμητής
κλασματική γραμμή
παρονομαστής

$\frac{2}{3}$ όροι του κλάσματος

διαβάζεται "δύο τρίτα"

$\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$

- Κάθε κλάσμα παριστάνει και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή. Γενικά ισχύει $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

$\frac{3}{8} = 3 : 8$

- Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το **1**, γιατί $\kappa = \kappa : 1 = \frac{\kappa}{1}$.

$6 = \frac{6}{1}$, $15 = \frac{15}{1}$, $21 = \frac{21}{1}$

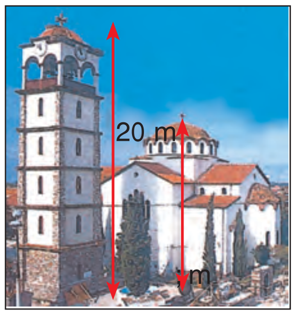
- Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Το καμπαναριό μιας εκκλησίας έχει ύψος 20 m, ενώ η εκκλησία έχει ύψος τα $\frac{3}{5}$ του ύψους του καμπαναριού.*

Ποιο είναι το ύψος της εκκλησίας;



Λύση

Όλο το ύψος του καμπαναριού, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$, είναι $20\,m$,

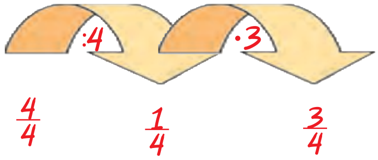
επομένως το $\frac{1}{5}$ αυτού θα είναι $\frac{1}{5} \cdot 20\ cm = \frac{20}{5}\ m = 4m$.

Τότε τα $\frac{3}{5}$ θα είναι $3 \cdot 4\ m = 12\ m$. Άρα το ύψος της εκκλησίας θα είναι $12\ m$.

2. *Μια δεξαμενή πετρελαίου σε μια πολυκατοικία, χωράει 2000 lt. Ο διαχειριστής σε μια μέτρηση βρήκε ότι ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{4}$. Πόσα λίτρα πετρέλαιο είχε η δεξαμενή;*

Λύση

Η δεξαμενή ολόκληρη είναι τα $\frac{4}{4}$ και χωράει 2000 lt.



Το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής θα χωράει

$$\frac{1}{4} \cdot 2.000\ lt = \frac{2000}{4}\ lt = 500\ lt.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα $\frac{3}{4}$ θα περιέχουν $3 \cdot 500\ lt = 1500\ lt.$

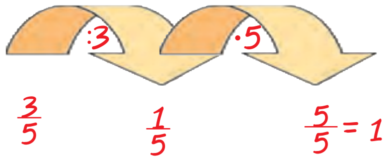
- Ο παραπάνω τρόπος λύσης ονομάζεται **αναγωγή στη μονάδα** και μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που είναι γνωστή η τιμή του όλου και ζητείται του μέρους. Άλλος τρόπος λύσης είναι ο πολλαπλασιασμός του αριθμού που εκφράζει το μέρος επί τον αριθμό που εκφράζει το όλον (π.χ. $\frac{3}{4} \cdot 2.000\ lt = 1.500\ lt$).

3. *Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ενός μπαχαρικού κοστίζουν 27 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού;*

Λύση

Τα $\frac{3}{5}$ κοστίζουν 27 €. Άρα το $\frac{1}{5}$ κοστίζει $27\,€ : 3 = 9\,€$.

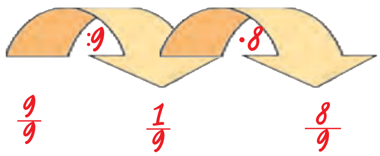
Τα $\frac{5}{5}$ κοστίζουν $5 \cdot 9\,€ = 45\,€$.



- Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας (αναγωγή στη μονάδα).

Τα $\frac{9}{9}$ κοστίζουν 45€. Άρα το $\frac{1}{9}$ κοστίζει $\frac{45}{9}\,€ = 5\,€$.

Έτσι τα $\frac{8}{9}$ κοστίζουν $8 \cdot 5\,€ = 40\,€$. Διότι είναι: $1 = \frac{5}{5} = \frac{9}{9} = \ldots$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Στο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ οι αριθμοί κ και λ ονομάζονται ....

(β) Ισχύει ότι: (α) $\frac{\alpha}{1}$ = ... (β) $\frac{\alpha}{\alpha}$ = ... (γ) $\frac{0}{\alpha}$ = ...

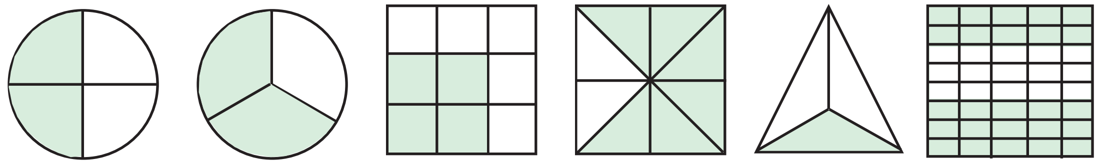
(γ) Η φράση "το μέρος $\frac{\kappa}{\lambda}$ ενός μεγέθους Α" εκφράζει τον χωρισμό του μεγέθους Α σε ....

2. *Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{18}{20}$ είναι όλα μικρότερα της μονάδας;*

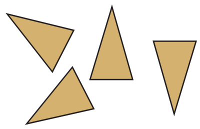
3. *Τι κλάσμα των μαθητών της τάξης 28 μαθητών είναι οι 4 απόντες;*

4. *Αν το $\frac{1}{5}$ ενός κιλού καρύδια είναι 14 καρύδια, το κιλό περιέχει 70 καρύδια;*

5. Τα παρακάτω σχήματα έχουν χωριστεί σε ίσα μέρη. Γράψε για το καθένα από αυτά, το κλάσμα που εκφράζει το χρωματισμένο μέρος του.



6. Από μία τούρτα περίσσεψαν τα κομμάτια που βλέπεις στο σχήμα τα οποία αποτελούν τα $\frac{2}{7}$ της τούρτας.
Πόσα ήταν αρχικά όλα τα κομμάτια της τούρτας;



7. Βρες ποιο μέρος του κιλού είναι τα: (α) 100, (β) 250, (γ) 500, (δ) 600 γραμμάρια.

8. Ποιο μέρος: (α) του μήνα, (β) του εξαμήνου, (γ) του έτους είναι οι 15 ημέρες;

9. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής τους. Ένα φόρεμα κόστιζε 90 € πριν την έκπτωση. Υπολόγισε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο φόρεμα και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.

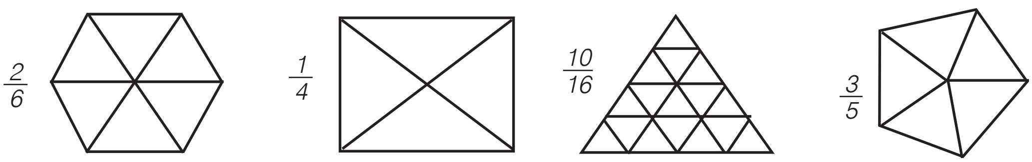
10. Σε μια τάξη τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Να βρεις πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν γνωρίζεις ότι αυτοί που μαθαίνουν αγγλικά είναι 12 μαθητές.

11. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά του είναι 33 εκατοστά και η άλλη τα $\frac{3}{11}$ της πρώτης. Να βρεις την περίμετρο του ορθογωνίου.

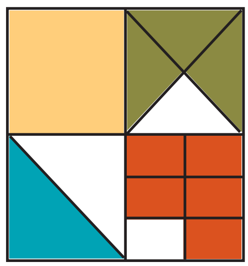
12. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 5 εκατοστά. Να σχεδιάσεις: (α) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με μήκος τα $\frac{8}{10}$ του ΑΒ και (β) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ με μήκος τα $\frac{6}{5}$ του ΑΒ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Χρωμάτισε σε καθένα από τα σχήματα που ακολουθούν τα μέρη που αντιστοιχούν στα κλάσματα που είναι γραμμένα κάτω από κάθε σχήμα.



2. Να βρεις ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι κάθε χρωματισμένο μέρος του διπλανού σχήματος.

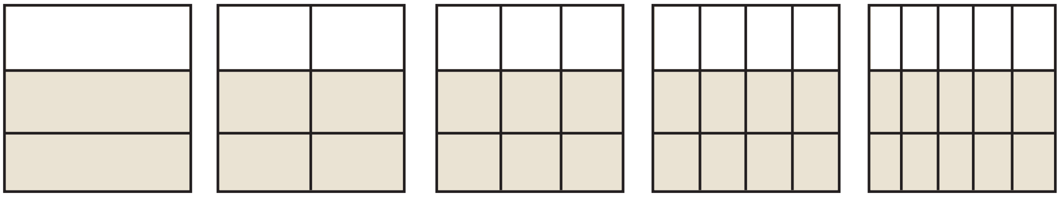


Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Καθένα από τα παρακάτω πέντε ίσα τετράγωνα είναι χωρισμένο σε ίσα μέρη με διαφορετικούς τρόπους.

- *Προσπάθησε να βρεις για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;*
- *Στη συνέχεια σύγκρινε τα κλάσματα, που θα βρεις μεταξύ τους.*
- *Τι παρατηρείς για τα κλάσματα που βρήκες;*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Δύο κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{γ}{δ}$ λέγονται **ισοδύναμα** ή **ίσα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε:

$$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$$

$\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ ισοδύναμα

δηλαδή: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

► **Αν δύο κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{γ}{δ}$ είναι ισοδύναμα τότε τα “χιαστί γινόμενα” $α \cdot δ$ και $β \cdot γ$ είναι ίσα και αντιστρόφως.**

Δηλαδή: αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ τότε: $α \cdot δ = β \cdot γ$ και αντιστρόφως.

$\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ τότε: $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ γιατί: $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

► **Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.**

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

► **Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.**

$$\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$$

- Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση του κλάσματος** και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

- Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει άλλος κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή εκτός από τη μονάδα) λέγεται **ανάγωγο**.

$\frac{7}{12}$ ανάγωγο αφού ΜΚΔ(7, 12) = 1

- Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα**.

$\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$ ομώνυμα

$\frac{2}{7}$, $\frac{5}{3}$ ετερώνυμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να εξετάσετε αν τα κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$, (β) $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$ είναι ισοδύναμα.*

Λύση

(α) Υπολογίζουμε τα “χιαστί γινόμενα”, δηλαδή: $3 \cdot 14 = 42$ και $5 \cdot 10 = 50$
Τα γινόμενα δεν είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

(β) Υπολογίζουμε τα “χιαστί γινόμενα”: $3 \cdot 48 = 144$ και $8 \cdot 18 = 144$
Τα γινόμενα είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$

2. *Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{30}{66}$.*

Λύση

Ο ΜΚΔ των όρων του κλάσματος 30 και 66 είναι: ΜΚΔ(30, 66) = 6

Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 6 και έχουμε: $\frac{30}{66} = \frac{30:6}{66:6} = \frac{5}{11}$

3. *Να μετατραπούν σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{5}{20}$.*

Λύση

- Πριν από κάθε μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.

ΜΚΔ(5, 20) = 5
Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{5}{20}$ με το 5 και έχουμε: $\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$

- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερωνύμων κλασμάτων.

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ ΕΚΠ(5, 3, 4) = 60

- Διαιρούμε το ΕΚΠ με καθένα από τους παρονομαστές.

$60 : 5 = 12$
$60 : 3 = 20$
$60 : 4 = 15$

- Πολλαπλασιάζουμε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε.

$\overset{12}{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$, $\overset{20}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{40}{60}$, $\overset{15}{\frac{1}{4}} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$

Επομένως τα κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα ομώνυμα: $\frac{36}{60}$, $\frac{40}{60}$ και $\frac{15}{60}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα, όταν ....

(β) Αν ισχύει $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$, τότε οι όροι α, β, γ και δ συνδέονται με τη σχέση: ....

(γ) Ανάγωγο λέγεται το κλάσμα, το οποίο ....

(δ) Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν ....

(ε) Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν ....

(στ) Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, το κλάσμα γίνεται ....

2. Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα:
(α) $\frac{2}{3}, \frac{18}{27}$, (β) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{7}{8}, \frac{30}{40}$, (δ) $\frac{13}{14}, \frac{26}{28}$.

3. Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 100: (α) $\frac{3}{4}$, (β) $\frac{8}{5}$, (γ) $\frac{4}{20}$, (δ) $\frac{5}{2}$, (ε) $\frac{60}{75}$.

4. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 3:
(α) $\frac{10}{6}$, (β) $\frac{50}{30}$, (γ) $\frac{18}{27}$.

5. Να μετατρέψεις το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή: (α) 6, και (β) 15.

6. Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:
(α) $\frac{2}{3}=\frac{22}{...}$, (β) $\frac{...}{5}=\frac{9}{15}$, (γ) $\frac{14}{4}=\frac{...}{20}$, (δ) $\frac{48}{36}=\frac{...}{24}$.

7. Να απλοποιήσεις τα κλάσματα: (α) $\frac{25}{30}$, (β) $\frac{12}{9}$, (γ) $\frac{32}{56}$.

8. Να βρεις ποια από τα κλάσματα είναι ανάγωγα: (α) $\frac{32}{30}$, (β) $\frac{15}{14}$, (γ) $\frac{51}{16}$, (δ) $\frac{26}{50}$.

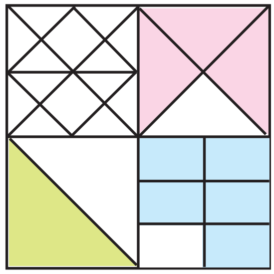
9. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα: (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$, (β) $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$, (γ) $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$.

10. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Το κλάσμα $\frac{10}{25}$ απλοποιείται με το 5.		
(β)	Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ είναι ανάγωγο.		
(γ)	Αν το κλάσμα $\frac{x}{8}$ μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή 24, ο αριθμητής του θα είναι διπλάσιος του x.		
(δ)	Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος επί 4, το κλάσμα θα γίνει 4 φορές μεγαλύτερο.		
(ε)	Το κλάσμα $\frac{18}{522}$ απλοποιείται με το 6.		
(στ)	Ένα ανάγωγο κλάσμα είναι πάντα μικρότερο του 1.		
(ζ)	$\frac{0}{4} = \frac{0}{10}$.		
(η)	$\frac{23}{30} = \frac{20+3}{20+10} = \frac{3}{10}$.		
(θ)	$\frac{3}{11} = \frac{60}{220}$.		
(ι)	$\frac{5}{5} = \frac{41}{41}$.		
(ια)	Το κλάσμα $\frac{α+β}{1}$ είναι πάντα ίσο με α + β.		

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

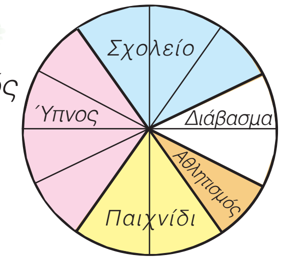


Ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου καταλαμβάνει κάθε χρώμα, στο διπλανό σχήμα; Η Μαρία είπε πως το ροζ χρώμα καταλαμβάνει τα $\frac{9}{48}$, το γαλάζιο τα $\frac{10}{48}$ και το πράσινο τα $\frac{7}{48}$.

Ενώ ο Γιάννης είπε ότι το ροζ είναι τα $\frac{3}{16}$, το γαλάζιο τα $\frac{5}{24}$ και το πράσινο το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.

- *Ποιος έχει δίκιο και ποιος όχι;*
- *Προσπάθησε να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε καθένα από τα μέρη του τετραγώνου.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου από έναν μαθητή, της Α΄ Γυμνασίου.

- *Τι μέρος του χρόνου του είναι κάθε δραστηριότητα;*
- *Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;*
- *Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;*
- *Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο και καταλήγοντας στον μικρότερο χρόνο.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι το 24ωρο είναι χωρισμένο σε 12 κομμάτια, από τα οποία τα 4 αντιστοιχούν στον ύπνο, τα 3 στο σχολικό ωράριο, τα 2 στο διάβασμα, το 1 στον αθλητισμό και τα 2 στο παιχνίδι. Επομένως, το μέρος που αφιερώνεται για ύπνο είναι τα $\frac{4}{12}$ του συνολικού χρόνου, για το σχολείο τα $\frac{3}{12}$, για το διάβασμα τα $\frac{2}{12}$, για τον αθλητισμό το $\frac{1}{12}$ και για το παιχνίδι τα $\frac{2}{12}$.

Επειδή κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε δύο ώρες, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος που αφιερώνεται για κάθε δραστηριότητα είναι: 8 ώρες για ύπνο, 6 ώρες για το σχολείο, 4 ώρες για διάβασμα, 2 ώρες για αθλητισμό και 4 ώρες για παιχνίδι.

Άρα, η ζητούμενη χρονική σειρά των διαφόρων δραστηριοτήτων είναι:

8 ώρες(Ύπνος) > 6 ώρες(Σχολείο) > 4 ώρες (Διάβασμα) = 4 ώρες (Παιχνίδι) > 2 ώρες (Αθλητισμός).

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

- **Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.**

  $\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$

- **Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.**

  Για να συγκρίνω τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$ τα μετατρέπω σε ομώνυμα:

  $\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$ Άρα: $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$

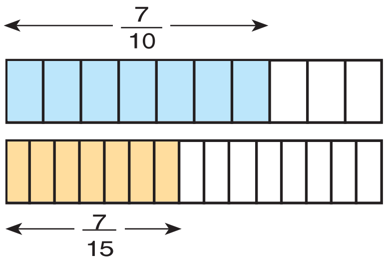
- **Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.**

  $\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{10}$ και $\frac{7}{15}$.*

Λύση



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι “σε όσα περισσότερα μέρη χωρίζεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος, τόσο μικρότερα είναι τα μέρη αυτά”.

Δηλαδή: $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$ και $\frac{7}{15} < \frac{7}{10}$.

2. *Να συγκριθούν τα κλάσματα: $\frac{5}{8}$ και $\frac{4}{9}$.*

Λύση

Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. **ΕΚΠ(8, 9)=72, επομένως**

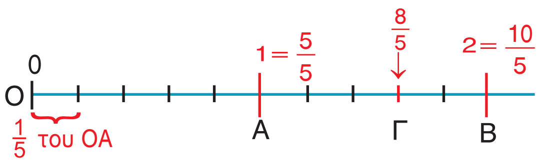
$72 : 8 = 9$ και $72 : 9 = 8$ οπότε $\frac{\overset{9}{5}}{8} = \frac{45}{72}$ και $\frac{\overset{8}{4}}{9} = \frac{32}{72}$. Άρα $\frac{5}{8} > \frac{4}{9}$.

3. *Να τοποθετηθεί στην ευθεία των αριθμών το κλάσμα $\frac{8}{5}$.*

Λύση

Για το κλάσμα $\frac{8}{5}$ έχουμε ότι:

$1 = \frac{5}{5} < \frac{8}{5} < \frac{10}{5} = 2.$



Καθένα, από τα τμήματα **ΟΑ** και **ΑΒ** του σχήματος είναι ίσο με τη μονάδα.

Τα χωρίζουμε σε 5 ίσα τμήματα, ώστε το καθένα να είναι ίσο με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας.

Το ευθύγραμμο τμήμα **ΟΓ** αποτελείται από 8 ίσα τμήματα ίσα με το $\frac{1}{5}$ της μονάδας το καθένα. Το μήκος **ΟΓ** είναι $\frac{8}{5}$ του **ΟΑ**. Άρα το κλάσμα $\frac{8}{5}$ τοποθετείται στο σημείο **Γ**.

4. *Να βρεθεί ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από τα $\frac{3}{5}$.*

Λύση

Τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα και ανάμεσα στους αριθμητές του 2 και 3 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Μπορούμε, όμως, να βρούμε ισοδύναμα κλάσματα με αυτά π.χ. τα $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, για τα οποία μεταξύ των αριθμητών τους 4 και 6 υπάρχει ο αριθμός 5.

Επομένως, αφού το κλάσμα $\frac{5}{10}$ είναι μεταξύ των $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, θα είναι και $\frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Ένα κλάσμα είναι:

(i) ίσο με 1, αν ο αριθμητής του είναι ....τον παρονομαστή.

(ii) μικρότερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι .... τον παρονομαστή.

(iii) μεγαλύτερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι .... τον παρονομαστή.

(β) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ *τότε ....*

2. *Σύγκρινε τα κλάσματα:(α)* $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{5}{7}$*, (β)* $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{3}{9}$*, (γ)* $\frac{4}{5}$ *και* $\frac{8}{12}$.

3. *Γράψε τα κλάσματα* $\frac{31}{10}, \frac{31}{14}, \frac{31}{11}, \frac{31}{13}, \frac{31}{12}$ *σε φθίνουσα σειρά.*

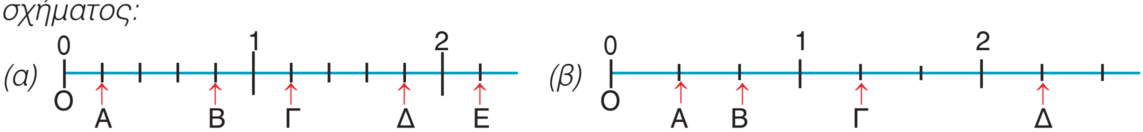
4. *Σύγκρινε με το 1 τα κλάσματα: (α)* $\frac{5}{8}$*, (β)* $\frac{9}{10}$*, (γ)* $\frac{12}{11}$*, (δ)* $\frac{16}{16}$*, (ε)* $\frac{109}{120}$.

5. *Βάλε σε σειρά τα κλάσματα:* $\frac{3}{5}, \frac{8}{15}, \frac{5}{10}, \frac{20}{15}, \frac{7}{5}$.

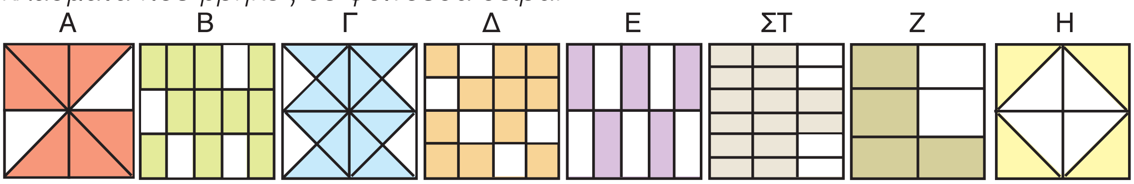
6. *Βρες μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα (α)* $\frac{5}{3}$*, (β)* $\frac{7}{2}$*, (γ)* $\frac{8}{9}$*, (δ)* $\frac{63}{5}$*, (ε)* $\frac{125}{10}$.

7. *Τοποθέτησε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα:*
(α) $\frac{1}{2}$*, (β)* $\frac{3}{2}$*, (γ)* $\frac{5}{2}$*, (δ)* $\frac{1}{4}$*, (ε)* $\frac{3}{4}$*, (στ)* $\frac{4}{5}$*, (ζ)* $\frac{9}{10}$.

8. *Ποιοι κλασματικοί αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του σχήματος;*



9. *Συμπληρώσε τις κενές θέσεις του πίνακα με το κλάσμα που αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του τετραγώνου με το αντίστοιχο γράμμα και μετά βάλε τα κλάσματα που βρήκες σε φθίνουσα σειρά.*



Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η

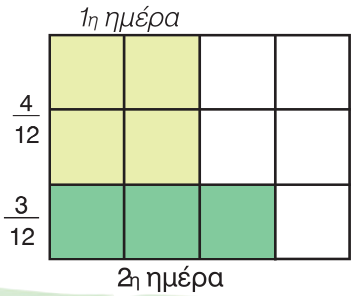
Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Το συνεργείο του Δήμου φύτεψε σε μια μέρα τα $\frac{4}{12}$ μιας πλατείας με λουλούδια. Την επόμενη ημέρα που ο καιρός δεν ήταν καλός φύτεψε μόνο τα $\frac{3}{12}$ της πλατείας.

➢ *Ποιο τμήμα της πλατείας είχε φυτέψει, συνολικά, στο τέλος της δεύτερης ημέρας;*

Σκεφτόμαστε



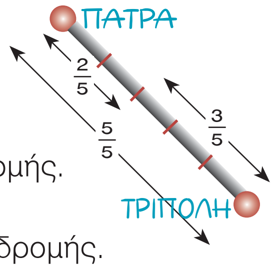
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι στο τέλος της δεύτερης ημέρας έχουν φυτευτεί, συνολικά, τα $\frac{7}{12}$ της πλατείας.

Πράγμα που σημαίνει ότι το άθροισμα $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$ κάνει $\frac{7}{12}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα φορτηγό κάλυψε σε μία ώρα τα $\frac{2}{5}$ της διαδρομής Πάτρα - Τρίπολη.

➢ *Ποιο μέρος της διαδρομής του μένει να καλύψει ακόμη;*



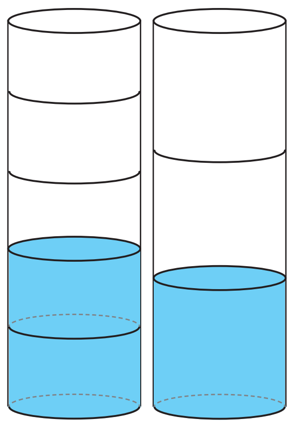
Σκεφτόμαστε

Όπως φαίνεται στο σχήμα δεν έχουν καλυφθεί τα $\frac{3}{5}$ της διαδρομής.

Επομένως, η διαφορά $\frac{5}{5}-\frac{2}{5}$ κάνει τα $\frac{3}{5}$ του συνόλου της διαδρομής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Μια βρύση γεμίζει, σε 1 ώρα, τα $\frac{2}{5}$ της δεξαμενής. Μια άλλη βρύση γεμίζει το $\frac{1}{3}$ της ίδιας δεξαμενής, επίσης σε 1 ώρα. Αν και οι δύο βρύσες τρέχουν ταυτόχρονα μέσα στη δεξαμενή, τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσουν σε 1 ώρα;



Σκεφτόμαστε

Αν οι βρύσες "τρέχουν" ταυτόχρονα στη δεξαμενή για 1 ώρα θα έχουν γεμίσει ένα τμήμα της που αντιστοιχεί στο άθροισμα των τμημάτων αυτής που η κάθε μία γεμίζει ξεχωριστά. Δηλαδή το ...

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

► **Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή.**

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\frac{9}{5}$$

- Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}+\frac{2}{3}=\frac{21}{12}+\frac{8}{12}=\frac{29}{12}$
- Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή. $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$ $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$
- Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα. $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13}{12}$
- Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης των φυσικών στα κλάσματα.
- Μερικές φορές αντί να γράφουμε $1+\frac{4}{5}$, γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$.
- Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογισθεί το άθροισμα $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+3$.*

Λύση

Μετατρέπουμε τον φυσικό αριθμό σε κλάσμα με παρονομαστή 4.

Είναι: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+3=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3\cdot 4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{12}{4}=\frac{15}{4}$.

2. *Να αποδειχθεί ότι: (α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ και (β) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$.*

Λύση

(α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1$ (β) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}-1$

3. *Να υπολογισθεί η διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{5}{12}$ και $\frac{7}{20}$.*

Λύση

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και πρέπει πρώτα να μετατραπούν σε ισοδύναμα ομώνυμα. Έχουμε: ΕΚΠ(12, 20) = 60 οπότε: $60:12=5$ και $60:20=3$

Άρα: $\overset{5}{\frac{5}{12}}=\frac{5\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{25}{60}$ και $\overset{3}{\frac{7}{20}}=\frac{7\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{21}{60}$. Επειδή $\frac{25}{60}>\frac{15}{60}$ μπορεί να υπολογιστεί

η διαφορά: $\frac{5}{12}-\frac{7}{20}=\frac{25}{60}-\frac{21}{60}=\frac{4}{60}=\frac{4:4}{60:4}=\frac{1}{15}$

και $\frac{5}{12}+\frac{7}{20}=\frac{25}{60}+\frac{21}{60}=\frac{46}{60}=\frac{46:2}{60:2}=\frac{23}{30}$

4. *Να βρεθεί η διαφορά: $\frac{15}{4}-1$ και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.*

Λύση

$\frac{15}{4}-1=\frac{15}{4}-\frac{4}{4}=\frac{15-4}{4}=\frac{11}{4}$. Για να τρέψουμε το αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση: $11=4\cdot 2+3$ και έχουμε:

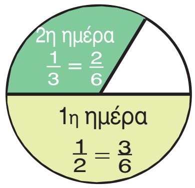
$\frac{11}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{2\cdot 4}{4}+\frac{3}{4}=2\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=2\cdot 1+\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$.

5. *Να βρεθεί το άθροισμα: $2 + 1\frac{1}{3}$.*

Λύση

$$2+1\frac{1}{3}=2+1+\frac{1}{3}=3+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{9}{3}+\frac{1}{3}=\frac{9+1}{3}=\frac{10}{3}.$$

6. *Την πρώτη ημέρα ένας κηπουρός κούρεψε το γκαζόν στο $\frac{1}{2}$ μιας στρογγυλής πλατείας. Τη δεύτερη ημέρα, εξαιτίας μιας δυνατής βροχής, κατάφερε να κουρέψει μόνο το $\frac{1}{3}$ του αρχικού γκαζόν. Ποιό μέρος από το γκαζόν της πλατείας κουρεύτηκε μέχρι και το τέλος της δεύτερης ημέρας;*



Λύση

Για να βρούμε ποιό μέρος της πλατείας που κουρεύτηκε, στο τέλος της δεύτερης ημέρας, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{3}$. Αλλά, για να εκτελέσουμε αυτή την πρόσθεση πρέπει να μετατρέψουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα. Άρα, θα έχουμε: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Για να βρούμε ποιο κλάσμα της πλατείας έχει απομείνει για κούρεμα, πρέπει να αφαιρέσουμε από το όλο μέρος,δηλαδή: $\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$, (β) $\frac{11}{13}+\frac{2}{13}$, (γ) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$, (δ) $\frac{8}{12}+\frac{2}{3}$, (ε) $\frac{17}{20}+\frac{3}{15}$, (στ) $\frac{15}{12}+\frac{5}{4}$, και απλοποίησε το τελικό αποτέλεσμα, αν δεν είναι ανάγωγο κλάσμα.*

2. *Να βρεις τις διαφορές και να απλοποιήσεις το αποτέλεσμα, όπου αυτό δεν είναι ανάγωγο κλάσμα: (α) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, (β) $\frac{8}{9}-\frac{3}{9}$, (γ) $\frac{10}{8}-\frac{3}{4}$, (δ) $\frac{4}{9}-\frac{2}{27}$, (ε) $\frac{7}{3}-\frac{5}{8}$, (στ) $\frac{3}{7}-\frac{3}{11}$.*

3. *Να μετατρέψεις τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα: (α) $3\frac{5}{8}$, (β) $4\frac{1}{10}$, (γ) $2\frac{1}{9}$.*

4. *Κάνε τα ακόλουθα κλάσματα μεικτούς αριθμούς: (α) $\frac{15}{4}$, (β) $\frac{5}{2}$, (γ) $\frac{38}{12}$.*

5. *Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{3}{8}+2$, (β) $\frac{12}{15}+1$, (γ) $\frac{16}{20}+\frac{3}{10}+5$.*

6. *Να βρεις τις διαφορές: (α) $3-2\frac{1}{5}$, (β) $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}$, (γ) $1\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$.*

7. *Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{9}$;*

8. *Ένας αγρότης πούλησε σε τέσσερις εμπόρους τα $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;*

9. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}=1\,\frac{2}{5}$	☐	☐
(β)	$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{20}{12}$	☐	☐
(γ)	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	☐	☐
(δ)	$\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$	☐	☐
(ε)	$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$	☐	☐
(στ)	$\frac{3+5}{5}=\frac{3}{5}+1$	☐	☐
(ζ)	$\frac{8-3}{8}=1-\frac{3}{8}$	☐	☐

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Αντιστοίχισε σε κάθε πρόσθεση το σωστό αποτέλεσμα:

$\frac{8}{10}+\frac{4}{10}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$	2
$\frac{45}{90}+\frac{15}{90}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{16}{12}+\frac{8}{12}$	$\frac{5}{5}$

2. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

+	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{3}{2}$				
1				
$\frac{3}{5}$				

ΝΟΤΕΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ανάμεσα στα κοινά στοιχεία όλων των ανθρωπίνων πολιτισμών είναι η δυνατότητα αρίθμησης και μουσικής έκφρασης.

- Ο άνθρωπος δημιουργεί μουσική, ήδη, από τους προϊστορικούς χρόνους, αφού το αρχαιότερο σχετικό εύρημα, που έχει ηλικία 35.000 χρόνων, είναι οστά από μαμούθ τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ρυθμικών ήχων.
- Οι μελέτες έχουν δείξει, ότι η έννοια του αριθμού εμφανίζεται στον άνθρωπο από τα πρώτα του βήματα. Διαπιστώθηκε ότι αυτή η πρώιμη ικανότητα αρίθμησης σχετίζεται με την ικανότητα της κατάτμησης του χρόνου, που δημιουργεί η αντιστοιχία γεγονότων και χρονικών στιγμών και μάλιστα χωρίς τη χρήση της έννοιας του αριθμού.
  Εξάλλου η αρίθμηση είναι μια πολιτιστική αναγκαιότητα, ένα καθολικό στοιχείο πολιτισμού.

Η συνάντηση της Μουσικής με τα Μαθηματικά πραγματοποιείται μέσα από την αίσθηση, που έχουμε για τον χρόνο και εντοπίζεται σε δύο βασικούς άξονες κάθε μουσικής έκφρασης, τον Ρυθμό και την Αρμονία.

Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Έτσι, ο ρυθμός και ο αριθμός έχουν κοινή καταγωγή, τον χωρισμό του χρόνου σε στιγμές και την αντιστοίχιση των χρονικών στιγμών με γεγονότα. Ο ρυθμός είναι από τις πρώτες μουσικές ανθρώπινες κατακτήσεις, όπως ακριβώς ο αριθμός είναι από τις πρώτες θεμελιώδεις Μαθηματικές ανθρώπινες επινοήσεις. Ο ρυθμός, λοιπόν, είναι το πρώτο είδος μουσικής που δημιούργησε ο άνθρωπος. Το μουσικό μέτρο, το οποίο είναι απαραίτητο για την εκτέλεση ενός μουσικού θέματος, δηλώνεται με ένα κλάσμα που καθορίζει τον ρυθμό. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες, του ρυθμού και του αριθμού-κλάσματος, συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η Δυτική Μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Στο σχήμα φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού. Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλου είναι $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες), που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία $\frac{1}{8}$. Το κλάσμα $\frac{4}{4}$ στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή, το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας $\frac{4}{4}$. Πράγματι $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4}$. Με αυτό τον τρόπο ο αριθμός -κλάσμα καθορίζει τον ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

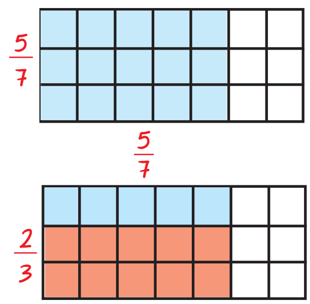
- Βρες παρτιτούρες από τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και γράψε τα κλάσματα,που αντιστοιχούν στους ρυθμούς των τραγουδιών αυτών.
- Αναζήτησε και βρες ορισμένα χαρακτηριστικά τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και προσπάθησε να συσχετίσεις τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς αυτούς, με την ονομασία του εκάστοτε συγκεκριμένου ρυθμού.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πεζόδρομος στρώθηκε με πλάκες. Τα $\frac{5}{7}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές. Από τις χρωματιστές τα $\frac{2}{3}$ είναι κόκκινες.

➢ *Ποιο είναι το μέρος όλου του πεζόδρομου που καταλαμβάνουν οι κόκκινες πλάκες;*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα:

- Το γινόμενο **δύο κλασμάτων είναι το** κλάσμα που έχει αριθμητή το **γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή το **γινόμενο των παρονομαστών**.

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot5}{7\cdot4}=\frac{15}{28}$$

- Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού** επί ένα **κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή το **γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό** και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lambda=\frac{\alpha\cdot\lambda}{\beta}$$

$$7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot3}{5}=\frac{21}{5}$$

- Δύο κλάσματα λέγονται **αντίστροφα** όταν έχουν **γινόμενο 1**.
Επειδή $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι **αντίστροφα**.

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{7\cdot5}{5\cdot7}=\frac{35}{35}=1$$

- **Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθεί το γινόμενο:* $\frac{3}{7}\cdot\frac{70}{6}\cdot\frac{8}{5}$.

Λύση

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{70}{6}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3\cdot70\cdot8}{7\cdot6\cdot5}=\frac{3\cdot560}{7\cdot30}=\frac{1680}{210}=8$$

Μπορεί να βρεθεί το γινόμενο με πιο απλό τρόπο;

2. *Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρεις πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο.*

Λύση

Αφού τα αγόρια είναι τα $\frac{5}{9}$ των μαθητών, θα είναι: $\frac{5}{9}\cdot252=\frac{5\cdot252}{9}=\frac{1260}{9}=140$.

Επομένως, τα κορίτσια θα είναι: $252-140=112$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα ....
....

(β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν ....

(γ) Ο αντίστροφος του αριθμού κ είναι ο ....., του $\frac{1}{κ}$ είναι ο ..... και του $\frac{κ}{λ}$ είναι ο .....

(δ) Μόνο ο αριθμός ..... ισούται με τον αντίστροφό του.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $3 \cdot \frac{3}{4}$, (β) $7 \cdot \frac{10}{14}$, (γ) $\frac{4}{2} \cdot 2$, (δ) $\frac{5}{100} \cdot 10$.

3. Βρες τα γινόμενα: (α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$, (β) $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5}$, (γ) $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$, (δ) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15}$.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

$\cdot$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$				
$\frac{2}{3}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

5. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21}$, (β) $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$, (γ) $3\frac{1}{8} \cdot 10$, (δ) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

6. Να βρεις τους αντίστροφους των αριθμών: (α) $\frac{4}{7}$, (β) 72, (γ) $\frac{5}{8}$, (δ) $\frac{1}{3}$, (ε) $\frac{739}{8}$, (στ) 1.

7. Ο Κώστας ήπιε τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπιε;

8. Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων: (α) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$, (β) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$, (γ) $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$.

9. Όμοια: (α) $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (β) $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (γ) $\frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8}$.

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

▶ Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

▶ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot4}{3\cdot5}=\frac{28}{15}$$

● Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**.

Μετατροπή σύνθετου σε απλό

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7\cdot4}{3\cdot5}=\frac{28}{15}$$

διότι $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{15}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα: (α) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}$, (γ) $\frac{\frac{7}{10}}{5}$.

Λύση

(α) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}=\frac{2\cdot9}{3\cdot10}=\frac{2\cdot3\cdot3}{3\cdot2\cdot5}=\frac{3}{5}$, (β) $\frac{4}{\frac{9}{8}}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{9}{8}}=\frac{4\cdot8}{1\cdot9}=\frac{32}{9}=3\frac{5}{9}$, (γ) $\frac{\frac{7}{10}}{5}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{5}{1}}=\frac{7\cdot1}{10\cdot5}=\frac{7}{50}$

2. Να εκτελεστούν οι πράξεις: $\dfrac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}}$.

Λύση

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{5}{10}}{\frac{8}{6}-\frac{4}{6}}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{4}{6}}=\frac{8\cdot6}{4\cdot10}=\frac{48}{40}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα ....

....

(β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου ....

....

2. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$, (γ) $\frac{10}{100} : \frac{1}{5}$, (δ) $\frac{7}{3} : \frac{21}{27}$.

3. Να βρεις τα πηλίκα: (α) $2 : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{5}{8} : 1$, (γ) $2\frac{1}{2} : 4$, (δ) $4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3}$.

4. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{20}{6} : 10$, (δ) $10 : \frac{20}{6}$. Τι παρατηρείς;

5. Να κάνεις τις διαιρέσεις: (α) $\frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right)$ και (β) $\left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}$. Τι παρατηρείς;

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

:	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

7. Αντιστοίχισε σε κάθε διαίρεση το σωστό αποτέλεσμα:

$\frac{3}{10} : \frac{4}{10}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$	6
$\frac{45}{90} : \frac{15}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{3} : \frac{8}{9}$	$\frac{3}{10}$

8. Να μετατρέψεις τα σύνθετα κλάσματα σε απλά: (α) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}$, (β) $\dfrac{\frac{15}{3}}{4}$, (γ) $\dfrac{20}{\frac{5}{4}}$.

9. Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα:

(α) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{4}{6}}$, (β) $\dfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{11}}$, (γ) $\dfrac{\frac{2}{3}:\frac{4}{3}}{\frac{1}{8}:2}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Στον πάπυρο του Ριντ, βρήκαμε πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν τα $\frac{2}{3}$ ενός οποιουδήποτε κλάσματος με αριθμητή το 1 και παρονομαστή έναν περιττό αριθμό. Για παράδειγμα, τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{7}$ θα είναι: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{6\cdot 7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

- Εφάρμοσε τον παραπάνω κανόνα για τα κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$ και επαλήθευσε τα αποτελέσματα.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Σε αρχαία βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. περίπου, συναντάμε εξηκονταδικά κλάσματα με παρονομαστή δύναμη του 60, για τα οποία υπήρχαν ειδικά σφηνοειδή σύμβολα.

Οι Βαβυλώνιοι *είχαν επίσης ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Οι Αιγύπτιοι, *επίσης, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα θεμελιώδη ή αιγυπτιακά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (κλασματικές μονάδες στη δική μας ορολογία). Ένα θεμελιώδες κλάσμα συμβολίζεται με τον παρανομαστή του, πάνω στον οποίο υπάρχει ένα διακριτικό σημείο, π.χ. το* $\frac{1}{5}$ *γράφεται ως* $\overline{5}$.

Όμως είχαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$.

Αυτή η ιδιομορφία του συμβολισμού οφείλεται στη διαφορετική προέλευση των κλασμάτων αυτών. Τα κλάσματα αυτά έλκουν την καταγωγή τους από άμεσα πρακτικά προβλήματα, ενώ τα θεμελιώδη κλάσματα πρέπει να ήταν προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας. Όλα τα κλάσματα που χρησιμοποιούν ανάγονται σε αθροίσματα θεμελιωδών κλασμάτων. Η αναγωγή αυτή γινόταν με τη βοήθεια ειδικών πινάκων. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στον πάπυρο του Ριντ *(Rhind), μαθηματικό έργο των Αιγυπτίων, που τοποθετείται τουλάχιστον το 1650 π.Χ.*

Ο πίνακας περιέχει την ανάλυση όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{\nu}$ *με "ν" περιττό αριθμό από 5 έως* 101.

$\nu=5$ $$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\overline{3}+\overline{15}$$

$\nu=7$ $$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\overline{4}+\overline{28}$$

$\nu=9$ $$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\overline{6}+\overline{18}$$

$\nu=59$ $$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}=\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$$

$\nu=97$ $$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}=\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$$

Αλλά και στον **πάπυρο της Μόσχας,** που τοποθετείται στα 1850 π.Χ., υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν κλάσματα και πράξεις με κλάσματα και αριθμούς, όπως για παράδειγμα "το $\frac{1}{3}$ του 6 είναι 2", που αναφέρεται σε υπολογισμό του όγκου δεδομένης κόλουρης πυραμίδας.

Οι **Έλληνες** μαθηματικοί δεν ανέπτυξαν κάποιο νέο σύστημα γραφής των κλασμάτων. Χρησιμοποιούσαν τα θεμελιώδη κλάσματα των Αιγυπτίων και τα εξηκονταδικά των Βαβυλωνίων, σε υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά και την αστρονομία. Στους "άβακες" των Ρωμαίων και των Ελλήνων (τα γνωστά αριθμητάρια των πρώτων χρόνων του δημοτικού), βρίσκουμε ειδική στήλη για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$.

Οι **Ινδοί** μαθηματικοί, επίσης, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τις πράξεις τους από πολύ παλιά. Στα έργα "Σουλβασούτρα", μερικά από τα οποία ανάγονται στο 500 π.Χ. ή και παλαιότερα, χρησιμοποιούνται τα θεμελιώδη κλάσματα στον προσεγγιστικό υπολογισμό όγκων ή εμβαδών. Αλλά, όταν δημιούργησαν το δεκαδικό Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης, άρχισαν να χρησιμοποιούν και κλάσματα με μορφή πολύ κοντινή στη δική μας. Έγραφαν τον αριθμητή πάνω από τον παρονομαστή, αλλά, χωρίς την κλασματική γραμμή, για παράδειγμα $\begin{matrix}5\\6\end{matrix}$ αντί $\frac{5}{6}$. Τα κλάσματα ξεχώριζαν το ένα από το άλλο με οριζόντιες και κάθετες γραμμές.

Έτσι, π.χ. το κλάσμα $\frac{3}{5}$ γραφόταν $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\\underline{5}\end{matrix}\right|$.

Η **πρόσθεση** συμβολιζόταν με την παράθεση των κλασμάτων το ένα δίπλα στο άλλο.

Για την **αφαίρεση** χρησιμοποιούσαν μία τελεία ή το σύμβολο "+ " στα δεξιά,

π.χ. η έκφραση $\frac{9}{12} - \frac{2}{15} - \frac{1}{5}$ γραφόταν: $\left|\begin{matrix}\overline{9}\\\underline{12}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\dot{2}\\\underline{15}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\overline{1+}\\\underline{5}\end{matrix}\right|$.

Στα μεικτά κλάσματα π.χ. $3\frac{1}{4}$, το ακέραιο μέρος γραφόταν πάνω από το κλάσμα: $\left|\begin{matrix}\overline{3}\\1\\\underline{4}\end{matrix}\right|$.

Τα κλάσματα στους **Κινέζους** εμφανίστηκαν σχεδόν μαζί με τους ακέραιους αριθμούς. Τα πρώτα κλάσματα, που χρησιμοποιούσαν, ήταν το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Στους κανόνες των αριθμητικών πράξεων στους Κινέζους, σε αντίθεση με τους άλλους λαούς, δεν υπήρχε τίποτα το ασυνήθιστο. Ήδη τον 2ο αιώνα π.Χ. οι Κινέζοι είχαν επεξεργαστεί, επαρκώς, όλες τις πράξεις με κλάσματα. Τον 3ο αιώνα μ.Χ. οι Κινέζοι, που χρησιμοποιούσαν, ήδη, το δεκαδικό σύστημα, άρχισαν στην ουσία, να χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα με μετρολογική μορφή.

Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται στο έργο του Πέρση μαθηματικού Αλ-Κασί, ο οποίος εργαζόταν στο Αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης. Αν και στο παρελθόν, υπήρξαν προσπάθειες στον Αραβικό κόσμο να εισαχθούν τα δεκαδικά κλάσματα, πρώτος ο Αλ-Κασί διατυπώνει τους βασικούς κανόνες των πράξεων και τους τρόπους μετατροπής των εξηκονταδικών κλασμάτων σε δεκαδικά και αντίστροφα.

Η είσοδος των κλασμάτων στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά ανάγεται στον Λεονάρδο της Πίζας (1202), ενώ οι όροι "αριθμητής" και "παρονομαστής" απαντώνται στον Πλανούδη (τέλη 13ου αιώνα).

Ανακεφαλαίωση

ΚΛΑΣΜΑΤΑ $\frac{κ}{ν}$, όπου κ και ν φυσικοί αριθμοί, $ν \neq 0$

Ίσα ή ισοδύναμα: αν $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$ τότε $α\cdot δ=β\cdot γ$	$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ τότε: $2\cdot 15=3\cdot 10$
Ισχύει: $\frac{α}{β}=\frac{α\cdot γ}{β\cdot γ}$ και $\frac{α}{β}=\frac{α:δ}{β:δ}$	$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$ και $\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$
$\frac{α}{β}$ ανάγωγο όταν ΜΚΔ(α,β)=1	$\frac{7}{12}$ ανάγωγο αφού ΜΚΔ(7,12) = 1
ομώνυμα $\frac{α}{β},\frac{γ}{β}$ · ετερώνυμα $\frac{α}{β},\frac{γ}{δ}$	ομώνυμα $\frac{2}{7},\frac{5}{7}$ · ετερώνυμα $\frac{2}{3},\frac{5}{8}$
$\frac{α}{β}>\frac{γ}{β}$ όταν $α>γ$ και $\frac{β}{α}<\frac{β}{γ}$ όταν $α>γ$	$\frac{9}{13}>\frac{5}{13}$ αφού $9>5$ $\frac{7}{12}=\frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$. Επειδή $\frac{28}{48}>\frac{15}{48}$, άρα $\frac{7}{12}>\frac{5}{16}$ $\frac{13}{9}<\frac{13}{5}$ αφού $9>5$
Ο **Μεικτός** αποτελείται από έναν **ακέραιο** και ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας.	$1\frac{4}{5}=1+\frac{4}{5}=\frac{5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$
$\frac{α}{β},\frac{γ}{δ}$ είναι αντίστροφα όταν $\frac{α}{β}\cdot\frac{γ}{δ}=1$	$\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{14}=\frac{7\cdot 10}{5\cdot 14}=\frac{70}{70}=1$

Πράξεις μεταξύ κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$\frac{α}{γ}+\frac{β}{γ}=\frac{α+β}{γ}$

$\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7+2}{5}=\frac{9}{5}$ και $\frac{7}{4}+\frac{2}{3}=\frac{21}{12}+\frac{8}{12}=\frac{29}{12}$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$\frac{α}{γ}-\frac{β}{γ}=\frac{α-β}{γ}$

$\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{6-2}{5}=\frac{4}{5}$ και $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13}{12}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$\frac{α}{β}\cdot\frac{γ}{δ}=\frac{α\cdot γ}{β\cdot δ}$ και

$λ\cdot\frac{α}{β}=\frac{λ\cdot α}{β}$

$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$ και $7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{5}=\frac{21}{5}$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$α:β=α\cdot\frac{1}{β}=\frac{α}{β}$ και

$\frac{α}{β}:\frac{γ}{δ}=\frac{α}{β}\cdot\frac{δ}{γ}=\frac{α\cdot δ}{β\cdot γ}$

$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ και $\frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΕ ΑΠΛΟ

$\frac{\frac{α}{β}}{\frac{γ}{δ}}=\frac{α\cdot δ}{β\cdot γ}$

$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$

ΜΕΡΟΣ Α΄

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Δεκαδικοί αριθμοί

3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

- *Μετατρέπω ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και αντιστρόφως, ένα δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα*
- *Κατανοώ τους δεκαδικούς αριθμούς ως αποτέλεσμα μετρήσεων*
- *Αναγνωρίζω την αξία των ψηφίων ενός δεκαδικού αριθμού*
- *Αντιστοιχίζω τους δεκαδικούς αριθμούς με σημεία της ευθείας των αριθμών*
- *Συγκρίνω δεκαδικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ δεκαδικούς αριθμούς*
- *Κατανοώ την έννοια του δεκαδικού κλάσματος ως δεκαδικού πηλίκου και γράφω ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό και ως ποσοστό*

3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

- *Εκτελώ πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

- *Εκτελώ πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης*

3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

- *Γράφω πολύ “μεγάλους” αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή*

3.5. Μονάδες μέτρησης

- *Γνωρίζω τις βασικές μονάδες μέτρησης μεγεθών και τη μετατροπή τους από τη μία στην άλλη*

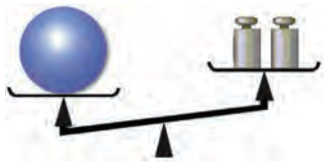
ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ Ο ΚΥΡΗΝΑΙΟΣ
(ΕΖΗΣΕ ΤΟΝ 3ο Π.Χ. ΑΙΩΝΑ)

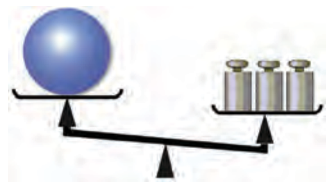
Α.3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

Αν χωρίσουμε μια μονάδα σε 10 ίσα μέρη, τότε μπορούμε να πάρουμε κλάσματα της μονάδας όπως: $\frac{1}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$ κλπ. Τα κλάσματα αυτά είναι ομώνυμα, συγκρίνονται εύκολα και εξυπηρετούν στις πράξεις και στις μετρήσεις. Ας τα προσεγγίσουμε με μερικές δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Αν βάλουμε στη ζυγαριά 2 σταθμά, θεωρώντας το ένα από αυτά ως μονάδα μέτρησης, διαπιστώνουμε ότι η μπάλα είναι βαρύτερη και αν βάλουμε 3 από τα ίδια, ότι είναι ελαφρότερη.





- *Τι είδους σταθμά χρειαζόμαστε, εκτός από αυτά που διαθέτουμε, για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρησή μας;*
- *Τι μορφή θα έχει ο αριθμός, που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησης του βάρους της μπάλας;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να μετρήσεις το μήκος του θρανίου σου με μονάδα μέτρησης: (α) το μολύβι σου, (β) ένα σχοινί μήκους ενός μέτρου και (γ) με ένα μέτρο.

- *Στην προσπάθειά σου, στις τρεις διαφορετικές μετρήσεις, για να δώσεις ένα αποτέλεσμα όσο γίνεται πιο ακριβές, τι είδους προβλήματα αντιμετωπίζεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Αν σου ζητηθεί να χωρίσεις το τμήμα ΑΒ που έχει μήκος 5 εκατοστά σε οκτώ ίσα μέρη, πόσο θα είναι το μήκος του κάθε μέρους από αυτά;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες, γίνεται φανερό, ότι σε πολλές περιπτώσεις μετρήσεων οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν να εκφράσουν τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων με ακρίβεια. Γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς.

- **Δεκαδικό κλάσμα** λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή **μια δύναμη του 10.**

*Τα κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{825}{100}$, $\frac{53}{1000}$ και $\frac{1004}{10000}$ έχουν παρονομαστές τους φυσικούς αριθμούς **10, 100, 1000** και **10.000**, που είναι δυνάμεις του 10: 10^1, 10^2, 10^3 και 10^4*

- Κάθε **δεκαδικό κλάσμα** γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

π.χ. 0,3, 8,25, 0,053 και 0,1004 αντίστοιχα

Ο Φλαμανδός μαθηματικός **Σιμόν Στέβιν** *(Simon Stevin, 1548 - 1620) ασχολήθηκε με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς. Το έργο "η δεκάτη" (La disme) ήταν μια από τις μεγάλες συνεισφορές στη βελτίωση της τεχνικής των υπολογισμών και στην καθιέρωση του Ινδοαραβικού συστήματος αρίθμησης. Την ίδια χρονιά δημοσιεύει την "Αριθμητική" του, όπου εισάγει το σύμβολο ⓪, για να υποδηλώσει το ακέραιο μέρος του αριθμού, το σύμβολο ①, για τα δέκατα, το ②, για τα εκατοστά, κ.λπ. Με αυτό τον τρόπο συμβολισμού ο δεκαδικός 34,25 γραφόταν 34⓪2①5② , ο αριθμός 0,167 γραφόταν 0⓪1①6②7③ και ο αριθμός 32 γραφόταν 32⓪. Ο γνωστός σήμερα συμβολισμός προτάθηκε από τον* **John Napier** *στα 1620 περίπου. Αυτός πρώτος χρησιμοποίησε το κόμμα μεταξύ του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους ενός αριθμού. Το νέο σύστημα συμβολισμού επικράτησε, λόγω της συντομίας στην αναπαράσταση μεγάλων αριθμών και την ευκολία στην απομνημόνευση και εκτέλεση διαφόρων πράξεων.*

Γραφή, ανάγνωση και στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Στον διπλανό πίνακα υπάρχουν διάφοροι δεκαδικοί αριθμοί.

- *Προσπάθησε να τους διαβάσεις και να τους γράψεις ολογράφως.*
- *Ποιος από αυτούς είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος;*
- *Προσπάθησε να τους τοποθετήσεις σε αύξουσα σειρά.*
- *Στρογγυλοποίησε τους αριθμούς (α) στη μονάδα και (β) στο εκατοστό.*

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκ. χιλιοστά	Εκατοντ. χιλιοστ.	Εκατομμυριοστά
1	5	1	3	,	0	0	3			
		2	7	,	1	8	0	6		
			0	,	4	0	5	9	0	8
	9	5	0	,	4	2	0			
8	5	0	0	,	7					
1	5	4	5	,	8	6	4	5	2	
9	5	2	8	,	9					
9	8	0	1	,	5	1	3	3		
4	6	3	7	,	2	5	2			
1	5	1	3	,	0	0	4			
1	5	1	3	,	1					

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η

Στον δεκαδικό αριθμό □0, □9 λείπουν δύο ψηφία του.

- *Συμπλήρωσε τα κενά έτσι, ώστε κανένα ψηφίο του αριθμού να μην είναι ίδιο με άλλο.*
- *Βρες ποιος είναι ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος δεκαδικός που μπορείς να γράψεις;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το **ακέραιο μέρος** και το **δεκαδικό μέρος** του. Αυτά διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.
- Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά, τα δεκάκις χιλιοστά, τα εκατοντάκις χιλιοστά, τα εκατομμυριοστά κ.λπ.
- Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες κ.λπ.
- Δέκα μονάδες μίας τάξης είναι μια μονάδα μεγαλύτερης τάξης.
- Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν διαφορετικό ακέραιο μέρος, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.

  8,97453 < 9,432
- Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, συγκρίνουμε τα δεκαδικά τους μέρη, ένα προς ένα από αριστερά προς τα δεξιά και βρίσκουμε το πρώτο ψηφίο στο οποίο διαφέρουν. Τότε ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο είναι ο μεγαλύτερος.

  105,3842 > 105,37896
- Για να **στρογγυλοποιήσουμε** έναν δεκαδικό αριθμό:
  - Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
  - Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
  - Αν αυτό είναι **μικρότερο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν.
  - Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

  957,3842 → 957,384
  957,3842 → 957,38
  957,3842 → 957,4
  957,3842 → 957
  957,3842 → 960
  957,3842 → 1000

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να γραφούν τα κλάσματα που ακολουθούν, ως δεκαδικοί αριθμοί, με την εκτέλεση των αντιστοίχων διαιρέσεων: (α) $\frac{20}{4}$, (β) $\frac{50}{8}$, (γ) $\frac{520}{67}$.*

Λύση

(α) $\frac{20}{4} = 20 : 4 = 5$

(β) $\frac{50}{8} = 50 : 8 = 6,25$

(γ) $\frac{520}{67} = 520 : 67 = 7,76119...$

Στην περίπτωση αυτή το πηλίκο γράφεται με στρογγυλοποίηση στο δέκατο 7,8 ή στο εκατοστό 7,77 ή στο χιλιοστό 7,761 κ.λπ.

```
50,00 | 8
20    |-------
 40   | 0,625
  0

520,000000 | 67
 510       |----------
  410      | 7,76119...
   80
   130
    630
     29
     ...
```

2. *Να γραφούν, ως κλάσματα, οι δεκαδικοί αριθμοί: (α) 2,35 και (β) 0,348.*

Λύση

(α) $2,35 = \frac{235}{100}$ (β) $0,348 = \frac{348}{1000}$

3. *Να γραφούν, ως δεκαδικοί αριθμοί, τα κλάσματα: (α) $\frac{314}{100}$ και (β) $\frac{769}{1000}$.*

Λύση

(α) $\frac{314}{100} = 3,14$ (β) $\frac{769}{1000} = 0,769$

4. *Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{10}{8}$ σε δεκαδικό κλάσμα.*

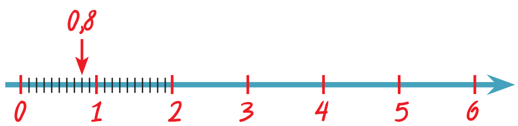
Λύση

Αρχικά, μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{10}{8}$ σε δεκαδικό αριθμό, εκτελώντας τη διαίρεση και έχουμε: $\frac{10}{8} = 1,25$. Ο δεκαδικός 1,25 μετατρέπεται σε δεκαδικό κλάσμα $1,25 = \frac{125}{100}$. Άρα $\frac{10}{8} = \frac{125}{100}$.

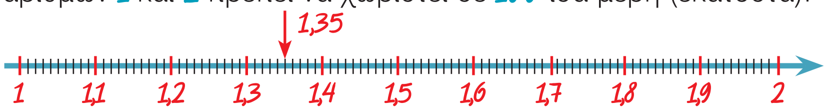
5. *Να τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών οι δεκαδικοί αριθμοί: (α) 0,8 και (β) 1,35.*

Λύση

(α) Ισχύει, ότι: $0 < 0,8 < 1$. Δηλαδή, το τμήμα της ευθείας μεταξύ των φυσικών αριθμών 0 και 1 πρέπει να χωριστεί σε 10 ίσα μέρη *(δέκατα)*.



(β) Επίσης, ισχύει: $1 < 1,35 < 2$. Δηλαδή, το τμήμα της ευθείας μεταξύ των φυσικών αριθμών 1 και 2 πρέπει να χωριστεί σε 100 ίσα μέρη (εκατοστά).



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε ως κλάσματα τα πηλίκα των διαιρέσεων: (α) 4:5, (β) 9:16, (γ) 25:79.

2. Ποια διαίρεση παριστάνει καθένα από τα κλάσματα: (α) $\frac{2}{21}$, (β) $\frac{19}{3}$, (γ) $\frac{77}{105}$.

3. Γράψε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα, ως δεκαδικό αριθμό: (i) με προσέγγιση εκατοστού και (ii) με προσέγγιση χιλιοστού: (α) $\frac{7}{16}$, (β) $\frac{21}{17}$, (γ) $\frac{20}{95}$.

4. Γράψε ως δεκαδικό αριθμό, καθένα από τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:
(α) $\frac{58}{10}$, (β) $\frac{3}{100}$, (γ) $\frac{5025}{100}$, (δ) $\frac{1024}{1000}$.

5. Γράψε ως δεκαδικό κλάσμα, καθέναν από τους δεκαδικούς αριθμούς που ακολουθούν:
(α) 3,5, (β) 45,25, (γ) 3,004.

6. Να βρεις το ψηφίο των χιλιοστών και των δεκάκις χιλιοστών στους παρακάτω αριθμούς:
(α) 5,8909, (β) 98,0005, (γ) 456,8756.

7. Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$ ή $>$, μεταξύ των αριθμών:
(α) 45,345 ... 45,413, (β) 980,19 ... 899,01, (γ) 7,534 ... 7,5340.

8. Να στρογγυλοποιήσεις τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στο δέκατο, εκατοστό και χιλιοστό: (α) 9876,008, (β) 67,8956, (γ) 0,001, (δ) 8,239, (ε) 23,7048.

9. Τοποθέτησε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς στην ευθεία των αριθμών:
(α) 3,4, (β) 4,5, (γ) 2,3, (δ) 2,8, (ε) 4,7, (στ) 4,3, (ζ) 2,5, (η) 1,9, (θ) 5,1.

10. Στον αριθμό 34,□□□ λείπουν τα τρία δεκαδικά ψηφία του. Να συμπληρώσεις τον αριθμό με τα ψηφία 9, 5 και 2, έτσι ώστε κάθε ψηφίο να γράφεται μία μόνο φορά. Να γράψεις όλους τους δεκαδικούς που μπορείς να βρεις και να τους διατάξεις σε φθίνουσα σειρά.

11. Να συμπληρώσεις το ψηφίο που λείπει στον αριθμό 25,□7, αν γνωρίζεις ότι, όταν ο αριθμός στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο δέκατο, γίνεται ίσος με 25,5.

12. Αντιστοίχισε κάθε δεκαδικό αριθμό από τον πρώτο πίνακα με το δεκαδικό κλάσμα, του οποίου είναι το πηλίκο, στον δεύτερο πίνακα:

0,345	$\frac{345}{10}$
3,45	$\frac{345}{1000}$
0,0345	$\frac{345}{100}$
34,5	$\frac{345}{10000}$

13. Αντιστοίχισε κάθε κλάσμα της πρώτης στήλης με το ισοδύναμό του της δεύτερης στήλης και αυτό με τον αντίστοιχο δεκαδικό της τρίτης στήλης.

$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0,9
$\frac{6}{20}$	$\frac{190}{10}$	0,4
$\frac{45}{50}$	$\frac{25}{10}$	0,3
$\frac{15}{5}$	$\frac{4}{10}$	3,0
$\frac{10}{4}$	$\frac{9}{10}$	2,5
$\frac{19}{1}$	$\frac{30}{10}$	19,0

Α.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

Στους δεκαδικούς οι πράξεις δεν παρουσιάζουν καμμιά ιδιαίτερη δυσκολία. Αρκεί, να προσέχουμε τη θέση της υποδιαστολής. Ας τις δούμε, όμως, πιο αναλυτικά.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Η **Πρόσθεση** και η **Αφαίρεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς.
  Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης, τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι, ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

$$\begin{array}{r} 86{,}907 \\ +\,132{,}76 \\ \hline 219{,}667 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ +\,14{,}085 \\ \hline 46{,}085 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54{,}452 \\ -\,15{,}905 \\ \hline 38{,}547 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18{,}31 \\ -\,7{,}952 \\ \hline 10{,}358 \end{array}$$

- Ο **Πολλαπλασιασμός** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των φυσικών αριθμών.

  Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

$$\begin{array}{rl} 15{,}82 & \text{2 δεκαδικά ψηφία} \\ \times\quad 2{,}3 & \text{1 δεκαδικό ψηφίο} \\ \hline 4746 & \\ 3164 & \\ \hline 36{,}386 & \text{3 δεκαδικά ψηφία} \end{array}$$

- Η **Διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό** γίνεται, όπως και η ευκλείδεια διαίρεση.

  Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτη και τον διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι, ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός.
  Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, "κατεβάζουμε" το **μηδέν**, ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Η διαίρεση $534{,}28 : 3{,}178$ γίνεται: $534280 : 3178$

(πολλαπλασιάσαμε διαιρετέο και διαιρέτη με το 1000 για να απαλείψουμε τα δεκαδικά ψηφία και από τον διαιρέτη)

$$\begin{array}{l|l} 534280{,}0 & 3178 \\ \cline{2-2} 21648 & 168{,}1 \\ \ \ 25800 & \\ \ \ \ \ 3760 & \\ \ \ \ \ \ 582 & \end{array}$$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε με 0,1, 0,01, 0,001... ή όταν διαιρούμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000,... μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά μία, δύο, τρεις**,... αντίστοιχα θέσεις.

$258 \cdot 0{,}1 = 25{,}8$ ή $258 : 10 = 25{,}8$

$8{,}45 \cdot 0{,}01 = 0{,}0845$ ή $8{,}45 : 100 = 0{,}0845$

$12{,}45 \cdot 0{,}001 = 0{,}01245$ ή $12{,}45 : 1000 = 0{,}01245$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα **δεξιά μία, δύο, τρεις**, ... θέσεις αντίστοιχα.

$28{,}34 \cdot 10 = 283{,}4$

$38{,}0945 \cdot 100 = 3809{,}45$

$1{,}3245 \cdot 1000 = 1324{,}5$

$0{,}009 \cdot 1000 = 9$

◆ Οι **Δυνάμεις** των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών.

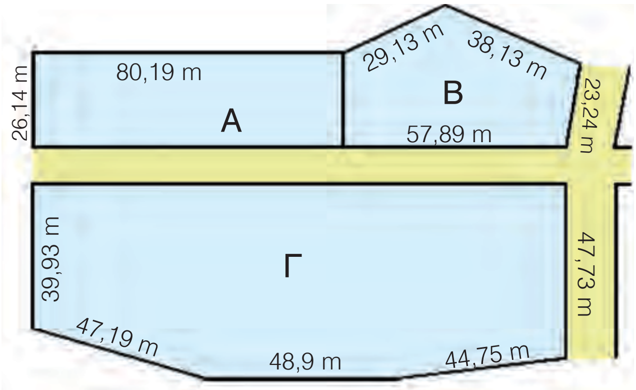
Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, που έχει το αποτέλεσμα, προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης επί τον εκθέτη της δύναμης.

$(2{,}5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$	$1 \times 2 = 2$
$(1{,}25)^2 = 1{,}25^2 = 1{,}5625$	$2 \times 2 = 4$
$(0{,}115)^2 = 0{,}115^2 = 0{,}013225$	$3 \times 2 = 6$
$(1{,}5)^3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$	$1 \times 3 = 3$
$(0{,}15)^3 = 0{,}15^3 = 0{,}003375$	$2 \times 3 = 6$
$(0{,}5)^4 = 0{,}5^4 = 0{,}0625$	$1 \times 4 = 4$
$(0{,}15)^4 = 0{,}15^4 = 0{,}00050625$	$2 \times 4 = 8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να υπολογίσεις τα αθροίσματα: (α) 48,18 + 3,256 + 7,129 (β) 3,59 + 7,13 + 8,195.*

2. *Να υπολογίσεις το μήκος της περιμέτρου καθενός από τα οικόπεδα του διπλανού σχήματος.*



3. *Να υπολογίσεις τις διαφορές:*
(α) 15,833 – 4,791
(β) 13,902 – 12,5025
(γ) 20,0005 – 12,501.

4. *Να κάνεις τις παρακάτω διαιρέσεις: (α) 579 : 48 (β) 314 : 25 (γ) 520 : 5,14 (δ) 49,35 : 7.*

5. *Να κάνεις τις πράξεις: (α) 520 · 0,1 + 0,32 · 100 (β) 4,91 · 0,01 + 0,819 · 10.*

6. *Να κάνεις τις πράξεις: (α) 4,7 : 0,1 – 45 : 10 (β) 0,98 : 0,0001 – 6785 : 1000.*

7. *Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 20,2. Να υπολογίσεις την πλευρά του.*

8. *Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 48,52. Αν η βάση του είναι 10,7, πόσο είναι η κάθε μία από τις ίσες πλευρές του;*

9. *Να υπολογίσεις τις τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:*
(α) 24 · 5 – 2 + 3 · 5 (β) 3 · 11 – 2 + 54,1 : 2.

10. *Να υπολογίσεις τις δυνάμεις: (α) $3{,}1^2$ (β) $7{,}01^2$ (γ) $4{,}5^2$ (δ) $0{,}5^2$ (ε) $0{,}2^2$ (στ) $0{,}3^3$.*

11. *Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.*

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	2,75 + 0,05 + 1,40 + 16,80 = 21	☐	☐
(β)	420,510 + 72,490 + 45,19 + 11,81 = 500	☐	☐
(γ)	4 – 3,852 = 1,148	☐	☐
(δ)	32,01 – 4,001 = 28,01	☐	☐
(ε)	41900 · 0,0001 – 0,0419 · 1000 = 0	☐	☐
(στ)	56,89 · 0,01 + 4311 : 10000 = 1	☐	☐
(ζ)	(3,2 + 7,2 · 2 + 24 · 0,1) : 100 = 0,2	☐	☐

Α.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

Ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη γρήγορη εκτέλεση πράξεων. Τα κομπιουτεράκια που υπάρχουν στο εμπόριο και χρησιμοποιούνται σήμερα είναι πολλών ειδών. Όλα όμως μπορούν να εκτελούν τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής. Οι βασικές πράξεις μεταξύ δύο αριθμών εκτελούνται με την απλή εισαγωγή σε σειρά των αριθμών και του συμβόλου της πράξης μεταξύ τους. Στην περίπτωση, που το αποτέλεσμα έχει πολλά ψηφία, η μορφή του παρουσιάζεται με μια προσέγγιση.

Τα σύμβολα για τις τέσσερις πράξεις είναι τα εξής: [+], [−], [*] και [/].

Το πάτημα του πλήκτρου [=] μας δίνει στην οθόνη του υπολογιστή το αποτέλεσμα της πράξης.

128,35	+	59,003	=	187,353
752	−	38,498	=	713,502
1520,39	*	3,759	=	5715,14601
859	/	10,19	=	84,29833

Αν ο υπολογιστής τσέπης διαθέτει βοηθητική μνήμη τότε υπάρχουν σ' αυτόν τα πλήκτρα:

[MR] : εμφανίζει στην οθόνη τον αριθμό που είναι τοποθετημένος στη μνήμη,

[MC] : σβήνει το περιεχόμενο της μνήμης και

[M+] : προσθέτει στον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

[M−] : αφαιρεί από τον αριθμό που υπάρχει στη μνήμη το περιεχόμενο της οθόνης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης:
(1,5:3+0,4 · 7) · 5 - 31,2 : (0,9 · 2+3,3:1,1) με τη χρήση υπολογιστή τσέπης.

Λύση

Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

1,5	/	3	=	0,5	M+	0,4	*	7	=	2,8	M+ MR	3,3
0,9	*	2	=	1,8	M+	3,3	/	1,1	=	3	M+ MR	4,8
3,3	*	5	=	16,5	M+	31,2	/	4,8	=	6,5	M− MR	10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ποια αριθμητική παράσταση υπολογίζεται, με τις παρακάτω πράξεις που έχουν γίνει στο κομπιουτεράκι και ποιο είναι το τελικό αποτέλεσμα;

7,28	/	5,2	−	0,4	=	?	*	5,8	+	4,2	=	?	M+	
2,4	+	7,1	=	?	/	5	=	?	+	0,1	=	?	M+	
2,03	+	0,47	=	?	*	3,2	=	?	M−	MR	?	MC	?	

Α.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

➢ *Πώς μπορούν να γραφούν οι παρακάτω αριθμοί έτσι, ώστε να διαβάζονται με συνοπτικό και κατανοητό τρόπο;*

– *Η μάζα του Ήλιου είναι:* 1983000000000000000000000000000 *κιλά.*

– *Η μάζα της Γης είναι:* 5976000000000000000000000 *κιλά.*

Από την παραπάνω δραστηριότητα βλέπουμε ότι υπάρχει αρκετή δυσκολία στη γραφή πολύ μεγάλων αριθμών. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί αν χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τρόπο γραφής που λέγεται "τυποποιημένη μορφή".

Μαθαίνουμε

● Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού **α** επί μια δύναμη του **10**. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε **τυποποιημένη**. Ο αριθμός **α** είναι ένας **δεκαδικός** αριθμός με ακέραιο ψηφίο **μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

$3.140.000.000.000.000.000 = 3{,}14 \cdot 1.000.000.000.000.000.000 = 3{,}14 \cdot 10^{18}$

$234.000.000.000.000.000 = 2{,}34 \cdot 100.000.000.000.000.000 = 2{,}34 \cdot 10^{17}$

Επίσης ο αριθμός $5{,}21 \cdot 10^5$ είναι η τυποποιημένη μορφή του αριθμού 521.000 και ο αριθμός $2 \cdot 10^3$ είναι η τυποποιημένη μορφή του αριθμού 2.000.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:*
(α) 583.000 (β) 4.300.000 (γ) 7.960.000 (δ) 3.420.000.000 (ε) 4.800 (στ) 7.310 (ζ) 281.900 (η) 518.000.000 (θ) 131.000 (ι) 675.000.

2. *Να γράψεις τη δεκαδική μορφή των αριθμών:*
(α) $3{,}1 \cdot 10^6$ *(β)* $4{,}820 \cdot 10^5$ *(γ)* $3{,}25 \cdot 10^4$ *(δ)* $7{,}4 \cdot 10^3$ *(ε)* $9{,}2 \cdot 10^2$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Αναζήτησε κατάλληλες πηγές για να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις:

– *Πόσα χιλιόμετρα είναι ένα έτος φωτός;*
– *Πόσα ερυθρά αιμοσφαίρια υπάρχουν σ' έναν υγιή άνθρωπο;*
– *Πόσα χιλιόμετρα απέχει από τη Γη η Σελήνη;*
– *Πόση είναι η ακτίνα της Γης;*

Α.3.5. Μονάδες μέτρησης

Η φιλοσοφία δεν είναι εύκολο να μετρηθεί. Ούτε ο φόβος. Υπάρχουν όμως πράγματα που μπορούν να μετρηθούν, όπως π.χ. το μήκος, το βάρος, ο χρόνος. Για να τα μετρήσουμε χρειαζόμαστε για το καθένα μια μονάδα μέτρησης. Αλλά κι αυτό δεν φτάνει, διότι δεν είναι όλα τα μεγέθη ακέραια πολλαπλάσια της μονάδας. Θα πρέπει, λοιπόν, να δημιουργήσουμε και υποδιαιρέσεις της μονάδας. Έτσι θα είμαστε πιο ακριβείς στις μετρήσεις μας. Ας προχωρήσουμε τώρα με μια δραστηριότητα που μετράει τις δραστηριότητες του Γιάννη που δεν πέρασε καθόλου άσκημα το πρωί της Κυριακής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ο Γιάννης ξύπνησε την Κυριακή το πρωί, στις οκτώ και τέταρτο και ως τις έντεκα και μισή έπαιζε. Από τις έντεκα και μισή, ως τις δώδεκα, είδε τηλεόραση.

➢ *Πόσο χρόνο πέρασε σε κάθε δραστηριότητά του;*
α) Με μονάδα μέτρησης την ώρα;
β) Με μονάδα μέτρησης το τέταρτο;
γ) Με μονάδα μέτρησης το πεντάλεπτο;
δ) Με μονάδα μέτρησης το λεπτό;
ε) Με μονάδα μέτρησης το δευτερόλεπτο;

➢ *Τι παρατηρείς; Πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι μετρήσεις του κάθε χρονικού διαστήματος με διαφορετικές μονάδες μέτρησης του χρόνου;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Η μάζα του κυπέλλου του σχήματος να μετρηθεί με μονάδα μέτρησης τα 50g, τα 100g, τα 500g και το 1Kg.

➢ *Τι παρατηρείς;*

1 kg 500 g 100 g 50g

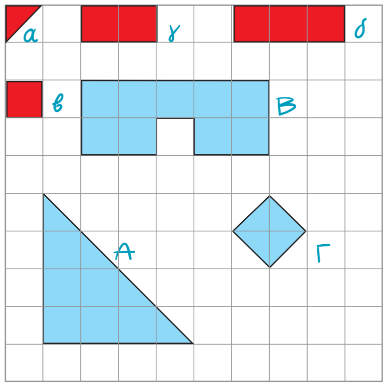
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

1. *Προσπάθησε να μετρήσεις τα Α, Β και Γ, με βάση, τις τέσσερις διαφορετικές μονάδες μέτρησης α, β, γ και δ.*
Από τη μέτρηση θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Α = 16 α, Α = 8 β, Α = 4 γ, Α = $\frac{8}{3}$δ

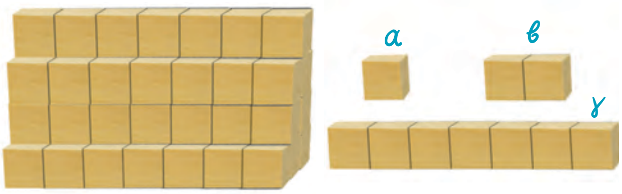
Β = 18 α, Β = 9 β, Β = 4,5 γ, Β = 3 δ

Γ = 4 α, Γ = 2 β, Γ = 1 γ, Γ = $\frac{2}{3}$δ



Παρατηρούμε ότι ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

2. *Βρες τον όγκο του σχήματος με μονάδα μέτρησης τους όγκους α, β και γ.*
Ο όγκος του σχήματος θα είναι αντίστοιχα: 56α, 28β, 8γ.



Παρατηρούμε, ότι ο αριθμός που εκφράζει τον όγκο ενός στερεού εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Μονάδες μέτρησης μήκους

- Η βασική μονάδα μήκους είναι το **μέτρο** (συμβολίζεται με **m**).
  Υποδιαιρέσεις του μέτρου:
  - 1 δεκατόμετρο ή παλάμη (dm) $\quad 1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0{,}1 \text{ m}$
  - 1 εκατοστόμετρο ή πόντος (cm) $\quad 1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0{,}01 \text{ m}$
  - 1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm) $\quad 1 \text{ mm} = \frac{1}{1.000} \text{ m} = 0{,}001 \text{ m}$

  Πολλαπλάσιο του μέτρου:
  - 1 χιλιόμετρο (Km) $\quad 1 \text{ Km} = 1.000 \text{ m}$
- Στη ναυσιπλοΐα, ως μονάδα μέτρησης μήκους, χρησιμοποιούμε το **ναυτικό μίλι**. $\quad$ 1 ναυτικό μίλι = 1.852 m

Μονάδες μέτρησης εμβαδού

- Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο** (συμβολίζεται με **m^2**) που είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο.
  Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου:
  - 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2) $\quad 1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2$
  - 1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2) $\quad 1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{10.000} \text{ m}^2 = 0{,}0001 \text{ m}^2$
  - 1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2) $\quad 1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{1.000.000} \text{ m}^2 = 0{,}000001 \text{ m}^2$
- Στην Ελλάδα, ως μονάδα επιφάνειας, χρησιμοποιούμε το **στρέμμα**.

  $1 \text{ Km}^2 = 1.000.000 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2$

  $1 \text{ στρέμμα} = 1.000 \text{ m}^2$

Μονάδες μέτρησης όγκου

- Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το **κυβικό μέτρο** (συμβολίζεται με **m^3**) που είναι ο όγκος ενός κύβου, ακμής ενός μέτρου. Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου:
  - 1 κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) $\quad 1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1.000} \text{ m}^3 = 0{,}001 \text{ m}^3$
  - 1 κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) $\quad 1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1.000.000} \text{ m}^3 = 0{,}000001 \text{ m}^3$
  - 1 κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) $\quad 1 \text{ mm}^3 = \frac{1}{1.000.000.000} \text{ m}^3 = 0{,}000000001 \text{ m}^3$
- Το dm^3 ονομάζεται και **λίτρο (lt)** και συνήθως χρησιμοποιείται για τη μέτρηση όγκου υγρών. $\quad 1 \text{ lt} = 1 \text{ dm}^3 = 0{,}001 \text{ m}^3$
- Το cm^3 λέγεται και **χιλιοστόλιτρο (ml)**. $\quad 1 \text{ ml} = 0{,}001 \text{ lt} = 1 \text{ cm}^3 = 0{,}000001 \text{ m}^3$

Μονάδες μέτρησης χρόνου

- Η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το **δευτερόλεπτο** (συμβολίζεται με **s**)

Πολλαπλάσια:

– 1 λεπτό (min)				= 60 s
– 1 ώρα (h)			= 60 min	= 3.600 s
– 1 ημέρα	= 24h		= 1.440 min	= 86.400 s

Μονάδες μέτρησης μάζας

- Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι το **χιλιόγραμμο ή κιλό** (συμβολίζεται με **Kg**)

Υποδιαιρέσεις του κιλού:

– 1 γραμμάριο (g)		1 g	= 0,001 Kg
– 1 χιλιοστόγραμμο(mg)	1mg	= 0,001 g	= 0,000001 Kg

Πολλαπλάσιο του κιλού:

– 1 τόνος (t)	1 t	= 1.000 Kg

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να εκφραστεί το μήκος των 2.754,389 m, σε όλες τις υποδιαιρέσεις του m.*

Λύση

Για τις μετατροπές από μία μονάδα σε άλλη, φτιάχνουμε μια "**σκάλα**", που για να την "**ανέβουμε**", πρέπει από κάθε σκαλοπάτι στο επόμενο, να **διαιρούμε με το 10**, ενώ για να την "**κατέβουμε**", πρέπει να **πολλαπλασιάσουμε με το 10**.

2754,389 m	m	2754,389 m
⇑ : 10	⇑ : 10 ·10 ⇓	· 10 ⇓
27543,89 dm	dm	27543,89 dm
⇑ : 10	⇑ : 10 ·10 ⇓	· 10 ⇓
275438,9 cm	cm	275438,9 cm
⇑ : 10	⇑ : 10 ·10 ⇓	· 10 ⇓
2754389 mm	mm	2754389 mm

2. *Η επιφάνεια ενός κύβου έχει εμβαδόν 96cm². Να βρεθεί ο όγκος του.*

Λύση

Επειδή ο κύβος έχει 6 έδρες, η κάθε έδρα του θα έχει εμβαδόν $96\ cm^2 : 6 = 16\ cm^2$.
Αλλά είναι $16\ cm^2 = 4\ cm \cdot 4\ cm = (4\ cm)^2$, άρα, η ακμή του κύβου είναι 4 cm.
Επομένως, ο όγκος του κύβου είναι: $(4\ cm)^3 = 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 4\ cm = 64\ cm^3$

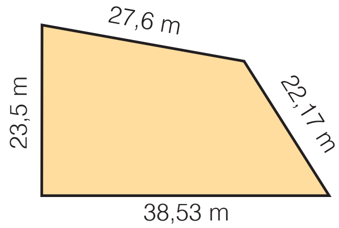
3. *Μια αμαξοστοιχία διανύει την απόσταση Αθήνας - Πύργου σε 4 ώρες και 57 λεπτά. Αν η αμαξοστοιχία ξεκινά από την Αθήνα στις 9:10 π.μ. το πρωί, ποια ώρα θα φτάσει στον Πύργο;*

Λύση

Η αμαξοστοιχία θα φτάσει στις 9h 10min + 4h 57min = 13h 67min = 14h 7min, δηλαδή, θα φτάσει στον Πύργο στις 2:07 μ.μ., μετά το μεσημέρι.

4. Να βρεθεί η περίμετρος του σχήματος: (α) σε μέτρα, (β) σε εκατοστά και (γ) σε χιλιόμετρα.

Λύση



(α) Η περίμετρος σε μέτρα είναι ίση με το άθροισμα των μηκών των πλευρών του, δηλαδή:
$26,6\ m + 23,5\ m + 22,17\ m + 38,53\ m = 111,8\ m$.

(β) Είναι: $111,8\ m = 111,8\ m \cdot 0,001 = 0,1118\ Km$

(γ) Επίσης, είναι: $111,8\ m \cdot 100 = 11180\ cm$

5. Μια δεξαμενή νερού τρύπησε και χύνονται 2 σταγόνες κάθε δευτερόλεπτο. Αν οι 25 σταγόνες έχουν μάζα 1,5 g, να βρεθεί η μάζα του νερού που χάνεται κάθε ώρα, σε κιλά.

Λύση

Κάθε δευτερόλεπτο χύνονται 2 σταγόνες νερού, άρα σε $1h = 3.600s$ θα χυθούν: $3.600 \cdot 2 = 7.200$ σταγόνες νερού.
Αυτές θα έχουν μάζα: $(7.200 : 25) \cdot 1,5\ g = 288 \cdot 1,5\ g = 432\ g = 0,432\ Kg$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συμπληρώσεις τα κενά: (α) 23 dm = ...cm, (β) 3,1 m = ...Km, (γ) 45,83 cm = ...m, (δ) 67,2 Km = ...mm, (ε) 95,5 mm = ...cm.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ακμές μήκους α=3,1 m, β=4,2 m και γ=2,3 m. Να υπολογίσεις το μήκος των ακμών του σε mm και να το γράψεις σε τυποποιημένη μορφή.

3. Γράψε τα παρακάτω μήκη σε αύξουσα σειρά: 986 m, 0,023 Km, 456 cm, 678 dm.

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις πλευρών α=23 cm και β=45 cm. Να βρεις το εμβαδόν του, σε cm^2 και σε mm^2.

5. Συμπλήρωσε τα κενά:
(α) 56 Km^2=.......m^2, (β) 0,987 στρέμματα=.......m^2, (γ) 350 στρέμματα=.......m^2.

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 210 m. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σε m^2 και σε στρέμματα.

7. Μια αυλή, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, έχει διαστάσεις 5 m και 7,2 m. Θέλουμε να τη στρώσουμε, με τετράγωνες πλάκες, πλευράς 40 cm.Πόσες πλάκες θα χρειαστούμε;

8. Ο όγκος ενός στερεού είναι 15 dm^3 29 cm^3. Να βρεις τον όγκο του στερεού σε cm^3, m^3 και mm^3.

9. Ένας οινοπαραγωγός έχει αποθηκεύσει το κρασί του σε 3 ίσες δεξαμενές, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με διαστάσεις 3 m, 2 m και 5 m.
Αν πουλήσει το κρασί του προς 4€ το λίτρο, πόσα χρήματα θα εισπράξει;

10. Να υπολογίσεις τον χρόνο, από τις 8h 10min το πρωί, ως τις 5h 20min το απόγευμα.

11. Συμπλήρωσε τα κενά: (α) 4h 52min=.......min=.......s, (β) 3h 12min=......min=.......s, (γ) 5h 20min 30s=.......min=.......s, (δ) 56min 45s=.......min=.......s.

12. Να υπολογίσεις: (α) το $\frac{1}{10}$ της ώρας, (β) το $\frac{1}{5}$ της ώρας, (γ) το $\frac{1}{6}$ της ώρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

13. Διαθέτουμε σταθμά των 50 g, 500 g και δύο σταθμά του 1 Kg. Πώς θα ζυγίσουμε ένα βάρος (α) 3 Kg και 600 g και (β) 2 Kg και 450 g.

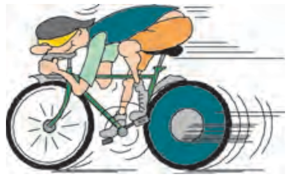
14. Πώς θα ζυγίσουμε (α) ένα σώμα μάζας 5 Kg, με σταθμά των 9 Kg, 3 Kg και 1 Kg (β) ένα σώμα μάζας 3 Kg, με σταθμά 10 Kg, 5 Kg και 1 Kg.

15. Διαθέτουμε τρία δοχεία που χωράνε 2 lt, 0,5 lt και 0,1 lt. Πώς θα μετρήσουμε ένα υγρό, όγκου (α) 5 lt, (β) 2,8 lt, (γ) 2,4 lt.

16. Σε μια πολυκατοικία θέλουν να κατασκευάσουν μια δεξαμενή που να χωράει 3 t πετρέλαιο και να έχει μήκος 2,5 m και πλάτος 1 m. Αν γνωρίζεις ότι ο 1 t πετρελαίου έχει όγκο 1200 lt, υπολόγισε το ύψος της δεξαμενής και πόσα lt πετρελαίου αντιστοιχούν σε κάθε cm ύψους;

17. Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος 1,2 m και βάση τετράγωνο πλευράς 80 cm. Μια αντλία αδειάζει από την δεξαμενή 8 lt το λεπτό.
Να βρεθεί: (α) σε πόσο χρόνο η στάθμη του νερού θα κατέβει κατά 10 cm, (β) σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή και (γ) πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού σε μισή ώρα.

18. Ένας ποδηλάτης διήνυσε μια απόσταση σε χρόνο 1h 15 min, ενώ ένας δεύτερος διήνυσε την ίδια απόσταση σε χρόνο 1h 45min. (α) Ποιο μέρος του χρόνου του δεύτερου είναι ο χρόνος του πρώτου ποδηλάτη; (β) Ποιο μέρος του χρόνου του πρώτου είναι ο χρόνος του δεύτερου ποδηλάτη; Τι παρατηρείς;



Σε περιπτώσεις που οι αποστάσεις που μετράμε είναι πολύ μεγάλες, χρησιμοποιούμε ειδικές μονάδες όπως:
- Την αστρονομική μονάδα (U.A.), που είναι η απόσταση Γης Ήλιου και ισούται με 149.600.000 Km.
- Το έτος φωτός (ε.φ.) που είναι η απόσταση που διανύει το φως, σε ένα έτος και ισούται με 9.461.000.000.000 Km.

Σε περιπτώσεις που οι αποστάσεις που μετράμε είναι πολύ μικρές (βακτηρίδια, μικρόβια, μόρια, άτομα κ.λπ.) χρησιμοποιούμε ειδικές μονάδες, όπως:
- Το μικρόμετρο (μm) που ισούται με 0,001 mm
- Το νανόμετρο (nm) που ισούται με 0,000 001 mm
- Το Angström (Å) που ισούται με 0,000 000 1 mm

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο άνθρωπος από τα πρώτα του βήματα, φαίνεται να αναζήτησε τρόπους σύγκρισης μεγεθών όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, ο χρόνος και το βάρος ή η μάζα των διαφόρων αντικειμένων που χρησιμοποιούσε, αντάλλασσε, εμπορευόταν κ.λπ.
Οι ανθρώπινες επιλογές για τον καθορισμό των "μέτρων και σταθμών" είχαν ανέκαθεν και κοινωνικό, πολιτιστικό, οικονομικό, ιστορικό, επιστημονικό αλλά και πολιτικό χαρακτήρα.

- ► Προσπάθησε να βρεις και να καταγράψεις (σε έναν σχετικό πίνακα) τα "μέτρα και σταθμά" για τα βασικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια, όγκος, χρόνος και βάρος) που χρησιμοποιήθηκαν από το 3000 π.Χ. μέχρι σήμερα, από διάφορους λαούς (Αιγύπτιους, Βαβυλώνιους, Ινδούς, Κινέζους, Αρχαίους Έλληνες, Ρωμαίους, Άγγλους, Γάλλους, Ολλανδούς, Αμερικάνους, Ευρωπαίους και Νεοέλληνες), τα οποία διατηρήθηκαν για μεγάλο χρονικό διάστημα, ώστε να είναι άξια λόγου για να αναφερθούν.
- ► Πότε, με ποιο τρόπο, για ποιο λόγο και από ποιούς έγιναν προσπάθειες να επικρατήσει ένα διεθνές σύστημα μέτρησης μεγεθών; Γιατί απέτυχαν μερικές προσπάθειες από αυτές;
- ► Πόσο ρόλο έπαιξε στις τελικές επιλογές για τα "μέτρα και σταθμά" των βασικών μεγεθών, ο επιστημονικός παράγοντας;
- ► Ποια είναι η κατάσταση που επικρατεί σήμερα διεθνώς, για τα "μέτρα και σταθμά" των βασικών μεγεθών;

Ανακεφαλαίωση

Δεκαδικοί Αριθμοί

Ορισμοί

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρανομαστή μια δύναμη του 10 και μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του. Κάθε δεκαδικός αριθμός διακρίνεται σε **ακέραιο μέρος** και **δεκαδικό μέρος**, που διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή $α \cdot 10^ν$, δηλαδή, ως γινόμενο ενός αριθμού **α** επί μία δύναμη του **10**. Ο αριθμός **α** είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του **1** και μικρότερο του **10**. Τη μορφή αυτή ονομάζουμε **τυποποιημένη**.

Πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών

Η **Πρόσθεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο, έτσι ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και προσθέτουμε τα ψηφία της ίδιας τάξης.

Η **Αφαίρεση** δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και στους φυσικούς αριθμούς. Τοποθετούμε τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο, έτσι ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη και αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας στήλης.

Ο **Πολλαπλασιασμός** δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και των φυσικών αριθμών. Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

Η **Διαίρεση** γίνεται όπως και η ευκλείδεια διαίρεση. Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτη και τον διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι ώστε να γίνουν και οι δύο φυσικοί αριθμοί.
Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου, "κατεβάζουμε" το **μηδέν** ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Όταν πολλαπλασιάζουμε με ***0,1***, ***0,01***, ***0,001***, ... ή όταν διαιρούμε με ***10***, ***100***, ***1000***, ..., έναν δεκαδικό αριθμό μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά μία, δύο, τρεις** .... αντίστοιχα θέσεις.

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με ***10***, ***100***, ***1000***, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα **δεξιά μία, δύο, τρεις**, ... θέσεις, αντίστοιχα.

Οι **Δυνάμεις** των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων, που έχει το αποτέλεσμα, προκύπτει από το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης, επί τον εκθέτη της δύναμης.

Προτεραιότητα Πράξεων

Δυνάμεις — Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις — Προσθέσεις και Αφαιρέσεις
Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά.

Μονάδες Μέτρησης

		Υποδιαιρέσεις	Πολλαπλάσια
Μήκους:	το μέτρο (1m)	$=10dm=10^2cm=10^3mm$	$1km=10^3m$
Επιφάνειας:	το τετραγωνικό μέτρο ($1m^2$)	$=10^2dm^2=10^4cm^2=10^6mm^2$	1στρέμμα$=10^3m^2$
Όγκου:	το κυβικό μέτρο ($1m^3$)	$=10^3dm^3=10^6cm^3=10^9mm^3$	$1lt=0,001m^3$
Χρόνου:	το δευτερόλεπτο (1s)		1min=60s, 1h=3.600s
Μάζας:	το χιλιόγραμμο (1Kg)	$=10^3gr=10^6mg$	$1t=10^3Kg$

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση — ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. *Αν διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με το 4, το κλάσμα γίνεται 4 φορές μικρότερο.*
2. *Αν* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}$ *τότε* $\alpha = \gamma$.
3. $1 : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.
4. *Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι* $\frac{3}{4}$.

5. *Όταν διαιρέσουμε τον παρονομαστή του* $\frac{5}{8}$ *με το 2 το κλάσμα διπλασιάζεται.*
6. *Όταν πολλαπλασιάσουμε το* $\frac{7}{9}$ *με το 3 το κλάσμα που προκύπτει είναι τρεις φορές μικρότερο του αρχικού.*
7. *Το κλάσμα* $\frac{1\,{}^{5}\!/8}{3}$ *είναι ίσο με* $\frac{5}{40}$.
8. *Το γινόμενο των* $\frac{2}{3}$ *και* $\frac{3}{4}$ *ισούται με* $\frac{1}{2}$.
9. *Αν* $\alpha < \beta$ *τότε* $\frac{\alpha}{\beta + 1}$ *μεγαλύτερο του 1 .*
10. $\frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = \frac{35}{56} = \frac{1250}{2000} = 0,625$.
11. $2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{45}{1000} = 2,175$.
12. *Οι αριθμοί 7,2 και* $\frac{5}{36}$ *είναι αντίστροφοι.*
13. *Ο αριθμός* $\frac{5,2}{7}$ *είναι δεκαδικό κλάσμα.*
14. $\frac{149}{231} > \frac{220}{452}$.
15. $\frac{1050}{3100} > \frac{2593}{4650}$.
16. $\frac{3,4}{7,3} = 0,4659$.
17. $\frac{1,028}{1,2} = 0,856666...$.
18. $\frac{34,5}{5,7} = 5,7$.
19. $\frac{1,25}{1,85} = 0,675675675...$.
20. $\frac{0,69}{4,6} = 0,15$.
21. *Αν* $\frac{x}{3} = 7$ *το x είναι ο αριθμός 23.*

ΜΕΡΟΣ Α΄

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Εξισώσεις και προβλήματα

4.1. Η έννοια της εξίσωσης - Οι εξισώσεις: $α+x=β$, $x–α=β$, $α–x=β$, $α·x=β$, $α:x=β$ και $x:α=β$

- *Κατανοώ την έννοια της εξίσωσης*
- *Ελέγχω αν κάποιος αριθμός είναι λύση εξίσωσης*
- *Λύνω με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων εξισώσεις της μορφής: $α+x=β$, $x–α=β$, $α–x=β$, $α·x=β$, $α:x=β$ και $x:α=β$*

4.2. Επίλυση προβλημάτων

- *Λύνω προβλήματα τεσσάρων πράξεων*

4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

- *Λύνω απλά προβλήματα με τη βοήθεια των εξισώσεων των παραπάνω μορφών*

ΑΡΧΥΤΑΣ Ο ΤΑΡΑΝΤΙΝΟΣ
(428 - 365 π.Χ.)

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης
Οι εξισώσεις: α+x=β, x–α=β, α–x=β, αx=β, α:x=β και x:α=β

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Προσπάθησε να μεταφράσεις τις παρακάτω προτάσεις, με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων.

- *ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού*
- *ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού*
- *ένας άρτιος φυσικός αριθμός*
- *ένας περιττός φυσικός αριθμός*
- *τα πολλαπλάσια του 3*
- *το διπλάσιο ενός αριθμού*
- *ένας αριθμός αυξάνεται κατά 8*
- *ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 4*
- *το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει 22*
- *αν σε έναν αριθμό προσθέσουμε 5, το άθροισμα γίνεται 8*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Γράψε συντομότερα τις εκφράσεις:
(α) $x+x+x+x$, (β) $\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta$, (γ) $3\cdot\alpha+5\cdot\alpha$, (δ) $18\cdot x+7\cdot x+4\cdot x$, (ε) $15\cdot\beta-9\cdot\beta$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Μια ζυγαριά ισορροπεί, όταν βάλουμε από το ένα μέρος μια σοκολάτα, της οποίας δεν γνωρίζουμε το βάρος και στο άλλο μέρος 100 g και μισή σοκολάτα.

➢ *Μπορείς να βρεις μια ισότητα που να περιγράφει αυτή την ισορροπία;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Να αντικαταστήσεις το x, με τους αριθμούς 1, 3, 4, 5, 6 και 11, σε κάθε ισότητα της πρώτης στήλης, του παρακάτω πίνακα. Βρες ποιος από αυτούς την επαληθεύει και ποιος όχι.

➢ *Συμπλήρωσε τις δύο άλλες στήλες του πίνακα, σύμφωνα με τα συμπεράσματά σου.*
➢ *Μπορείς, με τη βοήθεια του ορισμού των πράξεων, να φθάσεις στα ίδια αποτελέσματα;*

Εξίσωση	Αριθμοί που την επαληθεύουν	Αριθμοί που δεν την επαληθεύουν
$x - 4 = 1$		
$5 - x = 4$		
$2x = 8$		
$\frac{6}{x} = 2$		
$\frac{x}{2} = 3$		
$x + 7 = 30$		

Στην ισότητα $2 \cdot 6 = 12$ το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιβεβαιώσουμε ότι είναι σωστή. Η ισότητα όμως $2 \cdot x = 12$ δεν είναι η ίδια. Αυτό το x που περιέχει "κρύβει" έναν αριθμό που αν τον βάλουμε στη θέση του, "επαληθεύει" αυτή την ισότητα. Αν βάλουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή στη θέση του x, η ισότητα $2 \cdot x = 12$ δεν ισχύει. Γι' αυτό τη σχέση δεν τη λέμε ισότητα, αλλά **εξίσωση**. Και ο x είναι ο **άγνωστος** αυτής της σχέσης. Όταν εμφανίζεται αυτός ο περίφημος **άγνωστος x**, ακολουθεί κι ένα **πρόβλημα**. Τώρα, η σχέση η δική μας με τέτοιου είδους "σχέσεις" δεν θα είναι καθόλου προβληματικές αν προσέξουμε καλά όσα ακολουθούν.

Μαθαίνουμε

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις με τη βοήθεια αριθμών και γραμμάτων, ενώ για να λύσουμε ορισμένα προβλήματα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια ισότητα με γράμματα και αριθμούς. Τέτοιες ισότητες τις λέμε εξισώσεις.

- **Εξίσωση με έναν άγνωστο** είναι μία ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος).

Οι ισότητες:
$x + 5 = 12$, $y - 2 = 3$, $10 - z = 1$
$w : 5 = 4$, $7 \cdot \varphi = 14$, $24 : \psi = 6$
είναι εξισώσεις

- **Λύση ή ρίζα της εξίσωσης** είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης
$x - 7 = 5$ είναι ο αριθμός 12 διότι
$12 - 7 = 5$
Τη λύση τη γράφουμε: $x=12$

- Η διαδικασία, μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση της εξίσωσης.**

Τον άγνωστο μιας εξίσωσης τον συμβολίζουμε με ένα γράμμα π.χ. x, y, z, w, φ, ψ κ.λπ.

- Μια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα ή αόριστη**, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Οι εξισώσεις:
$x = x$ ή $0 \cdot z = 0$
είναι αόριστες ή ταυτότητες

- Μια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

Οι εξισώσεις:
$x + 2 = x + 6$ ή $0 \cdot w = 5$
είναι αδύνατες

- Βάσει των ορισμών των πράξεων

η εξίσωση:	$x+\alpha=\beta$	έχει λύση την	$x=\beta-\alpha$	Η εξίσωση:	$x + 5 = 12$	έχει λύση την	$x=12-5$ ή $x=7$
-//-	$x-\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta+\alpha$	-//-	$y - 2 = 3$	-//-	$y=3+2$ ή $y=5$
-//-	$\alpha-x=\beta$	-//-	$x=\alpha-\beta$	-//-	$10 - z = 1$	-//-	$z=10-1$ ή $z=9$
-//-	$\alpha \cdot x=\beta$	-//-	$x=\beta:\alpha$	-//-	$7 \cdot \varphi = 14$	-//-	$\varphi=14:7$ ή $\varphi=2$
-//-	$x:\alpha=\beta$	-//-	$x=\beta \cdot \alpha$	-//-	$w : 5 = 4$	-//-	$w=4 \cdot 5$ ή $w=20$
-//-	$\alpha:x=\beta$	-//-	$x=\alpha:\beta$	-//-	$24 : \psi = 6$	-//-	$\psi=24:6$ ή $\psi=4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μια δεξαμενή χωρητικότητας $6m^3$ που έχει μήκος 1,5m και πλάτος 2m, έχει ύψος (α) 1,5m ή (β) 3m ή (γ) 2m;

Λύση

Αν συμβολίσουμε με x το ύψος της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα ισούται με: $V=1,5 \cdot 2 \cdot x$. Όμως γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής είναι $6m^3$, άρα $3x=6$. (Δεν γράφουμε τις μονάδες στις εξισώσεις, αλλά πρέπει να γνωρίζουμε ποιες μονάδες χρησιμοποιούμε). Επομένως, **$x=6:3$**, δηλαδή **$x=2$ m**.
Συνεπώς το σωστό ύψος της δεξαμενής είναι τα **2 m**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αντιστοίχισε τις προτάσεις των γραμμών του πρώτου πίνακα με τις εκφράσεις αριθμών και γραμμάτων των γραμμών στον δεύτερο πίνακα.

το τριπλάσιο ενός αριθμού	$x - y > 20$
το δεκαπλάσιο ενός αριθμού	$x \cdot y = 32$
ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12	$3 \cdot x$
ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5	$x + 12$
η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20	$10 \cdot x$
το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32	$x - 5$

2. Διατύπωσε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:
(α) $3 \cdot x + 25$, (β) $(\frac{1}{2}) \cdot x - 7 = 2$, (γ) $α - 2 \cdot β$, (δ) $4 \cdot κ + 7 \cdot κ = 88$

3. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι α. Πόση είναι η περίμετρός του και πόσο το εμβαδόν του;

4. Γράψε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις: (α) $x+x$, (β) $α+α+α$, (γ) $3 \cdot α+52 \cdot α$, (δ) $2 \cdot β+β+3 \cdot α+2 \cdot α$, (ε) $4 \cdot x+8 \cdot x-3 \cdot x$, (στ) $7 \cdot ω+4 \cdot ω-10 \cdot ω$

5. Αν $x \cdot y = \frac{2}{9}$ και $z = \frac{3}{5}$, να βρεθεί το $x \cdot (y \cdot z)$.

6. Στην εξίσωση $2 + α = x$, το α και το x είναι φυσικοί αριθμοί. Ποια από τις τιμές 0, 3, 1 μπορεί να πάρει το x;

7. Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι η λύση της εξίσωσης: $x + 13 = 25$

8. Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση εκείνη που ο αριθμός επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$x - 2 = 4$								
$1 + y = 4$								
$18 - ω = 10$								
$2 - α = 1$								
$93 - β = 86$								

9. Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;
(α) $x + 4{,}9 = 15{,}83$ (β) $40{,}4 + x = 93{,}19$ (γ) $53{,}404 - x = 4{,}19$ (δ) $38 - x = 7{,}1$.

10. Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει; (α) $\frac{3}{x} = \frac{12}{20}$, (β) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$, (γ) $\frac{35}{40} = \frac{x}{8}$, (δ) $\frac{49}{5} = x + \frac{4}{5}$.

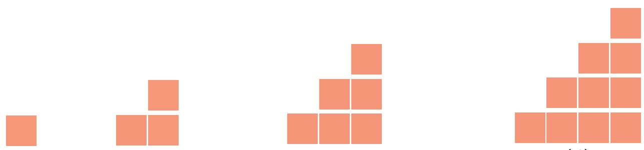
11. Βρες την τιμή του φυσικού αριθμού x: (α) $\frac{x+3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$, (β) $\frac{5}{8} + \frac{x}{16} = \frac{3}{4}$, (γ) $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{10} = 1$.

12. Λύσε τις εξισώσεις: (α) $v+3=4$, (β) $x - 2=8$, (γ) $t+4+1=3+19$, (δ) $6 - x=5$.

13. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσεις στον 4, για να προκύψει ο αντίστροφος του $\frac{5}{21}$;

14. Σε έναν αριθμό προσθέτουμε 5 και παίρνουμε άθροισμα 313. Ποιος είναι ο αριθμός;

15. Τα τετράγωνα που αποτελούν τους "δομικούς λίθους" με τους οποίους κατασκευάζουμε τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm.
(α) Βρες την περίμετρο του πέμπτου σχήματος και εξήγησε πώς έφτασες στην απάντησή σου.
(β) Γράψε ένα τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος.
(γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm;



(1) (2) (3) (4) …

Α.4.2. Επίλυση προβλημάτων

Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

Πότε, στη ζωή μας, λέμε ότι έχουμε "πρόβλημα";
Τι επιδιώκουμε να πετύχουμε όταν λέμε ότι: "λύνουμε ένα πρόβλημα";
Τι εννοούμε όταν λέμε ότι θέλουμε να βρούμε μία "λύση του προβλήματος";
Όλα τα προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια των Μαθηματικών;
Ποιες είναι οι αναγκαίες ενέργειες που πρέπει να κάνουμε για να καταφέρουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ένα κατάστημα για να προσελκύσει πελατεία ανακοινώνει ότι ο πελάτης που θα αγοράσει τρία ίδια πακέτα προσφοράς ενός συγκεκριμένου προϊόντος θα έχει έκπτωση 5€. Αν και τα τρία πακέτα κοστίζουν, με την έκπτωση, συνολικά 85€, ποιά είναι η αρχική αξία του κάθε πακέτου;*

Λύση

Έστω x η αρχική αξία του κάθε πακέτου. Τότε τα τρία πακέτα κοστίζουν $3\cdot x$ και ο πελάτης που θα τα αγοράσει θα πληρώσει $3\cdot x-5$ ή 85€, δηλαδή είναι: $3\cdot x-5=85$ ή $3\cdot x=85+5$ ή $3\cdot x=90$ ή $x=90:3$ ή $x=30$. Άρα η αρχική αξία κάθε πακέτου είναι 30€.

2. *Να περιγράψεις κάποιο πρόβλημα, που να λύνεται με τη βοήθεια της εξίσωσης: $2x+800=1000$.*

Λύση

Για παράδειγμα τα δύο παρακάτω προβλήματα περιγράφονται από την εξίσωση αυτή.

- Με τι ισούται η μία πλευρά του ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 1000 m και του οποίου η άλλη πλευρά είναι 400 m;
- Πόσο ζυγίζει καθένα από τα δύο κιβώτια, με τα οποία είναι φορτωμένο ένα αυτοκίνητο, που έχει βάρος 800 kg, όταν η πλάστιγγα που ανέβηκε δείχνει 1000 kg;

➢ *Προσπάθησε να διατυπώσεις και άλλα προβλήματα που λύνονται με την παραπάνω εξίσωση.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Πρόβλημα** ονομάζουμε την κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.
- **Λύση** ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.
- **Επίλυση** ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία, με την οποία επιτυγχάνεται η λύση του.

Για τη λύση των προβλημάτων, με τη βοήθεια των εξισώσεων, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- ► **Προσδιορίζουμε** το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με ένα γράμμα (**x** ή **y** ή **z** ή **ω** κ.τ.λ.), που είναι ο **"άγνωστος"** του προβλήματος.
- ► **Εκφράζουμε** στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια του αγνώστου.
- ► **Περιγράφουμε** με μία εξίσωση το πρόβλημα.
- ► **Επιλύουμε** την εξίσωση του προβλήματος.
- ► **Επαληθεύουμε** τη λύση που βρήκαμε.

Όμως, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι:

- ◆ υπάρχουν και προβλήματα που δεν λύνονται με εξισώσεις και
- ◆ υπάρχουν και άλυτα προβλήματα ή προβλήματα των οποίων δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση.

Α.4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Η Χριστίνα ξόδεψε τα μισά της χρήματα για να αγοράσει 2 τετράδια και μαρκαδόρους. Αν είναι γνωστό, ότι κάθε τετράδιο στοιχίζει 1 € και όλοι οι μαρκαδόροι 3 €, ποιο είναι το ποσό των χρημάτων που είχε η Χριστίνα πριν από τις αγορές αυτές;*

Λύση

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι το ποσό των χρημάτων που είχε η Χριστίνα, δηλαδή ο άγνωστος **x** του προβλήματος.

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί απλούστερα με την εξίσωση:

"τα χρήματα που ξοδεύτηκαν" = "τα χρήματα που κόστισαν οι αγορές".

ή "τα μισά χρήματα της Χριστίνας"="το κόστος τετραδίων"+"κόστος μαρκαδόρων".

ή $x : 2 = 2 \cdot 1 + 3$

ή $x : 2 = 2 + 3$

ή $x : 2 = 5$

ή $x = 5 \cdot 2$

ή $x = 10$

Επαλήθευση:

Τα μισά των 10 € είναι 5 € και τα έξοδα είναι $2 \cdot 1$ € $+ 3$ € $= 5$ €

2. *Η δεξαμενή της κοινότητας χωράει 3.000 m^3 νερό. Κάθε μέρα ξοδεύονται 300 m^3 από τα νοικοκυριά και άλλα 200 m^3 από τις βιοτεχνίες. Για τη συντήρηση του δικτύου, σταμάτησε η παροχή νερού προς τη δεξαμενή. Τέσσερις ημέρες μετά την έναρξη των εργασιών αποφασίζεται να ξοδεύονται μόνο 400 m^3 συνολικά κάθε ημέρα. Πόσες ημέρες ακόμη πρέπει να κρατήσουν τα έργα συντήρησης, ώστε να μη μείνουν χωρίς νερό οι κάτοικοι της κοινότητας;*

Λύση

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι το επιπλέον πλήθος των ημερών συντήρησης του δικτύου, δηλαδή ο άγνωστος x του προβλήματος.

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί με την εξίσωση:

"ποσό νερού που καταναλώνεται" = "ποσό νερού δεξαμενής" ή αναλυτικότερα:

"ποσό νερού που καταναλώνεται στις τέσσερις ημέρες της συντήρησης" + "ποσό νερού που καταναλώνεται στις επιπλέον ημέρες συντήρησης" = "ποσό νερού δεξαμενής".

ή $(300+200) \cdot 4 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $500 \cdot 4 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $2.000 + 400 \cdot x = 3.000$

ή $400 \cdot x = 3.000 - 2.000$

ή $400 \cdot x = 1.000$

ή $x = 1.000 : 400$

ή $x = 2{,}5$ ημέρες

Επαλήθευση: $2{,}5 \cdot 400 + 4 \cdot (200+300) = 3.000$ ή $1.000 + 2.000 = 3.000$ ή $3.000 = 3.000$.

3. *Ένας εργάτης για μια εργασία πέντε ημερών συμφώνησε να πάρει προκαταβολή το μισό της αμοιβής του και το υπόλοιπο αυτής να το πληρωθεί όταν τελειώσει η εργασία. Αν η προκαταβολή ήταν 180€, ποιό ήταν το μεροκάματό του;*

Λύση

Έστω ότι είναι x το μεροκάματο του εργάτη. Τότε η αμοιβή του εργάτη για την πενθήμερη εργασία θα είναι $5 \cdot x$ και το μισό αυτής θα είναι $\frac{5 \cdot x}{2}$.

Συνεπώς η εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα θα είναι:

$$\frac{5 \cdot x}{2} = 180 \text{ ή } \frac{5}{2} \cdot x = 180 \text{ ή } x = 180 : \frac{5}{2} \text{ ή } x = 180 \cdot \frac{2}{5} \text{ ή } x = \frac{360}{5} \text{ ή } x = 72€.$$

4. *Μετά τη συνεδρίαση και τα 10 μέλη του διοικητικού συμβουλίου μιας εταιρείας ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψίες. Πόσες χειραψίες γίνονται συνολικά;*

Λύση

1ος τρόπος: Αν υποθέσουμε ότι φεύγει ένας - ένας και χαιρετάει τους υπόλοιπους θα έχουμε ότι:

Ο πρώτος θα ανταλλάξει, συνολικά, **9** χειραψίες. Ο δεύτερος **8**, ο τρίτος **7**, ο τέταρτος **6**, ο πέμπτος **5**, ο έκτος **4**, ο έβδομος **3**, ο όγδοος **2**, ο ένατος **1** και ο δέκατος καμία.
Επομένως, ο συνολικός αριθμός θα είναι:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$$

Άρα, η λύση είναι ότι θα γίνουν συνολικά **45** χειραψίες.

2ος τρόπος: Γνωρίζουμε ότι ο καθένας κάνει χειραψία με τους υπόλοιπους.
Επομένως, αφού όλοι είναι **10**, ο καθένας θα κάνει $10 - 1 = 9$ χειραψίες.
Άρα συνολικά θα γίνουν **10** φορές επί **9**, δηλαδή $10 \cdot 9 = 90$ χειραψίες.
Όμως, μεταξύ δύο ανθρώπων η χειραψία είναι μία και εμείς τη μετρήσαμε διπλή (μία για καθένα από τους δύο).
Επομένως, αυτές που έγιναν συνολικά θα είναι οι μισές, δηλαδή $90 : 2 = 45$.

Ο **Διόφαντος** *(μέσα του 3ου αιώνα μ.Χ.), στην εισαγωγή των "Αριθμητικών" του, ονομάζει τον άγνωστο με τη λέξη "αριθμός" και τον συμβολίζει με το σύμβολο "ς".*

Αργότερα ο **Βιετ** *(1540 - 1603) χρησιμοποιεί τα κεφαλαία φωνήεντα* **A, E, I, O, U, Y** *για να υποδηλώσει τον* **άγνωστο** *και τα σύμφωνα* **B, D, G** *κ.λπ. για τα* **γνωστά μεγέθη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η διαφορά της ηλικίας της κόρης από τη μητέρα της είναι 25 χρόνια. Αν η κόρη είναι 18 ετών, πόσων ετών είναι η μητέρα;

2. Πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{7}{10}$ των μαθητών ενός σχολείου, αν τα $\frac{2}{8}$ των μαθητών, αυτού του σχολείου, είναι 60 μαθητές;

3. Να βρεις τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 1533.

4. Βρες το ψηφίο που λείπει από τον αριθμό 75□3, ώστε αυτός να διαιρείται με το 9.

5. Σε ένα διαγώνισμα, κάθε μαθητής πρέπει να απαντήσει σε 100 ερωτήσεις. Θα πάρει 3 μονάδες, για κάθε σωστή απάντηση και μόνο 1 μονάδα, για κάθε λανθασμένη. Ένας μαθητής πήρε συνολικά 220 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

6. Η ηλικία ενός πατέρα είναι τετραπλάσια από την ηλικία του γιου του. Οι δύο ηλικίες μαζί συμπληρώνουν μισό αιώνα. Πόσο χρονών είναι ο καθένας;

7. Τρία αδέλφια μοιράζονται, εξίσου, μια κληρονομιά, που είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα. Ο πρώτος παίρνει το χωράφι. Ο δεύτερος παίρνει το διαμέρισμα, αλλά δίνει στον πρώτο 600 € και στον τρίτο 15.000 €. Ποια ήταν η αξία του χωραφιού και ποια του διαμερίσματος;

8. Σε κάθε μία από τις πράξεις (α) και (β) τα γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία. Αντικατέστησε τα γράμματα Α, Β, Γ και Δ με τα κατάλληλα ψηφία.

(α) $\begin{array}{r} AB \\ +\ 47 \\ \hline 73 \end{array}$ (β) $\begin{array}{r} \Gamma\Delta \\ -8 \\ \hline \Delta 5 \end{array}$

9. Από μία ποσότητα κρασιού, αφαιρούμε 18 lt. Η υπόλοιπη ποσότητα χωράει σε δοχεία των 7 lt. Αν γνωρίζεις ότι η αρχική ποσότητα είναι μικρότερη από 100 lt και μεγαλύτερη από 90 lt, πόσα lt είναι η ποσότητα αυτή; Πόσα δοχεία θα χρησιμοποιήσουμε;

10. Ένας παραγωγός έφτιαξε 100 lt ξύδι και θέλει να το συσκευάσει σε μπουκάλια που χωράνε 0,75 lt. Να βρεις: (α) Πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί. (β) Πόσα lt θα του περισσέψουν.

11. Δύο συνεργεία καθαρισμού ακτών καθαρίζουν μία μεγάλη παραλία μήκους $18\frac{3}{4}$ Km. Το πρώτο συνεργείο καθαρίζει $3\frac{1}{2}$ Km και το δεύτερο συνεργείο $2\frac{3}{4}$ Km, κάθε μέρα. Τα δύο συνεργεία εργάζονται, στα δύο άκρα της παραλίας, έως ότου συναντηθούν. Σε πόσες ημέρες θα έχουν ολοκληρώσει τον καθαρισμό της παραλίας;

12. Ένα κατάστημα προσφέρει τους υπολογιστές με έκπτωση 20%. Ο Γιώργος πήγε με τον πατέρα του και αγόρασε έναν υπολογιστή και ένα κινητό τηλέφωνο αξίας 230€ και πλήρωσαν συνολικά 1.070€. Ποια ήταν η αρχική αξία του υπολογιστή;

13. Αυτή τη χρονιά η ηλικία ενός ανθρώπου είναι πολλαπλάσιο του 7 και την επόμενη χρονιά είναι πολλαπλάσιο του 9. Αν γνωρίζουμε ότι δεν είναι αιωνόβιος ποιά είναι η ηλικία του;

ΜΕΡΟΣ Α'

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

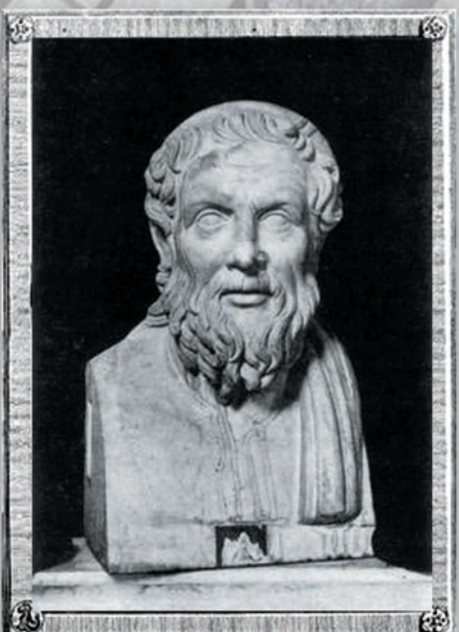
Ποσοστά

5.1. Ποσοστά

- *Κατανοώ την έννοια των ποσοστών και διαπιστώνω τη χρησιμότητά τους στις εφαρμογές*
- *Γράφω ένα δεκαδικό κλάσμα ως ποσοστό και αντιστρόφως*

5.2. Προβλήματα με ποσοστά

- *Λύνω προβλήματα με ποσοστά*
- *Παριστάνω ποσοστά με διαγράμματα*



ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΠΕΡΓΑΙΟΣ
(265 - 170 π.Χ.)

Α.5.1. Ποσοστά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε πολλές περιπτώσεις της καθημερινής μας ζωής ακούμε εκφράσεις όπως:

- *Πήρε αύξηση 14%.*
- *Οι γεννήσεις μειώνονται, κατά 12%, το χρόνο.*
- *Με συστηματική προπόνηση, ένας δρομέας αύξησε την απόδοσή του κατά 20%.*
- *Ένα μαγαζί έκανε εκπτώσεις 60%.*
- *Η ευρύτερη περιοχή της Αθήνας καταλαμβάνει το 3% της έκτασης της Ελλάδας και εκεί κατοικεί το 45% του πληθυσμού της Ελλάδας.*
- *Το 40% των υποψηφίων έγραψαν πολύ καλά και το 35% κάτω από τη βάση.*
- *Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) 19%.*
- *Ειδικός Φόρος Κατανάλωσης 5%.*
- *Παρακράτηση φόρου 22%.*
- *Επιτόκιο Καταθέσεων Ταμιευτηρίου 9,5%.*
- *Το 25% του πληθυσμού έχει πάνω από 2 αυτοκίνητα.*
- *Μόνο το 4% των οικογενειών έχει πάνω από 4 παιδιά.*
- *Είναι 100% σίγουρο, ότι θα βρέξει.*
- *Η πιθανότητα να συμβεί (ένα γεγονός) είναι 1%.*

➢ *Προσπάθησε να εξηγήσεις τι ακριβώς εννοούμε κάθε φορά με αυτές τις εκφράσεις.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το σύνολο των πολιτών που ψήφισαν στα χωριά Α, Β, Γ και Δ και οι ψήφοι που πήραν οι αντίστοιχοι πρόεδροι που εκλέχτηκαν.

➢ *Βρες, ποιος από τους προέδρους που εκλέχτηκαν, είναι ο πιο δημοφιλής.*

Κοινότητα	Ψηφίσαντες	Ο πρόεδρος ψηφίστηκε από
Α	585	354
Β	3.460	1.802
Γ	456	312
Δ	1.295	823

Σκεφτόμαστε

Βρίσκουμε τα ποσοστά, με τα οποία εκλέχτηκαν οι πρόεδροι κάθε κοινότητας και παρατηρούμε ότι ο πιο δημοφιλής πρόεδρος είναι της κοινότητας Γ και μετά έρχονται στη σειρά οι πρόεδροι των κοινοτήτων Δ, Α και Β.

Α	354 : 585 = 60,51%
Β	1802 : 3.460 = 52,08%
Γ	312 : 456 = 68,42%
Δ	823 : 1.295 = 63,55%

Συμβολισμοί

Μαθαίνουμε

- Το σύμβολο **α%** ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και είναι ίσο με το $\frac{α}{100}$.
- Χρησιμοποιούμε ακόμη το ποσοστό **α ‰** που διαβάζεται **ποσοστό επί τοις χιλίοις** και είναι ίσο με το $\frac{α}{1000}$.
- **Το ποσοστό α% του β είναι $\frac{α}{100} \cdot β$**
- **Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να γραφούν, ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα παρακάτω κλάσματα:
(α) $\frac{4}{5}$, (β) $\frac{3}{8}$, (γ) $\frac{84}{91}$ με στρογγυλοποίηση στο εκατοστό.

Λύση

(α) $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{80}{100}=80\%$, (β) $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 12{,}5}{8\cdot 12{,}5}=\frac{37{,}5}{100}=37{,}5\%$, (γ) $\frac{84}{91}=0{,}92=\frac{92}{100}=92\%$.

2. Να γραφούν, ως κλάσματα, τα ακόλουθα ποσοστά: (α) 12%, (β) 73%, (γ) 32,5%.

Λύση

(α) $12\%=\frac{12}{100}=\frac{12:4}{100:4}=\frac{3}{25}$, (β) $73\%=\frac{73}{100}$, (γ) $32{,}5\%=\frac{32{,}5}{100}=\frac{325}{1000}=\frac{13}{40}$

3. Ποια θα είναι η τιμή πώλησης ενός πουλόβερ, αξίας 150€, με επιβάρυνση Φ.Π.Α. 19%;

Λύση

Γνωρίζουμε, ότι: **Τιμή πώλησης = Αξία + ΦΠΑ** Ο φόρος που αντιστοιχεί θα είναι:
Φόρος = Αξία · 19% = 150 · 19% = $150\cdot\frac{19}{100}=\frac{150\cdot 19}{100}=28{,}5$ €.
Άρα, η τιμή πώλησης θα είναι: 150 € + 28,5 € = 178,5 €.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε ως ποσοστά επί τοις εκατό, τα κλάσματα: (α) $\frac{1}{5}$, (β) $\frac{3}{2}$, (γ) $\frac{1}{4}$, (δ) $\frac{3}{4}$, (ε) $\frac{3}{5}$.

2. Να μετατρέψεις σε ποσοστά επί τοις εκατό, τους δεκαδικούς αριθμούς:
(α) 0,52 , (β) 3,41 , (γ) 0,19 , (δ) 0,03 , (ε) 0,07.

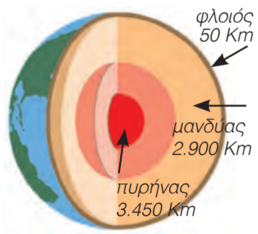
3. Να μετατρέψεις σε δεκαδικά κλάσματα τα ποσοστά: (α) 15%, (β)7%, (γ)48%, (δ) 50%. Στη συνέχεια, απλοποίησε τα δεκαδικά κλάσματα, έως ότου φτάσεις σε ανάγωγο κλάσμα.

4. Υπολόγισε: (α) το 10% των 3000 €, (β) το 45% της 1 ώρας, (γ) το 20% του λίτρου, (δ) το 50% των 500 γραμμαρίων, (ε) το 25% του 1 κιλού.

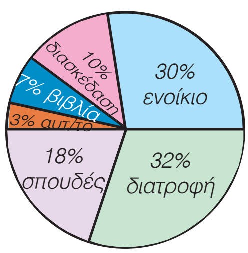
5. Βρες τι ποσοστό είναι: (α) τα 50 € για τα 1.000 €, (β) οι 30 ημέρες για 1 έτος, (γ) τα 50 στρέμματα για τα 2.500 στρέμματα, (δ) οι 3 παλάμες για τα 10 μέτρα.

6. Ένα μπουκάλι με οινόπνευμα παρέμεινε ανοικτό και εξατμίστηκε το 22% του όγκου του. Το μπουκάλι περιείχε αρχικά 0,610 lt. Πόσα lt οινοπνεύματος εξατμίστηκαν;

7. Σε ένα σημείο της γήινης σφαίρας, ο φλοιός έχει πάχος 50 Km, ο μανδύας 2.900 Km και ο πυρήνας 3.450 Km. (α) Να βρεις το μήκος της ακτίνας της Γης σε Km. (β) Να βρεις ποιο ποσοστό της ακτίνας της Γης κατέχει ο φλοιός, ο μανδύας και ο πυρήνας αντίστοιχα.



8.



Μια οικογένεια έχει μηνιαία έσοδα 1.200 €.
Το 10% των εσόδων αποταμιεύονται και τα υπόλοιπα ξοδεύονται όπως δείχνει το διπλανό κυκλικό διάγραμμα. (α) Να υπολογίσεις πόσα χρήματα ξοδεύει η οικογένεια σε κάθε κατηγορία δαπανών. (β) Τι ποσοστό μηνιαίων εσόδων της αποτελεί κάθε μία κατηγορία δαπανών;

Α.5.2. Προβλήματα με ποσοστά

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ένας ηλεκτρολόγος είχε έσοδα 2.856 € το δεύτερο τρίμηνο του έτους. Πόσα χρήματα πρέπει να αποδώσει στο κράτος, αν ο Φ.Π.Α. που παρακρατά από τους πελάτες του είναι 19%;*

Λύση

Το ποσό Φ.Π.Α. έχει παρακρατηθεί από τον ηλεκτρολόγο, αφού κάθε πελάτης του έχει επιβαρυνθεί με 19%, επί της αξίας της εργασίας του ηλεκτρολόγου.
Έτσι για εργασία 100 € ο πελάτης έχει πληρώσει 119 €, δηλαδή ο ηλεκτρολόγος σε έσοδα 119 € οφείλει στο κράτος 19 €, δηλαδή τα $\frac{19}{119}$ των εσόδων.

$$\text{Οφειλόμενος ΦΠΑ} = \text{Έσοδα} \cdot \frac{19}{119} = 2856 \cdot \frac{19}{119} = 456\ €$$

2. *Στην περίοδο των εκπτώσεων, ένα κατάστημα έκανε έκπτωση 35% στα είδη ρουχισμού και 15% στα παπούτσια. Πόσο θα πληρώσουμε για ένα πουκάμισο και ένα ζευγάρι παπούτσια που κόστιζαν 58 € και 170 €, αντίστοιχα, πριν τις εκπτώσεις.*

Λύση

Η τιμή κάθε είδους υπολογίζεται από τη σχέση:
Τιμή μετά την έκπτωση = Τιμή πριν την έκπτωση - Ποσό έκπτωσης.

Για το πουκάμισο έχουμε ποσό έκπτωσης: $35\% \cdot 58\ € = \frac{35}{100} \cdot 58\ € = 20{,}30\ €$.

Η τιμή του πουκάμισου μετά την έκπτωση είναι: $58\ € - 20{,}30\ € = 37{,}70\ €$.

Για τα παπούτσια έχουμε ποσό έκπτωσης: $15\% \cdot 170\ € = \frac{15}{100} \cdot 170\ € = 25{,}50\ €$.

Η τιμή των παπουτσιών μετά την έκπτωση είναι: $170\ € - 25{,}50\ € = 144{,}50\ €$.

Και για τα δύο μαζί θα πληρώσουμε: $37{,}70\ € + 144{,}50\ € = 182{,}20\ €$.

3. *Ποσό 1.000 € κατατέθηκε σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 5%. Πόσος είναι ο τόκος που θα αποδώσει το κεφάλαιο αυτό, μετά από 18 μήνες, αν οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο κάθε χρόνο;*

Λύση

Γνωρίζουμε ότι: **Τόκος = Κεφάλαιο · Επιτόκιο**

Άρα: Τόκος α' έτους είναι: $1000\ € \cdot 5\% = 1000\ € \cdot \frac{5}{100} = 50\ €$

Στο τέλος των 12 μηνών το κεφάλαιο θα γίνει: $1000\ € + 50\ € = 1050\ €$
Ο τόκος στους επόμενους 6 μήνες θα είναι τα $\frac{6}{12}$ του ετήσιου τόκου, δηλαδή:

$$1050\ € \cdot 5\% \cdot \frac{6}{12} = 1050\ € \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{6}{12} = 26{,}25\ €$$

Ο συνολικός τόκος που απέδωσαν τα 1.000 € για 18 μήνες είναι: $50€ + 26{,}25€ = 76{,}25€$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Επιχειρηματίας αγόρασε μετοχές μιας εταιρείας, προς 50 € την κάθε μετοχή. Σε ένα μήνα η μετοχή έπεσε κατά 8% και το επόμενο δίμηνο ανέβηκε κατά 5% το μήνα. (α) Ποια ήταν η τιμή της μετοχής στο τέλος του τρίτου μήνα; (β) Η επένδυση του επιχειρηματία ήταν κερδοφόρα ή όχι; (γ) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους ή ζημίας του, επί του αρχικού κεφαλαίου;

2. Κεφάλαιο 80.000 € κατατέθηκε, σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, με επιτόκιο 4,5% το χρόνο. (α) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του πρώτου έτους; (β) Ποιος θα είναι ο τόκος στο τέλος του δεύτερου έτους, αν ο τόκος του πρώτου έτους κεφαλοποιηθεί;

3. Ένα καινούριο αυτοκίνητο κόστιζε 20.000 €. Το αγόρασε κάποιος και μετά από 1 χρόνο ήθελε να το πουλήσει, κατά 30% λιγότερο, από όσο το αγόρασε. Ο υποψήφιος αγοραστής έμαθε, ότι το ίδιο ακριβώς μοντέλο, καινούριο, κόστιζε 25.000 €. (α) Σε ποια τιμή θα αγόραζε το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο; (β) Τι ποσοστό της τιμής του καινούριου αυτοκινήτου είναι η τιμή του μεταχειρισμένου; (γ) Αν ένα μαγαζί που πουλάει μεταχειρισμένα αυτοκίνητα δίνει το ίδιο μοντέλο σε τιμή 40% φτηνότερα από την τρέχουσα τιμή του καινούριου, από ποιον συμφέρει να αγοράσει το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο ο υποψήφιος αγοραστής;

4. Σε ένα προϊόν, έγινε η προσφορά που φαίνεται στην πινακίδα. Στη συσκευασία του προϊόντος υπήρχε σημειωμένη η συγκεκριμένη, για το είδος προσφορά, δηλαδή για κάθε 300 κ.εκ., πρόσθετα άλλα 100 κ.εκ. (α) Σύμφωνα, με όσα διαβάζεις, θεωρείς ότι αληθεύουν όσα γράφονται στην προσφορά; (β) Σε ποια περίπτωση η εταιρεία θα πρόσφερε, πράγματι, το 50% του προϊόντος ΔΩΡΕΑΝ;

5. Τι κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε στην τράπεζα, για να πάρουμε στο τέλος ενός έτους 1.000 €, αν το επιτόκιο είναι 2%;

6. Τα βασικά τέλη διμήνου για λογαριασμό του ΟΤΕ είναι 22 € και η χρέωση για κάθε μονάδα 0,07 €. Να βρεις πόσο θα πληρώσει ένας συνδρομητής, αν έχει κάνει 1.500 μονάδες συνδιαλέξεων και επί του συνόλου υπολογίζεται ΦΠΑ 19%.

7. Ένας έμπορος αγόρασε διάφορα εμπορεύματα συνολικής αξίας 30.000 €. Πλήρωσε τοις μετρητοίς το 40% και τα υπόλοιπα με συναλλαγματικές, σε 4 μηνιαίες δόσεις με τόκο 1% τον μήνα. Να υπολογίσεις: (α) Το συνολικό ποσό της επιβάρυνσης από τους τόκους που θα πληρώσει. (β) Το ποσοστό της επιβάρυνσης αυτής, επί της αρχικής αξίας των εμπορευμάτων.

8. Ένας τεχνικός είχε έσοδα σε ένα τρίμηνο 8.330 €. Πόσο ΦΠΑ (19%) πρέπει να αποδώσει στην εφορία;

9. Ένα ψυγείο κοστίζει, τοις μετρητοίς, 1.200 € χωρίς το ΦΠΑ 19%. Κάποιος το αγόρασε με 50% προκαταβολή και το υπόλοιπο, σε 6 μηνιαίες δόσεις με τόκο 3% το μήνα. (α) Να υπολογίσεις πόσα χρήματα έδωσε, ως προκαταβολή, αν μαζί με αυτήν κατέβαλε και ολόκληρο το ποσό του ΦΠΑ. (β) Ποιο ήταν το ποσό της κάθε δόσης; (γ) Πόσο του στοίχισε συνολικά το ψυγείο;

10. Για τη διπλανή διαφήμιση: (α) Πόσο είναι το ΦΠΑ που πρέπει να πληρώσουμε; (β) Πόσο θα στοιχίσει το ραδιοκασετόφωνο, αν το αγοράσουμε με δόσεις; (γ) Αν το τραπεζικό επιτόκιο είναι 10%, ποια επιλογή αγοράς μας συμφέρει, με την προϋπόθεση, ότι έχουμε όλο το απαιτούμενο ποσό σε λογαριασμό ταμιευτηρίου;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

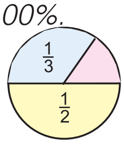
Να μελετήσεις τα εκλογικά αποτελέσματα στις τέσσερις τελευταίες εκλογές στη χώρα μας και να καταγράψεις σε έναν πίνακα: (α) τα ποσοστά των ψηφισάντων, (β) τα ποσοστά των έγκυρων ψηφοδελτίων, των άκυρων και των λευκών, (γ) τα ποσοστά που έλαβε κάθε κόμμα σε όλη την επικράτεια της χώρας.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση — ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. *Το 30% του x ισούται με το 90% του $\frac{x}{3}$.*
2. *Σε ένα βιβλίο έγινε αύξηση τιμής κατά 5% και δεύτερη αύξηση κατά 10% επί της νέας τιμής. Η συνολική αύξηση ήταν 15,5%.*
3. *Όταν σ' ένα προϊόν αξίας 700 € η έκπτωση είναι 200 €, το ποσοστό έκπτωσης είναι περίπου 28,5%.*
4. *Το 20% του 50 είναι 10.*
5. *1 € έκπτωση σ' ένα στυλό που κοστίζει 4 € αντιστοιχεί σε ποσοστό έκπτωσης 25%.*
6. *Ένα είδος μετά από έκπτωση 200 €, κοστίζει 100 €. Στο είδος έγινε έκπτωση 25%.*
7. *Ο πληθυσμός μιας κωμόπολης ήταν 3.000 κάτοικοι και αυξήθηκε σε 6.000 κατοίκους. Λέμε ότι ο πληθυσμός αυξήθηκε κατά 100%.*
8. *Το κόκκινο μέρος του κύκλου είναι το 15% .*



9. *Μια τάξη έχει 28 μαθητές και μια μέρα απουσίαζαν οι 4, δηλαδή απουσίαζε το 15% της τάξης.*
10. *Το 30% της ώρας είναι 25 λεπτά.*
11. *Μια αύξηση 100 € σε ένα είδος που κόστιζε 400 € είναι μια αύξηση 15% .*

Β. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

Σε κάθε μία από τις νέες τιμές των προϊόντων που αναφέρονται στη διαφήμιση, να αντιστοιχίσεις το ποσοστό έκπτωσης.

ΠΡΟΣΦΟΡΕΣ

Παντελόνι	~~120€~~	84€	10%
Φούστες	~~80€~~	48€	15%
Φορέματα	~~180€~~	153€	20%
Μπλούζες	~~40€~~	32€	30%
Φόρμες	~~50€~~	45€	40%

ΜΕΡΟΣ Α΄

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ανάλογα ποσά & αντιστρόφως ανάλογα ποσά

6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

- *Σχεδιάζω ένα σύστημα ημιαξόνων*
- *Βρίσκω τις συντεταγμένες ενός σημείου*
- *Βρίσκω ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του*

6.2. Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

- *Κατανοώ την έννοια του λόγου και την έννοια της αναλογίας*
- *Επιλύω εξισώσεις της μορφής αx = β, μέσω αναζήτησης της τέταρτης αναλόγου της σχέσης* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{x}$. *Γνωρίζω, ότι γενικά είναι:* $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta}$

6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

- *Αναγνωρίζω αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών*
- *Συμπληρώνω πίνακες αναλόγων ποσών όταν δίνεται ο λόγος τους*
- *Υπολογίζω τον λόγο των δύο αναλόγων ποσών όταν δίνονται οι πίνακές τους*
- *Χρησιμοποιώ το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας*

6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

- *Αναπαριστάνω γραφικά μία σχέση αναλογίας*
- *Διαπιστώνω ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μια ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων*

6.5. Προβλήματα αναλογιών

- *Οργανώνω τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογιών σε πίνακα και κατασκευάζω με βάση τον πίνακα αυτόν, όπου κρίνεται απαραίτητο, και τη γραφική παράσταση*
- *Λύνω τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο, τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια: αριθμητικό και γραφικό*

6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

- *Διακρίνω εάν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα*
- *Γνωρίζω ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό*
- *Κατασκευάζω πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως αναλόγων ποσών*
- *Παριστάνω με σημεία ενός συστήματος αξόνων τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών και χαράζω την καμπύλη που περνά από αυτά*
- *Λύνω προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως αναλόγων ποσών*

ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ Ο ΑΒΔΗΡΙΤΗΣ
(460 - 370 π.Χ.)

Η «ρητή εντολή»

- Τι είναι τούτα τα περίεργα στην οθόνη σας κύριε Πέτρο; ρώτησαν τον μεσόκοπο άντρα που δούλευε απορροφημένος στον υπολογιστή του. Εκείνος σήκωσε τα μάτια και κοίταξε πάνω απ' τα γυαλιά τα παιδιά που μπήκαν χαρούμενα στο γραφείο του.

- Ο μπαμπάς μας είπε να τον περιμένουμε εδώ, δικαιολόγησαν την παρουσία τους κοιτώντας με περιέργεια τον υπολογιστή.

- Θα ξέρετε παιδιά, είπε ο κύριος Πέτρος, *ότι ο πατέρας σας σχεδιάζει στον υπολογιστή τα κτίρια που κατασκευάζουμε. Εγώ έχω την τεχνική υποστήριξη αυτών των προγραμμάτων. Αυτά που βλέπετε όμως στην οθόνη είναι μια απλή οικονομική μελέτη για την κατασκευή. Αν είχατε μάθει στο σχολείο τους ακέραιους και τους ρητούς εύκολα θα καταλαβαίνατε όλα τούτα.*

- Ξέρω τους ακέραιους, είπε ο Ιάσονας. *Είναι οι αριθμοί που περιέχουν μόνο ακέραιες μονάδες, δηλαδή δεν είναι κλάσματα. Αλλά οι ρητοί τι είναι; Γιατί τους λέμε έτσι;*

- Πριν προσπαθήσω να σας εξηγήσω, ας δούμε τι αναφέρει και το λεξικό, είπε ο κύριος Πέτρος. Συμβουλεύτηκε ένα χοντρό βιβλίο από τη βιβλιοθήκη και συνέχισε:*«Ρητός είναι ο αριθμός που μπορούμε να τον πούμε. Η λέξη προέρχεται από το αρχαίο "είρηκα" δηλαδή έχω πει' που είναι παρακείμενος του "λέγω". Άρα ρητός είναι ο ειπωμένος αριθμός».*

Τα γεμάτα απορία μάτια των παιδιών τον έκαναν να συνεχίσει: *«Εκτός από τους ρητούς που είναι οι ακέραιοι και τα γνωστά κλάσματα, υπάρχουν και αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, που δεν μπορείς να τους πεις ολόκληρους αφού τα ψηφία τους δεν τελειώνουν ποτέ και ούτε είναι γνωστά. Αυτούς τους αριθμούς τους ονομάζουμε άρρητους και θα τους μάθετε αργότερα στο σχολείο».*

Κοίταξε πάλι το λεξικό και συνέχισε κάπως σκεπτικός. *"Ομολογώ ότι δεν ήξερα από που προέρχεται η λέξη ρητός, ενώ γνωρίζω το "ρήτορας" ή την έκφραση "ρητή εντολή". Και να σκεφτεί κανείς ότι τόσα χρόνια την αναφέρω στα μαθηματικά...»*

- Συγνώμη, μηχανικός υπολογιστών δεν είστε; ρώτησε με αφοπλιστική αφέλεια ο Ιάσονας.

- Ναι, με ειδίκευση στο λογισμικό, που προϋποθέτει όμως καλή γνώση μαθηματικών. Σου φαίνεται κάτι περίεργο; απόρησε ο κύριος Πέτρος.

- Όχι βέβαια, βιάστηκε να διορθώσει ο Ιάσονας, *αλλά περίμενα ότι θα ψάχνατε τη λέξη στο ηλεκτρονικό λεξικό.*

Ο κύριος Πέτρος χαμογέλασε με την παρατήρηση του Ιάσονα κι ύστερα με πιο σοβαρό ύφος είπε, δείχνοντας τον υπολογιστή:

- Ακούστε παιδιά. Γίνεται συχνά μια παρεξήγηση με τούτο το μηχάνημα. Άλλοι το αποφεύγουν γιατί δεν ξέρουν να το χειρίζονται και άλλοι το χρησιμοποιούν περίπου σαν τηλεόραση. Και τα δύο είναι λάθος. Στον υπολογιστή έχω ηλεκτρονικό λεξικό, αυτό όμως δε σημαίνει ότι θα πάψω να συμβουλεύομαι το βιβλίο. Προτιμώ να χρησιμοποιώ τον υπολογιστή σε πιο σύνθετες και πιο δημιουργικές εργασίες. Για παράδειγμα θα ήταν σωστό να τον χρησιμοποιήσεις για να σχεδιάσεις ένα στάδιο, αλλά θεωρώ ότι είναι λάθος να παίζεις ποδόσφαιρο στην οθόνη του υπολογιστή. Το μηχάνημα αυτό δε φτιάχτηκε για να καταργήσει τις δικές μας λειτουργίες, αλλά για να βελτιώσει τη δημιουργική μας σκέψη».

Τη συζήτηση διέκοψε ο πατέρας των παιδιών που μπήκε βιαστικά και έδωσε ένα σχέδιο στον κύριο Πέτρο λέγοντας: *«Στο διάγραμμα που θα σχεδιάσεις να φαίνεται καθαρά ότι το κόστος είναι ανάλογο με το εμβαδόν».*

- Τι σημαίνει "ανάλογο" κύριε Πέτρο;, ρώτησε απορημένα η Αθηνά.

Εκείνος χωρίς να απαντήσει απευθύνθηκε μειδιώντας στον πατέρα τους.

- Σου δίνω "ρητή εντολή", να φέρνεις πιο συχνά τα παιδιά στο γραφείο. Πάντα κάτι θα μαθαίνουμε από τις ερωτήσεις τους.

Α.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

Στα προηγούμενα τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία. Τώρα, θα ανοίξουμε λίγο τον ορίζοντά μας και από την ευθεία πάμε στο επίπεδο. Είναι εύκολο. Αρκεί να πάρουμε δύο κάθετες ευθείες και έχουμε μπροστά μας ένα επίπεδο που έχει πολλά να μας δείξει. Ας τα δούμε ξεκινώντας με μια παρτίδα σκάκι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια εφημερίδα δημοσιεύτηκε μια παρτίδα σκάκι, όπως είναι αυτή που φαίνεται στην παρακάτω σκακιέρα.

- *Δώσε ονομασίες για τις θέσεις των πιονιών που βρίσκονται στη συγκεκριμένη σκακιέρα και φτιάξε έναν πίνακα με αυτές.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Η θερμοκρασία ενός ασθενούς κατά την τρίτη ημέρα νοσηλείας του, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

7:30	9:00	10:00	11:00	12:30	13:30	14:30	16:00	18:00	20:00	21:30	23:00
37,2	37,7	37,9	38,6	39,2	38,2	37,2	37	36,6	37,8	38,2	37,1

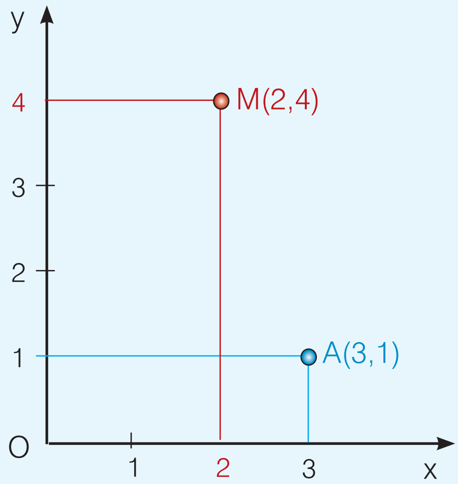
- *Μπορείς να παραστήσεις αυτόν τον πίνακα με έναν άλλο τρόπο;*
- *Πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας του ασθενούς τις ώρες που δεν μετριέται αυτή;*

Μαθαίνουμε

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο:

Σχεδιάζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ημιευθείες **Ox** και **Oy**.
Πάνω σε κάθε μια απ' αυτές ορίζουμε την ίδια μονάδα μέτρησης.
Αυτές οι ημιευθείες αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων.

- **Ο ημιάξονας Ox** λέγεται ημιάξονας των **τετμημένων** ή **ημιάξονας των x.**
- **Ο ημιάξονας Oy** λέγεται ημιάξονας των **τεταγμένων** ή **ημιάξονας των y.**
- **Το σημείο Ο** ονομάζεται **αρχή των ημιαξόνων.**



- Το **3** είναι η **τετμημένη** του σημείου **Α.**
- Το **1** είναι η **τεταγμένη** του σημείου **Α.**

- Η **τετμημένη** και η **τεταγμένη** του σημείου **Α** ονομάζονται **συντεταγμένες του Α** και συνήθως όταν θέλουμε να αναφερθούμε στο σημείο **Α**, γράφουμε **Α(3,1).**

- Το ζεύγος **(3,1)** του οποίου ο πρώτος αριθμός **3** είναι η **τετμημένη** του σημείου **Α** και ο δεύτερος αριθμός **1** είναι η **τεταγμένη** του σημείου **Α**, λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος**, επειδή έχει σημασία η διάταξη, δηλαδή η σειρά, με την οποία γράφονται οι αριθμοί που το αποτελούν.

- Με το σύστημα αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο **Α** ένα ζεύγος αριθμών **(3,1)**, δηλαδή ένα **διατεταγμένο ζεύγος**, οι αριθμοί του οποίου ονομάζονται **συντεταγμένες του σημείου**.

- Αντίστροφα, κάθε **διατεταγμένο ζεύγος** αριθμών π.χ. το **(2,4)** αντιστοιχεί σε ένα σημείο **Μ** του επιπέδου.

- Το σύστημα ημιαξόνων που χρησιμοποιήσαμε λέγεται **ορθοκανονικό**, γιατί οι ημιάξονες τέμνονται κάθετα **(ορθο-)** και έχουμε ορίσει πάνω τους την ίδια μονάδα μέτρησης **(-κανονικό)**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,3), Β(3,2), Γ(4,5), Δ(5,5), Ε(1,4), Ζ(7,3), Η(7,2), Θ(6,2), Ι(6,0), Κ(0,5). Τι παρατηρείς για τα σημεία Ι και Κ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;

2. Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,1), Β(1,2), Γ(2,3) και Δ(3,2). Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Κ, ποιες είναι οι συντεταγμένες του Κ;

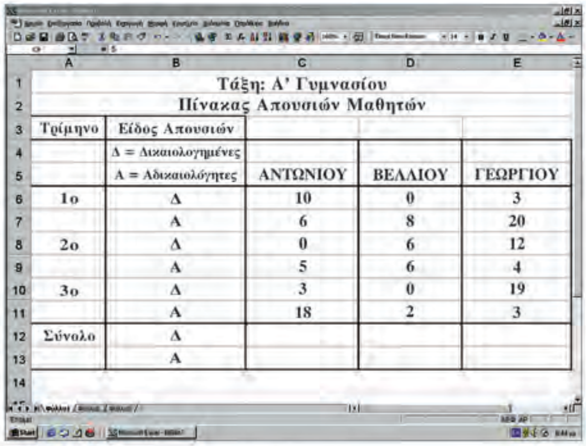
3. Γράψε πέντε διατεταγμένα ζεύγη σημείων, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Μπορείς να τα τοποθετήσεις, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων; Τι παρατηρείς;

4. Στο σχήμα βλέπουμε τμήμα ενός πίνακα απουσιών ανά τρίμηνο, για τους μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός σχολείου. Κάθε θέση του πίνακα ορίζεται από το ζεύγος (γράμμα στήλης, αριθμός γραμμής).

(α) Σε ποια θέση βρίσκεται το όνομα του μαθητή Γεωργίου;

(β) Τι αντιπροσωπεύει ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση C8;

(γ) Ποιος αριθμός πρέπει να γραφεί στη θέση D12 και ποιος στη θέση E13;



	A	B	C	D	E
1	Τάξη: Α' Γυμνασίου				
2	Πίνακας Απουσιών Μαθητών				
3	Τρίμηνο	Είδος Απουσιών			
4		Δ = Δικαιολογημένες			
5		Α = Αδικαιολόγητες	ΑΝΤΩΝΙΟΥ	ΒΕΛΛΙΟΥ	ΓΕΩΡΓΙΟΥ
6	1ο	Δ	10	0	3
7		Α	6	8	20
8	2ο	Δ	0	6	12
9		Α	5	6	4
10	3ο	Δ	3	0	19
11		Α	18	2	3
12	Σύνολο	Δ			
13		Α			
14					

Λογιστικό φύλλο EXCEL

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

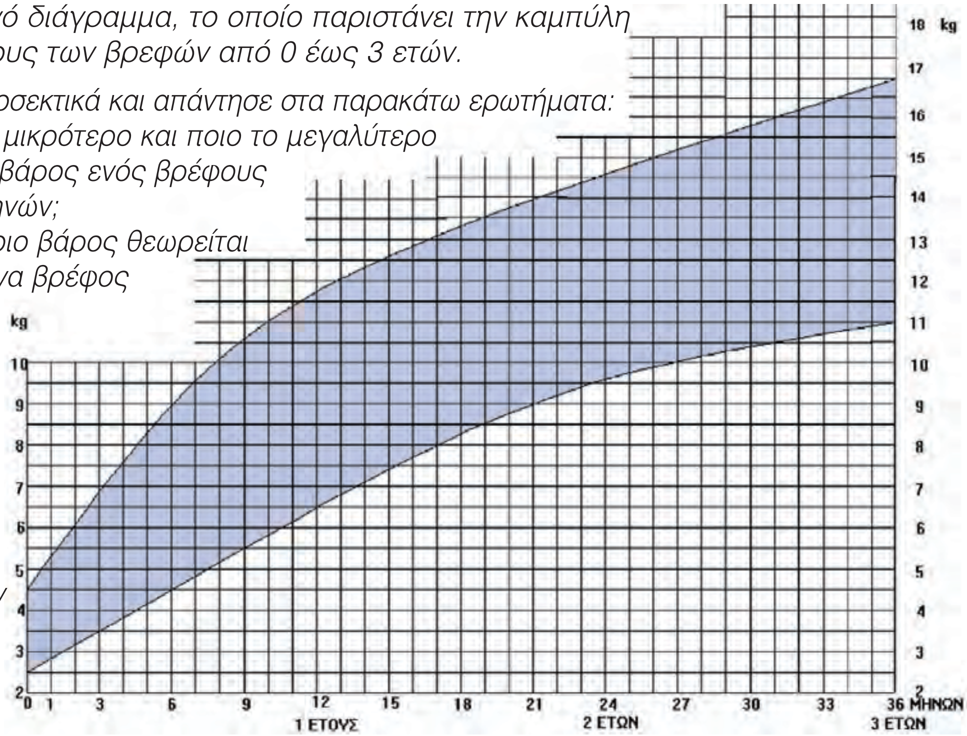
Σε κάθε βιβλιάριο υγείας παιδιού, που παρέχει το Υπουργείο Υγείας και Πρόνοιας, υπάρχει το διπλανό διάγραμμα, το οποίο παριστάνει την καμπύλη αύξησης του βάρους των βρεφών από 0 έως 3 ετών.

Παρατήρησέ το προσεκτικά και απάντησε στα παρακάτω ερωτήματα:

(α) Ποιο είναι το μικρότερο και ποιο το μεγαλύτερο φυσιολογικό βάρος ενός βρέφους ηλικίας 15 μηνών;

(β) Πάνω από ποιο βάρος θεωρείται υπέρβαρο, ένα βρέφος ηλικίας 18 μηνών και κάτω από ποιο βάρος θεωρείται λιποβαρές;

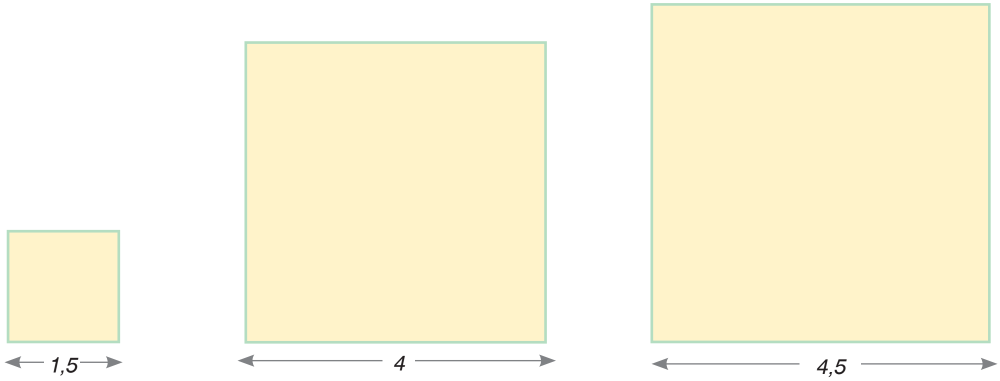
(γ) Είναι φυσιολογικό το βάρος των 7,5 κιλών για ένα βρέφος 9 μηνών;



Α.6.2. Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Έχουμε τα παρακάτω τρία τετράγωνα:



➢ *Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:*

Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm
Περίμετρος τετραγώνου			

➢ *Εξήγησε πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης σειράς.*

➢ *Βρες για κάθε τετράγωνο το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο.*

➢ *Ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

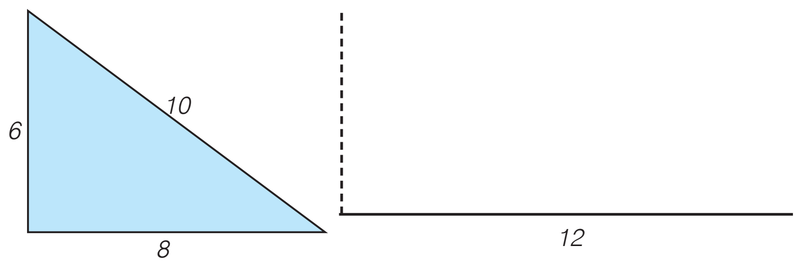
Χρησιμοποιούμε τη φωτογραφική μηχανή για να απεικονίσουμε εικόνες αντικειμένων. Οι εικόνες αυτές δείχνουν τα πραγματικά αντικείμενα σε σμίκρυνση.

Στη φωτογραφία το ύψος ενός παιδιού είναι 2 cm ενώ γνωρίζουμε ότι το πραγματικό του ύψος είναι 1,65 m = 165 cm.

➢ *Πόση θα είναι τότε η σμίκρυνσή του στη φωτογραφία;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Σχεδίασε το τρίγωνο του διπλανού σχήματος και μετά σχεδίασέ το μεγεθυσμένο, ώστε η πλευρά μήκους 8 cm να έχει νέο μήκος 12 cm.



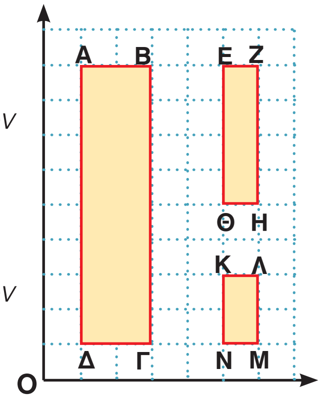
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Σύγκρινε τους λόγους: $\frac{ΑΒ}{ΚΛ}$ και $\frac{ΒΓ}{ΛΜ}$. Τι παρατηρείς;

➢ *Τι συμπέρασμα βγάζεις για τον λόγο των περιμέτρων των ορθογώνιων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ.*

Μετά σύγκρινε τους λόγους: $\frac{ΑΒ}{ΕΖ}$ και $\frac{ΒΓ}{ΖΗ}$. Τι παρατηρείς;

➢ *Τι συμπέρασμα βγάζεις για τον λόγο των περιμέτρων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.*



Μαθαίνουμε

- Το **πηλίκο** δύο αριθμών λέγεται και **λόγος** των αριθμών αυτών.
- Η **ισότητα λόγων** ονομάζεται **αναλογία**.
- **Ο λόγος της απόστασης** δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου **προς την απόσταση** των δύο αντίστοιχων σημείων του ιδίου αντικειμένου, εφόσον οι αποστάσεις μετριούνται με την ίδια μονάδα, ονομάζεται **κλίμακα**.
- Δύο σχήματα λέγονται **όμοια** όταν το ένα αποτελεί **σμίκρυνση** ή **μεγέθυνση** του άλλου (π.χ. στην παραπάνω δραστηριότητα το **ΑΒΓΔ** είναι μεγέθυνση του **ΕΖΘΗ** με λόγο **2:1**).

▶ **Αν οι λόγοι των αντιστοίχων πλευρών δύο παραλληλογράμμων είναι ίσοι, τότε αυτοί θα είναι ίσοι και με τον λόγο των περιμέτρων τους.**

▶ **Κάθε σχέση αναλογίας** $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ **είναι ισοδύναμη με τη σχέση** $α \cdot δ = β \cdot γ$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μετρούμε μια απόσταση, σε χάρτη, με κλίμακα 1:10.000.000 και τη βρίσκουμε ίση με 2,4 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο σημείων;

Λύση

Αφού δίνεται η κλίμακα **1:10.000.000**, στο **1 cm** του χάρτη αντιστοιχούν **10.000.000 cm** στην πραγματικότητα.

Συνεπώς, αν τα **2,4 cm** του χάρτη αντιστοιχούν σε **x cm** στην πραγματικότητα,

θα έχουμε: $\frac{2,4}{x} = \frac{1}{10.000.000}$. Επομένως, ισχύει ότι:

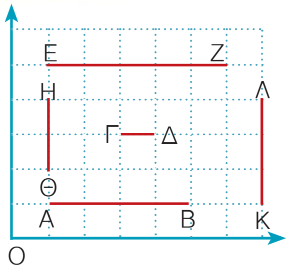
$1 \cdot x = 2,4 \cdot 10.000.000$ ή $x = 24.000.000 \text{ cm} = 240.000 \text{ m} = 240 \text{ Km}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

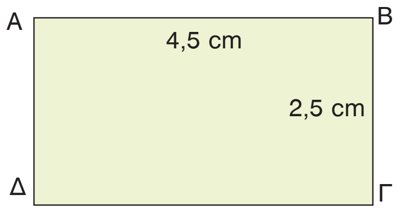
1. Να βρεις τους λόγους των διαφόρων ευθύγραμμων τμημάτων που είναι στο σχέδιο.

(α) $\frac{AB}{ΓΔ}$, $\frac{EZ}{HΘ}$, $\frac{KΛ}{AB}$, $\frac{AB}{KΛ}$, $\frac{HΘ}{EZ}$, $\frac{ΓΔ}{AB}$.

(β) $\frac{ΓΔ}{EZ}$, $\frac{HΘ}{KΛ}$, $\frac{AB}{AB}$, $\frac{EZ}{ΓΔ}$, $\frac{KΛ}{HΘ}$, $\frac{ΓΔ}{ΓΔ}$.



2.



Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Να σχεδιάσεις ένα άλλο ορθογώνιο με πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ορθογωνίου αυτού, έτσι ώστε ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους να είναι: 2:1.

3. Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχει σμικρυνθεί η εικόνα του ανθρώπου στη φωτογραφία;

4. Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα “Α” έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας;

5. Η σύνθεση μιας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι και το υπόλοιπο πολυεστέρας. Αν η μπλούζα ζυγίζει 820 gr, πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα νήματα του πολυεστέρα που περιέχει;

6. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Κλίμακα	1:5	3:8	1:30		1:100
Μήκος σε σχέδιο	4 cm		12 cm	2 cm	3,5 cm
Πραγματικό μήκος		24 m		10 m	

7. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x+2$ και x.

(α) Να γράψεις τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του ορθογωνίου με το x.

(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

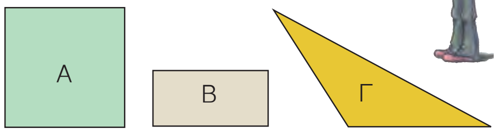
x		2		4
Π	8		16	

8. Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1:250, είναι 3x5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναι .....x..... .

9. Αν ανακατέψουμε 2 κιλά κόκκινο χρώμα και 3 κιλά κίτρινο χρώμα, φτιάχνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Αν ανακατέψεις 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 6 κιλά κίτρινο, θα πάρεις την ίδια απόχρωση; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

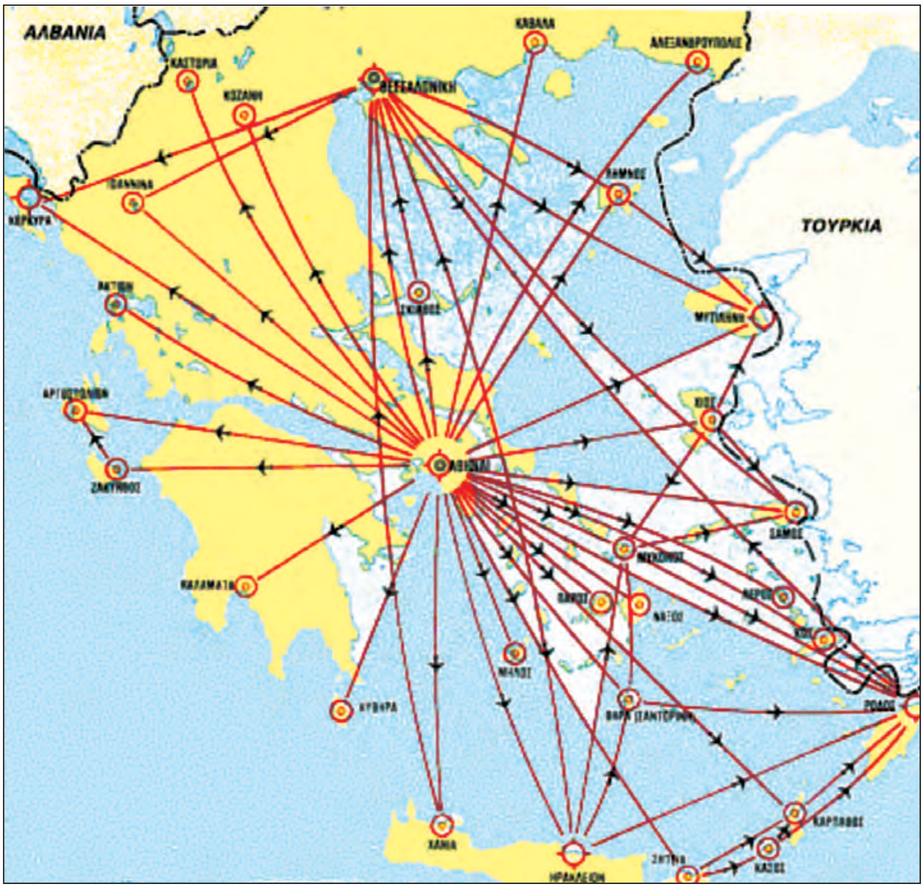
1. *Σχεδίασε τα σχήματα σε μιλιμετρέ χαρτί:*
(α) Το τετράγωνο Α με κλίμακα 9:1.
(β) Το παραλληλόγραμμο Β με κλίμακα 12:1.
(γ) Το τρίγωνο Γ με κλίμακα 7:1.



2.

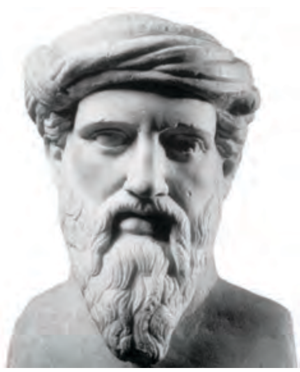
Όταν ο Κώστας έκλεισε τα δώδεκα χρόνια είχε το ένα τρίτο της ηλικίας της μητέρας του. Όταν θα γίνει είκοσι χρόνων, ο λόγος των δύο ηλικιών τους θα παραμείνει ο ίδιος;

3. *Να υπολογίσεις μερικές από τις απ' ευθείας αποστάσεις των πόλεων που συνδέονται με αεροπορική γραμμή, έχοντας υπόψη ότι η κλίμακα του διπλανού χάρτη είναι 1:6.000.000 και να δημιουργήσεις έναν πίνακα χιλιομετρικών αποστάσεων για τις πόλεις αυτές.*



ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχτηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική, όμως, μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα.



Ο Πυθαγόρας*, που έζησε από το 580 π.Χ. μέχρι πιθανόν το 490 π.Χ., ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκε με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Υπάρχει μια παράδοση που αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε σε αυτήν την έρευνα. Στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε αρκετά χρόνια, βρέθηκε μια μέρα κοντά σε κάποιο σιδηρουργείο όπου τέσσερις τεχνίτες κτυπούσαν με τα σφυριά τους ένα πυρακτωμένο μέταλλο. Ο ήχος από τα κτυπήματα ήταν παράξενα μελωδικός. Αυτό κέντρισε την περιέργεια του Πυθαγόρα, που αναζήτησε τον λόγο της απροσδόκητης μελωδίας αυτών των ήχων.*

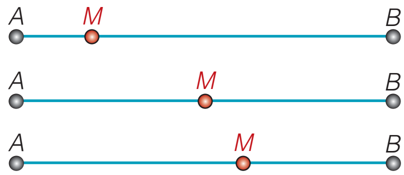
Ζήτησε από τους τεχνίτες να εξετάσει τα σφυριά τους. Παρατήρησε ότι το βάρος τους δεν ήταν το ίδιο. Συγκρίνοντας το πιο βαρύ με τα υπόλοιπα, βρήκε τους λόγους $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ *και* $\frac{1}{2}$ *αντίστοιχα. Σκέφτηκε ότι οι λόγοι αυτοί, πιθανόν, να είχαν κάποια σχέση με τους ήχους που άκουσε. Πήρε τότε τέσσερις μεταλλικές χορδές και τις τέντωσε έτσι, ώστε τα μήκη τους να έχουν αντίστοιχους λόγους. Δηλαδή, η δεύτερη είχε μήκος ίσο με τα* $\frac{3}{4}$ *του μήκους της πρώτης. Η τρίτη* $\frac{2}{3}$ *και η τέταρτη είχε μήκος ίσο με το* $\frac{1}{2}$ *της πρώτης.*

Έκρουσε τις χορδές και διαπίστωσε ότι οι ήχοι είχαν την ίδια μελωδική σχέση με αυτήν που άκουσε στο σιδηρουργείο. Ήταν μια "αρμονία" ήχων (συγχορδία). Με τον τρόπο αυτό, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αρμονικούς τόνους της μουσικής κλίμακας.

Έτσι, οι λόγοι των φυσικών αριθμών ερμήνευαν φαινόμενα που κανείς μέχρι τότε δεν μπόρεσε να συσχετίσει και να εξηγήσει. Ο δρόμος για την αναζήτηση της γνώσης είχε ανοίξει. Η έρευνα και η ερμηνεία των φαινομένων της φύσης είχε ήδη διαμορφώσει στον νου των ανθρώπων έναν νέο κώδικα, μια νέα "παγκόσμια" γλώσσα: τα μαθηματικά.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο σχήμα βλέπεις τρεις διαφορετικούς τρόπους, με τους οποίους το σημείο Μ *χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα* ΑΒ, *ορίζοντας τις αντίστοιχες αναλογίες, ανάμεσα στα μέρη του.*



$\frac{AB}{AM}$	$\frac{AM}{MB}$
5	$\frac{1}{4}$
2	1
1,618	1,618

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν επιλέξει τον τρίτο τρόπο ως καλύτερο αισθητικά και κατασκεύαζαν όλα τα μνημεία τους χρησιμοποιώντας αυτή τη συγκεκριμένη αναλογία στις διαστάσεις τους, όπως π.χ. μεταξύ των δύο διαστάσεων της βάσης του ναού του Παρθενώνα της Ακρόπολης των Αθηνών. Η αναλογία αυτή ονομάστηκε "χρυσή τομή".

Αλλά και η φύση φαίνεται ότι έχει παρόμοιες προτιμήσεις!

Την αναλογία της "χρυσής τομής" βρίσκουμε ανάμεσα στα μήκη των μελών του ανθρώπινου σώματος, αλλά και στις διαστάσεις των σχημάτων πολλών φυτών και ζώων.

- *Υπάρχει τέτοια αναλογία στα διάφορα αντικείμενα που παρατηρούμε γύρω μας.*

- *Προσπάθησε να βρεις την αναλογία της "χρυσής τομής" σε:* *(α)* μνημεία, *(β)* ζωγραφικούς πίνακες, *(γ)* ανθρώπινες κατασκευές, *(δ)* σχήματα ζώων και φυτών, *(ε)* ανθρώπινο σώμα *και άλλα.*

- *Συνδέεται η επιλογή της "χρυσής τομής" από τους ανθρώπους στη συγκεκριμένη εποχή με επιστημονικά, αισθητικά, κοινωνικά, θρησκευτικά, οικονομικά, πολιτιστικά κ.λπ. αίτια; Εάν ναι προσπάθησε να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.*

- *Προσπάθησε να αποτυπώσεις, με τη βοήθεια ίσως και του υπολογιστή, σχέδια των μορφών ή των σχημάτων που έχουν την αναλογία της "χρυσής τομής".*

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

- *Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;*
- *Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;*

Βάρος σε Kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 € το κιλό. Μέσα σε μια ημέρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

- *Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:*

Τιμή	6 €	2,8 €	5,2 €	3,2 €		3,6 €	4,8 €	2,4 €	1,6 €	4,4 €	2 €
Κιλά											

- *Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις έναν γενικό κανόνα.*

Μαθαίνουμε

- Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

- Δύο ποσά **x** και **y** είναι **ανάλογα**, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο: $\frac{y}{x} = α$. Το πηλίκο **α** λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.

  - Τα ανάλογα ποσά **x** και **y** συνδέονται με τη σχέση: $y = α \cdot x$ όπου **α** ο συντελεστής αναλογίας.
  - Όταν το ποσό **y** είναι **ποσοστό** του ποσού **x**, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{α}{100} \cdot x$ και είναι **ανάλογα**, με **συντελεστή αναλογίας** το $\frac{α}{100}$ ή **α%**.

- Η σχέση $y = α \cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας $α = \frac{2}{3}$.*

Λύση

x	0	1	0,3		
y				$\frac{5}{3}$	3

$y = α \cdot x$ Τα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{2}{3} \cdot x$

Άρα για $x = 0$, η τιμή του y θα είναι: $y = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$,

για $x = 1$ είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

και για $x = 0,3$ είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 0,3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{30} = 0,2$

$x = \frac{y}{α}$ Για $y = \frac{5}{3}$, θα είναι: $x = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{6} = 2,5$

Για $y = 3$, θα έχουμε, αντίστοιχα: $x = 3 : \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$

2. *Σε ένα διάλυμα ζάχαρης η περιεκτικότητα σε ζάχαρη είναι 23%. Πόσα γραμμάρια ζάχαρης υπάρχουν σε 300 gr διαλύματος;*

Λύση

Περιεκτικότητα 23% σε ζάχαρη σημαίνει ότι σε 100 gr διαλύματος υπάρχουν 23 gr ζάχαρη. Άρα, τα $\frac{23}{100}$ κάθε ποσότητας, από το διάλυμα, είναι ζάχαρη.

Δηλαδή, θα ισχύει: Ποσότητα ζάχαρης = $\frac{23}{100}$ · Ποσότητα διαλύματος.

Επομένως: $y = \frac{23}{100} \cdot x$. Η σχέση αυτή κάνει φανερό ότι τα ποσά y και x είναι *ανάλογα*.

Έτσι, θα έχουμε: $y = \frac{23}{100} \cdot 300$ gr = 69 gr.

3. *Ένα πλοίο έχει σταθερή ταχύτητα και καλύπτει απόσταση 80 Km σε 2 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 2.000 Km;*

Λύση

Χρόνος (ώρες)	2	x
Απόσταση (km)	80	2.000

Επομένως, έχουμε: $\frac{2}{80} = \frac{x}{2.000}$. Άρα: $80 \cdot x = 2 \cdot 2.000$

Επομένως: $80 \cdot x = 4.000$. Οπότε: $x = \frac{4.000}{80} = 50$ ώρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα;
(Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση)

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Ο αριθμός αναψυκτικών και τα χρήματα που κοστίζουν.		
(β) Το εμβαδόν του πατώματος και ο αριθμός των πλακών που είναι στρωμένο.		
(γ) Ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσουν ένα έργο.		
(δ) Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου δεδομένου εμβαδού.		
(ε) Η ταχύτητα και ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη μιας απόστασης.		
(στ) Η πλευρά ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του.		
(ζ) Η ηλικία ενός ανθρώπου και η περιουσία του.		
(η) Το ποσό που ξοδεύει κάποιος, για να αγοράσει λαχεία και το ποσό που κερδίζει.		

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο μεγέθη των οποίων οι αντίστοιχες τιμές δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο λέγονται ....

(β) Αν τετραπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού ....

(γ) Τα ανάλογα ποσά συνδέονται με τη σχέση: ....

3. Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα:

(α)

x	3	5	7
y	8	10	12

(β)

x	3	4	6	11
y	0,9	1,2	1,8	3,3

4. Στον πίνακα που ακολουθεί, τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Υπολόγισε τον συντελεστή αναλογίας τους και συμπλήρωσε τον πίνακα.

x	5	0	1			3,7	0,61	
y	10,05			2	0,125			0,55

5. Μια συνταγή για κέικ αναφέρει: "4 αυγά, 1 πακέτο φαρίνα, του μισού κιλού, 250 gr βουτύρου, 2 φλιτζάνια ζάχαρη, 1 βανίλια, 1 φλιτζάνι γάλα". Βρες πώς θα γίνει η συνταγή αν θέλεις να φτιάξεις μεγαλύτερη δόση και έχεις 7 αυγά;

6. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{2}{6}$. Υπολόγισε το x και τον λόγο $\frac{x+2}{3+6}$. Τι παρατηρείς;

7. Κεφάλαιο 150.000 € κατατέθηκε στην τράπεζα με επιτόκιο 9,5%. Πόσο θα έχει γίνει το κεφάλαιο, μετά από 1 χρόνο;

Α.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

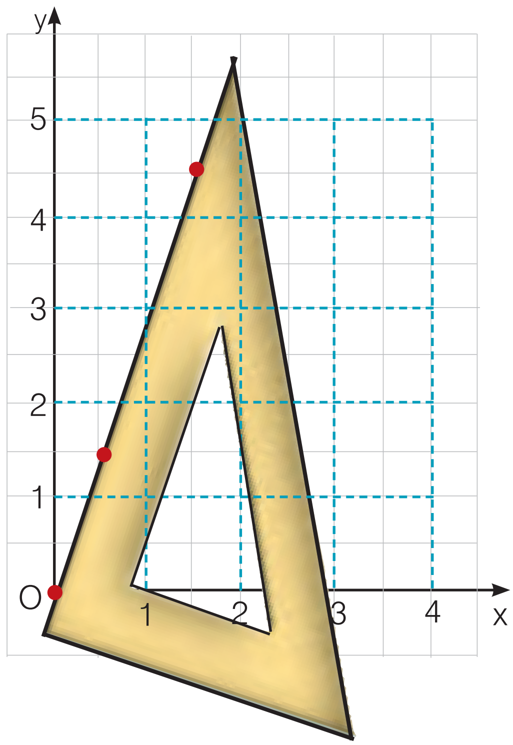
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η σχέση, μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και y με συντελεστή αναλογίας α = 3, δίνεται από τον τύπο: y = 3 • x.

Ο πίνακας αναλογίας των ποσών x και y είναι:

x	*0*	*0,5*	*1,5*							
y	*0*	*1,5*	*4,5*							

➢ *Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα και με άλλες τιμές των αναλόγων ποσών x και y.*



➢ *Βρες τα σημεία του επιπέδου που αναπαριστούν τα παραπάνω ζεύγη τιμών.*

➢ *Προσπάθησε να διαπιστώσεις, εάν τα σημεία ανήκουν σε μία ημιευθεία ή όχι.*

➢ *Η ημιευθεία αυτή περνάει από το σημείο Ο(0,0) δηλαδή την αρχή των ημιαξόνων;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω ζεύγη μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

► Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή Ο(0,0) των ημιαξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες Α, Β, Γ και Δ. (α) Να γίνει η γραφική απεικόνιση των ζευγών (x, y) των πινάκων στο επίπεδο και (β) να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αυτά παριστάνουν ποσά ανάλογα.

Α

x	0	1	2	3
y	0	2	1	1,5

Β

x	0	1	2	3
y	1	1,5	2	2,5

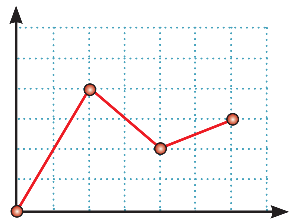
Γ

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

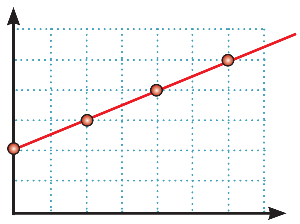
Δ

x	0	1	2	3
y	0	0,5	1	1,5

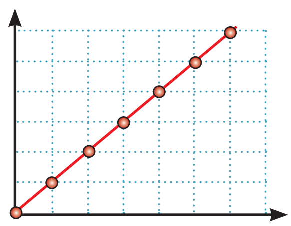
Λύση



Ο πίνακας **Α** είναι πίνακας τιμών των **x** και **y** που δεν είναι ανάλογα, αφού $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{3}{1,5}$.

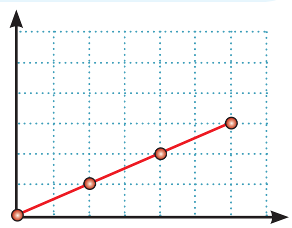


Ο πίνακας **Β** είναι πίνακας τιμών των **x** και **y** που δεν είναι ανάλογα, αφού $\frac{1}{1,5} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{2,5}$.



Ο πίνακας **Γ** είναι πίνακας αναλογίας των ποσών **x** και **y**, με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 1$.

- Η ημιευθεία που την αναπαριστά έχει αρχή την αρχή των αξόνων και είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ των ημιαξόνων.



Ο πίνακας **Δ** είναι πίνακας αναλογίας των ποσών **x** και **y** με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 0,5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας $α = 1{,}5$.

(α) Δημιούργησε έναν πίνακα τιμών των δύο ποσών, ο οποίος να περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών.

(β) Βρες τα σημεία που αναπαριστούν τα ζεύγη τιμών του πίνακά σου.

(γ) Σχεδίασε τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας των ποσών x και y, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων.

2. Σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων να σχεδιάσεις τις γραφικές παραστάσεις για κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις αναλογίας:

(α) $y = (\frac{1}{2}) \cdot x$, (β) $y = 3 \cdot x$, (γ) $y = 5{,}5 \cdot x$, (δ) $y = 10 \cdot x$, (ε) $y = 0{,}01 \cdot x$.

3. Αντιστοίχισε κάθε πίνακα με ένα από τους προτεινόμενους τύπους:

(Α)

x	4	7	12
y	10	17,5	30

(Β)

x	5	7,5	9
y	11	16	19

(Γ)

x	2	3	10
y	7	9	23

(Δ)

x	2	4	6
y	6	3	2

(Ε)

x	2	5	0,5
y	1	2,5	0,25

(Ζ)

x	0,2	6	10
y	2,4	14	22

(Η)

x	1	1,2	2,5
y	3	3,6	7,5

(Θ)

x	0,8	1	1,5
y	2,2	3	5

(1) $y = 2x + 3$

(2) $y = 3x$

(3) $y = 12{:}x$

(4) $y = 2{,}5x$

(5) $y = 2x + 2$

(6) $y = 2x + 1$

(7) $y = 4x - 1$

(8) $y = 0{,}5x$

4. Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000 € για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια. Κάθε φόρμα κοστίζει 40 €, κάθε μαγιό 20 € και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50 €.

(α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας "χρήματα-κομμάτια από κάθε είδος" και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

(β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

Α.6.5. Προβλήματα αναλογιών

Για να διαπιστώσουμε, εάν δυο ποσά είναι ανάλογα, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

x	y
5	7
15	21
2,5	3,5

1. Τον ορισμό των ανάλογων ποσών

Εξετάζουμε αν τα ποσά που μεταβάλλονται είναι τέτοια ώστε: όταν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται, με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Για παράδειγμα:

Αν $15 = 5 \cdot 3$ πρέπει $21 = 7 \cdot 3$ και

αν $2{,}5 = 5 \cdot \frac{1}{2}$ πρέπει $3{,}5 = 7 \cdot \frac{1}{2}$.

0,5 € το ένα τριαντάφυλλο

2. Τη σχέση $y = \alpha \cdot x$

Εξετάζουμε αν τα ποσά συνδέονται με μια σχέση αναλογίας.

Για παράδειγμα:

Κόστος ανθοδέσμης = 0,5 · αριθμός τριαντάφυλλων.

x	y	$\frac{y}{x}=2$
3	6	$\frac{6}{3}=2$
5,5	11	$\frac{11}{5{,}5}=2$
....	....	....

3. Τη σχέση $\frac{y}{x} = \alpha$

Εξετάζουμε αν όλες οι αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών έχουν σταθερό λόγο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Για να φτιάξουμε γλυκό βύσσινο πρέπει να καθαρίσουμε τα βύσσινα από τα κουκούτσια. Αν καθαρίσουμε 2,5 Kg βύσσινο, παίρνουμε 2 Kg καθαρό βύσσινο. Αν καθαρίσουμε 5 Kg βύσσινο, τι ποσότητα καθαρού βύσσινου θα πάρουμε;*

Λύση

Τα ποσά ακαθάριστο βύσσινο και καθαρό βύσσινο είναι ανάλογα.
Συμβολίζουμε με **y** την άγνωστη ποσότητα καθαρού βύσσινου και δημιουργούμε τον πίνακα αναλογίας.

Βύσσινο με κουκούτσι	2,5 Kg	5 Kg
Καθαρό βύσσινο	2 Kg	y

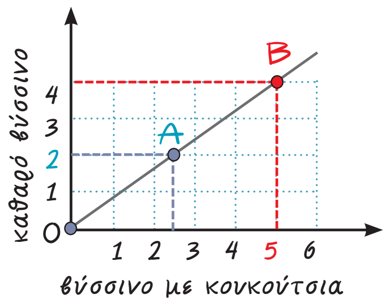
Θα έχουμε: $\frac{2,5}{2} = \frac{5}{y}$ δηλαδή:

$2,5 \cdot y = 2 \cdot 5$, επομένως $2,5 \cdot y = 10$ συνεπώς,

$y = \frac{10}{2,5}$ άρα, $y = 4$ Kg

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης των δύο ανάλογων ποσών, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα καθαρού βύσσινου (τεταγμένη του σημείου **B**), από την ποσότητα των **5 Kg** βύσσινου με κουκούτσια (τετμημένη).

Η ημιευθεία, που αναπαριστά τη σχέση αναλογίας του προβλήματός μας, ορίζεται από τα σημεία **O(0, 0)** και **A(2,5, 2)**.



Στον ημιάξονα **Ox** (κιλά βύσσινο με κουκούτσια) και στο σημείο που βρίσκεται ο αριθμός **5** φέρουμε κάθετη.

Αυτή τέμνει τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας, σε σημείο **B**. Το σημείο **B** έχει τετμημένη **5**.

Η τεταγμένη του προκύπτει, αν φέρουμε κάθετη από το **B** προς τον ημιάξονα **Oy** (καθαρό βύσσινο) και είναι **4 Kg**.

2. *Ένας μεσίτης αγοράζει ένα σπίτι 360.000 € και σκοπεύει να το πουλήσει με κέρδος 28%. Σε έναν πελάτη έκανε έκπτωση 15%, επί της τιμής πώλησης.*

(α) Πόσο πουλήθηκε το σπίτι στον πελάτη αυτόν;

(β) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους του μεσίτη, για το σπίτι αυτό;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

Δύο ποσά που συνδέονται με ποσοστιαία σχέση, είναι ποσά ανάλογα.

(α) Για να βρεθεί η τιμή πώλησης του σπιτιού πρέπει ν' αφαιρεθεί η έκπτωση που έγινε στην αρχική τιμή πώλησης. Δηλαδή:

- Θα υπολογίσουμε την αρχική τιμή πώλησης του σπιτιού. Στην τιμή κόστους θα έχουμε κέρδος 28%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή κόστους 100 € πωλείται 128 €. Τότε, ο πίνακας αναλογίας θα είναι:

Τιμή αγοράς	100	360.000
Τιμή πώλησης	128	y

Δηλαδή: $\dfrac{100}{128} = \dfrac{360.000}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 360.000 \cdot 128$

συνεπώς, $y = \dfrac{360.000 \cdot 128}{100}$. Άρα, $y = 460.800$ €

- Θα υπολογίσουμε την τιμή πώλησης μετά την έκπτωση που έγινε. Στην τιμή πώλησης έγινε έκπτωση 15%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή πώλησης 100 € πωλείται 85 €. Ας γράψουμε τον πίνακα αναλογίας:

Αρχική τιμή πώλησης	100	460.800
Τιμή πώλησης με έκπτωση 15%	85	y

Δηλαδή: $\dfrac{100}{85} = \dfrac{460.800}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 85 \cdot 460.800$ συνεπώς, $y = \dfrac{85 \cdot 460.800}{100}$

Άρα, $y = 391.680$ €. Ο πελάτης αγόρασε το σπίτι 391.680 €.

(β) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό κέρδους επί της τιμής αγοράς, πρέπει να ανάγουμε το κέρδος στα 100 €. Το κέρδος του εμπόρου είναι:
391.680 € - 360.000 € = 31.680 €

Έχουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

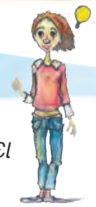
Τιμή αγοράς	360.000	100
Κέρδος	31.680	x

Δηλαδή: $\dfrac{360.000}{31.680} = \dfrac{100}{x}$

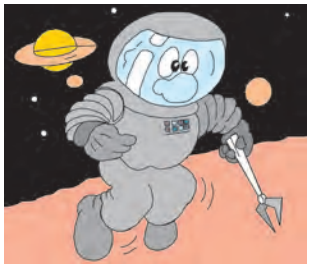
Επομένως, $360.000 \cdot x = 31.680 \cdot 100$ συνεπώς, $x = \dfrac{31.680 \cdot 100}{360.000}$.

Άρα, $x = 8{,}8$. Το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι 8,8%.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Ένας πάσσαλος ύψους 1,2 m ρίχνει σκιά 3 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 14 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος - σκιά είναι ανάλογα, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.



2. Το βάρος στο φεγγάρι και το βάρος στη γη είναι ποσά ανάλογα. Ένας αστροναύτης ζύγιζει στο φεγγάρι 12,9 Kg και στη γη 78 Kg. Πόσο θα ζυγίζει στο φεγγάρι ένα παιδί, που στη γη έχει βάρος 52 Kg;

3. Από 100 Kg σταφύλια βγαίνουν 80 Kg μούστος. Ένας αμπελουργός θέλει να γεμίσει με μούστο 6 βαρέλια, των 350 Kg το καθένα. Πόσα Kg σταφύλια, της ίδιας ποιότητας, πρέπει να πατήσει;

4. Δύο εργάτες δούλεψαν σε μια οικοδομή και πήραν μαζί 270 €. Ο πρώτος δούλεψε 4 ημέρες και ο δεύτερος 5 ημέρες. Πόσα χρήματα αντιστοιχούν στον καθένα.

5. Το θαλασσινό νερό περιέχει αλάτι σε ποσοστό 3%. Πόσα κιλά θαλασσινό νερό πρέπει να εξατμιστούν για να πάρουμε 60 Kg αλάτι;

6. Ένας γεωργός είχε ένα χωράφι 7 στρέμματα και πήρε και το γειτονικό χωράφι εμβαδού 8 στρεμμάτων, για να φυτέψει καλαμπόκι. Η συμφωνία με το γείτονά του ήταν να του δώσει το 15% της παραγωγής του χωραφιού του. Η συνολική παραγωγή ήταν 14 τόνοι καλαμπόκι. Πόσους τόνους θα πάρει ο γεωργός και πόσους ο γείτονάς του;

7. Αν ψήσουμε 2,5 Kg ωμό κρέας θα μείνει 1,9 Kg ψημένο κρέας.
(α) Πόσο είναι το ποσοστό απώλειας που έχουμε;
(β) Πόσο κρέας πρέπει να ψήσουμε για να έχουμε 2,3 Kg ψημένο κρέας;

8. Η μηνιαία κάρτα απεριορίστων διαδρομών στοιχίζει 12 € και η τιμή της θα αυξηθεί, κατά 75%. Το εισιτήριο στο αστικό λεωφορείο είναι 0,7 € και θα αυξηθεί, κατά 50%. Ένας εργαζόμενος παίρνει λεωφορείο, για να πάει και να γυρίσει από τη δουλειά του κάθε ημέρα, για είκοσι φορές το μήνα. Τον συμφέρει η χρήση της κάρτας ή όχι;

9. Ένα κεφάλαιο δίνει τόκο 1.000 € το χρόνο, με επιτόκιο 10%. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20%, πόσο τοις εκατό πρέπει ν' αυξήσουμε το κεφάλαιό μας για να έχουμε τον ίδιο τόκο, παρά τη μείωση του επιτοκίου;

10. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα και σχεδίασε διάγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα του προβλήματος.

	ΣΥΝΟΛΟ	Με 0 παιδιά	Με 1 παιδιά	Με 2 παιδιά	Με 3 παιδιά	Με 4 παιδιά	Πάνω από 4 παιδιά
Οικογένειες	200	10	40	80	50	15	5
Ποσοστά	100%						

Α.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ξεκινούν ταυτόχρονα από μια πόλη:

(α) ένα αυτοκίνητο που τρέχει με ταχύτητα 120 km/h
(β) ένα αεροπλάνο με 600 Km/h
(γ) μία μοτοσικλέτα με 75 Km/h
(δ) ένα λεωφορείο που τρέχει με 80 Km/h
(ε) ένα ελικόπτερο με 300 Km/h
(στ) ένα ταξί με 100 Km/h
(ζ) μία βέσπα με 60 Km/h και
(η) ένα πούλμαν με 90 Km/h

Το τέλος της διαδρομής είναι μια άλλη πόλη, που απέχει 600 Km.

➢ *Βρες σε πόσες ώρες, θα φθάσει το καθένα στον προορισμό του και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:*

Ταχύτητα σε Km/h								
Χρόνος σε ώρες								

➢ *Ποια σχέση συνδέει τα μεγέθη της ταχύτητας και του χρόνου;*

➢ *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών που βρήκες, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα συνεργείο που αποτελείται από 8 εργάτες χρειάζεται 30 ημέρες για να ολοκληρώσει ένα οικοδομικό έργο.

➢ *Πόσες ημέρες θα χρειαστεί το συνεργείο, που αποτελείται από 2, 4, 6, 10, 12, 24 ή 48 εργάτες για να τελειώσει το ίδιο έργο;*

➢ *Μπορείς να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;*

Εργάτες συνεργείου	2	4	6	8	10	12	24	48
Ημέρες εργασίας				30				

➢ *Τι παρατηρείς για το γινόμενο “εργάτες” • “ημέρες”;*

➢ *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

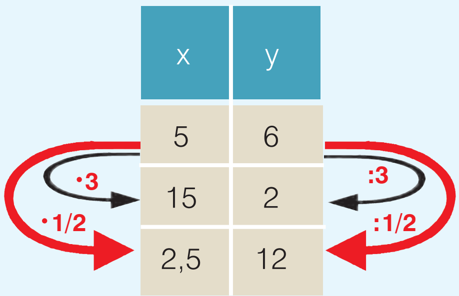
Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις x και y. Αν γνωρίζεις ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 144 m², μπορείς να βρεις δεκατέσσερις ακέραιες τιμές των διαστάσεών του και να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;

x														
y														

- *Ποια σχέση συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το εμβαδόν του;*
- *Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;*
- *Ποιο ορθογώνιο, απ' αυτά που βρήκες, έχει τη μικρότερη περίμετρο;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

► Δύο μεγέθη είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, στην περίπτωση, που η μεταβολή τους είναι τέτοια, ώστε: όταν το ένα μέγεθος **πολλαπλασιάζεται** επί έναν αριθμό, το άλλο **διαιρείται με τον ίδιο αριθμό**.



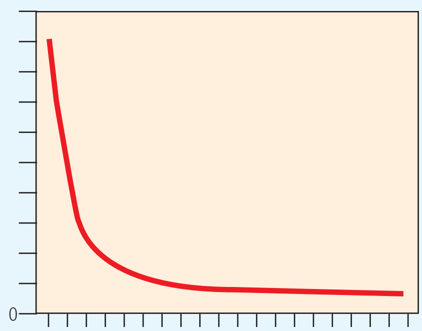
► Όταν δύο ποσά **x** και **y** είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει **σταθερό**:
y · x = α, α≠0

x	y	y · x = 30
5	6	5 · 6 = 30
15	2	15 · 2 = 30
...	...	...

◆ Στην περίπτωση που **α = 1**, τα **x** και **y** είναι **αντίστροφοι** αριθμοί.

● Τα **σημεία** που παριστούν τα **ζεύγη (x, y)** βρίσκονται σε μία **καμπύλη γραμμή**.
Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **υπερβολή**.

◆ Η **υπερβολή** δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες **Οx** και **Οy**, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της **δεν παίρνουν ποτέ** την τιμή **0**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ελαιοπαραγωγός χρησιμοποιεί δοχεία των 20 lt, 15 lt, 10 lt και 5 lt, για να συσκευάσει το λάδι που παράγει. Η παραγωγή του είναι 3.600 lt. Θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε κάθε μία από τις τέσσερις διαφορετικές συσκευασίες.

(α) Πόσα δοχεία χρειάζεται από κάθε είδος;

(β) Πόσο θα κοστίσει η συσκευασία της παραγωγής του αν στοιχίζει 0,4 € το δοχείο των 20 lt, 0,3 € το δοχείο των 15 lt, 0,2 € το δοχείο των 10 lt και 0,1 € το δοχείο των 5 lt;

Λύση

(α) Ο παραγωγός θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε 4 διαφορετικά είδη δοχείων, άρα σε κάθε είδος δοχείου θα συσκευάσει το $\frac{1}{4}$ της παραγωγής του,

δηλαδή $\frac{1}{4} \cdot 3.600 = \frac{3.600}{4} = 900$ lt, για κάθε είδος δοχείων.

Συνεπώς, θα ισχύει: **x (Χωρητικότητα) · y (Αριθμός Δοχείων) = 900 lt**. Τότε, θα είναι:

για $x = 20$ lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{20} = 45$

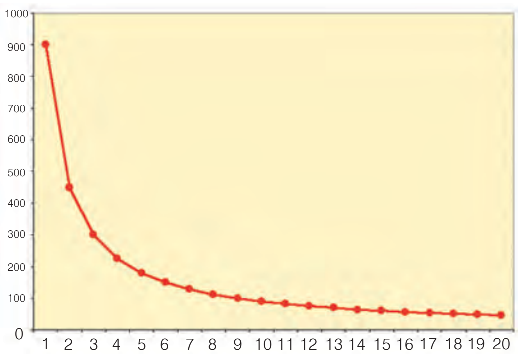
για $x = 15$ lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{15} = 60$

για $x = 10$ lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{10} = 90$

για $x = 5$ lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{5} = 180$

Έτσι, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα και το αντίστοιχο διάγραμμα.

x (χωρητικότητα)	20	15	10	5
y (αριθμός δοχείων)	45	60	90	180



(β) Τα ποσά **Αριθμών δοχείων** και **Κόστος συσκευασίας** είναι ανάλογα.

Έτσι, σε κάθε είδος δοχείου, θα έχουμε:

Δοχεία 20 lt

Αριθμός δοχείων	1	45
Κόστος δοχείων	0,4	ω

Δηλαδή: $w = 45 \cdot 0{,}4$ άρα $w = 18$ €

Δοχεία 15 lt

Αριθμός δοχείων	1	60
Κόστος δοχείων	0,3	ω

Δηλαδή: $w = 60 \cdot 0{,}3$ άρα $w = 18$ €

Δοχεία 10 lt

Αριθμός δοχείων	1	90
Κόστος δοχείων	0,2	ω

Δηλαδή: $w = 90 \cdot 0{,}2$ άρα $w = 18$ €

Δοχεία 5 lt

Αριθμός δοχείων	1	180
Κόστος δοχείων	0,1	ω

Δηλαδή: $w = 180 \cdot 0{,}1$ άρα $w = 18$ €

Έτσι, το συνολικό κόστος της συσκευασίας θα είναι το άθροισμα του κόστους των δοχείων και των τεσσάρων ειδών. Συνολικό κόστος $= 18 € + 18 € + 18 € + 18 € = 72 €$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα;
(Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση)

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Η βάση και το εμβαδόν ενός τριγώνου, με σταθερό ύψος.	☐	☐
(β)	Η παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μια μπανιέρα.	☐	☐
(γ)	Το **εμβαδόν** της ρωγμής ενός πλοίου και ο **χρόνος** που απαιτείται, για να γεμίσουν τα αμπάρια του με νερό.	☐	☐
(δ)	Ο **αριθμός ατόμων** και το **βάρος του παγωτού** που θα φάνε, από ένα οικογενειακό παγωτό 2 Kg.	☐	☐
(ε)	Η **χωρητικότητα** των μπουκαλιών και ο αριθμός μπουκαλιών που χρειαζόμαστε, για να εμφιαλώσουμε 100 lt κρασιού.	☐	☐
(στ)	Ο **αριθμός των ατόμων** και οι **σκηνές** των 2 ατόμων που χρειάζονται, για να κατασκηνώσουν.	☐	☐

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η τιμή του ενός διπλασιάζεται, τότε η αντίστοιχη τιμή του άλλου ....

(β) Η γραφική αναπαράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι .... γραμμή και ονομάζεται ....

3. Εξέτασε τους παρακάτω πίνακες:

(α)

x	1	2	3	4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

(β)

x	0,25	0,4	0,5
y	10	6,25	5

(γ)

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{7}{10}$	4
y	100	29	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{4}$

(δ)

x	3	6	9
y	9	5	3

Ποιοι από αυτούς είναι πίνακες τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

4. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. (α) Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	0,2	0,5	0,7	1			2,3	3		10	12
y				3,5	2,5	1,75			0,875		

(β) Βρες τα σημεία που παριστάνουν κάθε ζευγάρι τιμών (x, y), σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων ημιαξόνων και σχεδίασε την υπερβολή.

5. Για την αναδάσωση μιας πλαγιάς, εργάστηκαν 20 εργάτες για 10 ημέρες. Πόσοι εργάτες, ίδιας απόδοσης, χρειάζονται για να αναδασώσουν την έκταση αυτή, σε 8 ημέρες;

6. Σε ένα αγρόκτημα, τοποθέτησαν ντομάτες σε 50 καφάσια, των 12 Kg το καθένα. Πόσα καφάσια των 20 kg θα χρειαζόντουσαν για να τοποθετήσουν τις ντομάτες. Αν κάθε καφάσι των 12 kg στοιχίζει 0,28 € και κάθε καφάσι των 20 kg 0,46 €, ποια συσκευασία τους συμφέρει, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος συσκευασίας του προϊόντος τους;

7. Το πετρέλαιο που υπάρχει στη δεξαμενή μιας πολυκατοικίας, επαρκεί για 30 ημέρες, όταν καταναλώνονται 80 lt την ημέρα. Όταν το κρύο δυναμώνει, η ημερήσια κατανάλωση αυξάνεται, κατά 20%. Για πόσες ημέρες θα φτάσει το πετρέλαιο;

Ανακεφαλαίωση

Λόγος δύο αριθμών:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε} \quad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \quad \text{και}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Ποσά ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \text{ή} \quad y = \alpha \cdot x$$

όπου, **α συντελεστής αναλογίας**

Πίνακας τιμών:

·20 ·15

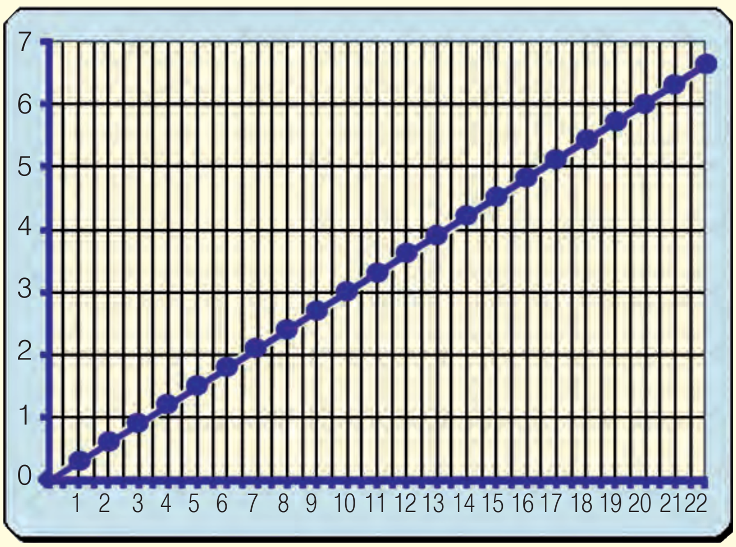
· 0,3										
y	0	0,3	0,9	1,5	3	3,6	4,5	5,4	6
x	0	1	3	5	10	12	15	18	20

·15 ·20

$y = 0{,}3 \cdot x$ ή και $y = 30\% \cdot x$

Το y είναι ποσοστό του x

Γραφική παράσταση



Κάθε **ζευγάρι τιμών** (x, y) **δύο ανάλογων ποσών** αναπαρίσταται από **ένα σημείο** του επιπέδου με συντεταγμένες το ζευγάρι τιμών (x, y).

Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια **ημιευθεία**, με αρχή το σημείο **Ο**(0,0).

Κάθε σημείο της ημιευθείας η οποία αναπαριστά μια σχέση αναλογίας, έχει συντεταγμένες που ικανοποιούν αυτήν τη **σχέση αναλογίας y = 0, 3· x .**

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$y \cdot x = \alpha \quad \text{ή} \quad y = \frac{\alpha}{x}$$

όπου **x, y** $\neq$ 0

Πίνακας τιμών:

: 15

: 10

x	15	5	3	2,5	1,5	1,25	1
y	1	3	5	6	10	12	15

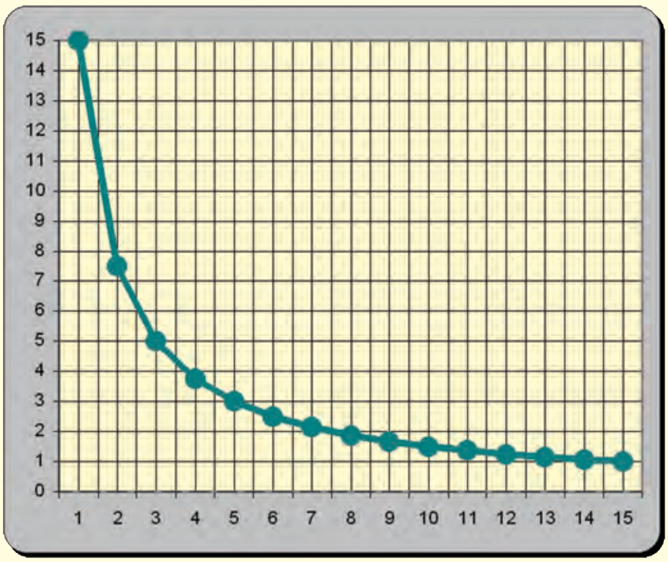
·10

·15

Δύο μεγέθη λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν μεταβάλλονται έτσι ώστε το ένα μέγεθος **πολλαπλασιάζεται** επί έναν αριθμό όταν το άλλο, ταυτόχρονα, **διαιρείται με τον ίδιο αριθμό**.

Δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x και y, δεν μπορούν να πάρουν τιμές ίσες με μηδέν.

Γραφική παράσταση



Τα **σημεία** που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται, σε μια **καμπύλη γραμμή**.

Η καμπύλη αυτή, που έχει χαρακτηριστικό σχήμα και ιδιότητες, ονομάζεται **υπερβολή**.

Η **υπερβολή** δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες **Ox** και **Oy**, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της **δεν παίρνουν ποτέ** την τιμή **0**.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1. Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά οι τιμές τους έχουν σταθερό γινόμενο.		
2. Η παροχή της βρύσης είναι ανάλογη του χρόνου που γεμίζει η μπανιέρα.		
3. Στα ανάλογα ποσά οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν σταθερό πηλίκο.		
4. Το ποσό α είναι ποσοστό του β, τότε τα ποσά α και β είναι ανάλογα.		
5. Μια κλίμακα 2:1 αντιστοιχεί σε σμίκρυνση στο μισό του αρχικού σχήματος.		
6. Ένας χάρτης περιοχής με κλίμακα 1:1.000 είναι μικρότερος από έναν άλλο χάρτη της ίδιας περιοχής με κλίμακα 1:2.000 .		
7. Αν δύο μοιραστούν 6.000 € με λόγο 2:1 τότε ο ένας θα πάρει 3.000 €.		

Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

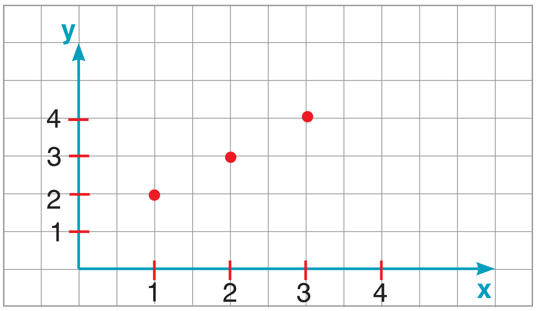
1. Το πηλίκο των μέτρων δύο ομοειδών μεγεθών, όταν έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα, λέγεται ....
2. Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου ονομάζεται ....
3. Αν πενταπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού ....
4. Το πηλίκο των αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών ονομάζεται ....
5. Η γραφική αναπαράσταση μιας σχέσης αναλογίας είναι .... γραμμή που περνάει από το σημείο ....
6. Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα ανάλογων ποσών

x	2	4		12	16
y		15	30		

7. Δύο ποσά των οποίων το γινόμενο των δύο αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό λέγονται ....
8. Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

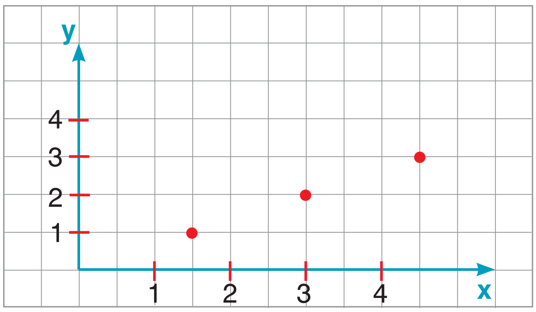
x	2			4	8
y	8	16	32		

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα με τις συντεταγμένες των σημείων των γραφικών παραστάσεων, που έχουν σημειωθεί έντονα, προσπάθησε να βρεις τον αντίστοιχο τύπο και να εκτιμήσεις αν αυτός αφορά σχέση αναλογίας.



x			
y			

y = ...



x			
y			

y = ...

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

7.1. Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου
- *Κατανοώ την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών*
- *Εκφράζω **μεγέθη** ή **μεταβλητές μεγεθών**, με **θετικούς** ή **αρνητικούς** αριθμούς*
- *Παριστάνω έναν ρητό με σημείο ενός άξονα*

7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών
- *Γνωρίζω την έννοια της **απόλυτης τιμής** ενός ρητού και με τη βοήθεια αυτής και του προσήμου του ρητού, αντιστοιχίζω τον **ρητό** με ένα **σημείο του άξονα***
- *Βρίσκω με **ακρίβεια** ή με **προσέγγιση** τον ρητό που αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα*
- *Γνωρίζω ποιοι ρητοί είναι **αντίθετοι** και ποια είναι η σχετική τους θέση στον άξονα*
- ***Συγκρίνω** δύο ρητούς και γνωρίζω τη θέση τους πάνω στον άξονα*
- ***Διατάσσω** δύο ή περισσότερους ρητούς*

7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών
- *Βρίσκω το άθροισμα δύο ρητών αριθμών*
- *Βρίσκω το άθροισμα πολλών ρητών αριθμών*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες της πρόσθεσης και τη σημασία τους στον υπολογισμό αθροισμάτων πολλών προσθετέων*

7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών
- *Γνωρίζω ότι η διαφορά **α – β**, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης **β+x=α***
- *Βρίσκω τη διαφορά δύο ρητών αριθμών*
- *Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις*
- *Κάνω απαλοιφή παρενθέσεων*

7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών
- *Βρίσκω το **γινόμενο** δύο ρητών αριθμών*
- *Γνωρίζω και εφαρμόζω τις **ιδιότητες** του γινομένου ρητών αριθμών*
- *Υπολογίζω **αριθμητικές παραστάσεις***
- *Εφαρμόζω την **επιμεριστική** ιδιότητα*

7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών
- *Γνωρίζω ότι το πηλίκο **α : β**, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης **β · x=α***
- *Βρίσκω το **πηλίκο** δύο ρητών αριθμών*
- *Γνωρίζω ότι το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι **ομόσημοι** αριθμοί*
- *Κατανοώ το πηλίκο δύο ρητών και **ως λόγο***

7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών
- *Διακρίνω τους ρητούς ως **δεκαδικούς** ή **περιοδικούς** δεκαδικούς*
- *Μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό και αντιστρόφως*

ΥΠΑΤΙΑ (370 - 415 μΧ.)

7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό
- *Γνωρίζω την έννοια της **δύναμης $α^ν$**, με α ρητό και ν φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις*
- *Γνωρίζω τις **ιδιότητες** των δυνάμεων με **εκθέτη φυσικό** και τις εφαρμόζω στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων*
- *Γνωρίζω την έννοια της **δύναμης $α^{-ν}$**, με τον **ρητό $α \neq 0$** και ν, φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις*
- ***Εκτελώ τις πράξεις** με την προβλεπόμενη προτεραιότητα των πράξεων*

7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο
- *Γνωρίζω τις **ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο** και υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις*
- *Γνωρίζω ότι: $\left(\frac{α}{β}\right)^{ν}=\left(\frac{β}{α}\right)^{-ν}$ και με τη βοήθεια της ισότητας αυτής, υπολογίζω **δυνάμεις με βάση κλασματικό αριθμό** και **εκθέτη αρνητικό ακέραιο***

7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών
- *Γράφω πολύ "μεγάλους" και "μικρούς" αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή*

Α.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

Οι αριθμοί που γνωρίσαμε, μέχρι τώρα, οι φυσικοί, οι δεκαδικοί και οι κλασματικοί, μπορούν να εκφράσουν τα φυσικά μεγέθη, όχι όμως και όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες και καταστάσεις. Άλλωστε, όταν τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία, πήραμε αυθαίρετα ένα σημείο ως αρχή και συνεχίσαμε "δεξιά", σε ίσες αποστάσεις, να γράφουμε τους γνωστούς μας αριθμούς. Κάθε "δεξιά" όμως μιας αρχής, προϋποθέτει και το "αριστερά". Όπως το δεξί χέρι προϋποθέτει το αριστερό του. Και ακόμα, δεν θα υπήρχε το "πάνω" χωρίς το "κάτω", το "ζεστό" χωρίς το "κρύο" κ.λπ. Έτσι, αν το πρώτο το πούμε "θετικό" θα πρέπει να υπάρχει το αντίθετό του και να το πούμε "αρνητικό". Επίσης, σε κάθε στοιχείο του ενός χρειάζεται να αντιστοιχίσουμε ακριβώς ένα στοιχείο του άλλου και να βρούμε τρόπο να το συμβολίσουμε. Δε θα είναι δύσκολο, αφού είναι πράγματα που τα βιώνουμε καθημερινά. Όπως π.χ. η πρόβλεψη του καιρού στη δραστηριότητα που ακολουθεί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Η μετεωρολογική υπηρεσία προέβλεψε ότι οι θερμοκρασίες στις διάφορες πόλεις θα είναι αυτές που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Αθήνα	7°	πάνω από το μηδέν
Θεσσαλονίκη	3°	κάτω από το μηδέν
Ιωάννινα	5°	κάτω από το μηδέν
Πάτρα	2°	πάνω από το μηδέν
Αλεξανδρούπολη	8°	κάτω από το μηδέν
Φλώρινα	10°	κάτω από το μηδέν
Τρίπολη	6°	κάτω από το μηδέν
Χανιά	11°	πάνω από το μηδέν

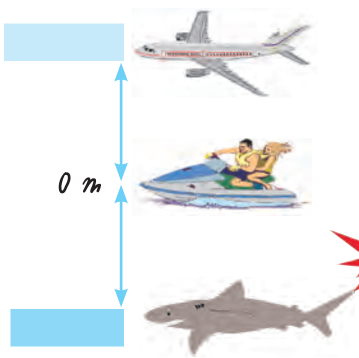
Προσπάθησε να σημειώσεις στον χάρτη αριθμούς που να εκφράζουν τις συγκεκριμένες θερμοκρασίες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στον ανελκυστήρα ενός γκαράζ υπάρχουν τα κουμπιά που βλέπεις δίπλα.

Τι εκφράζουν οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κουμπιά;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι το αεροπλάνο πετάει στα 200 m και ο καρχαρίας βρίσκεται σε βάθος 200 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας;

Προσπάθησε να εκφράσεις με κατάλληλους αριθμούς τις θέσεις του αεροπλάνου και του καρχαρία σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας;

Σκεφτόμαστε

Αν ο αριθμός **0** εκφράζει τη θέση της επιφάνειας της θάλασσας, τότε το αεροπλάνο πετάει στα **+200 m** και ο καρχαρίας βρίσκεται στα **–200 m**.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Μετά από τα παραπάνω συμφωνούμε ότι:

- Τα σύμβολα «+» και «–» λέγονται **πρόσημα.** Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**.

$+3$, $+\frac{3}{4}$, $+15{,}7$ και $+0{,}352$
θετικοί αριθμοί

-2, -10, $-28{,}95$ και $-0{,}098$
αρνητικοί αριθμοί

- Οι αριθμοί που συναντήσαμε μέχρι τώρα ήταν μόνο θετικοί και επομένως δεν υπήρχε ανάγκη να χρησιμοποιούμε πρόσημο. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη της τοποθέτησης πρόσημου μπροστά από όλους τους αριθμούς. Έτσι γίνεται φανερό ποιοι αριθμοί είναι οι **θετικοί** και ποιοι οι **αρνητικοί**.

Σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς, μπορούμε να παραλείπουμε το πρόσημο + π.χ. αντί να γράφουμε +7 παραλείπουμε το + και γράφουμε 7.

- Το **μηδέν** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

- **Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **το ίδιο πρόσημο**.

π.χ. οι αριθμοί -7, $-0{,}58$ και $-\frac{3}{4}$ είναι ομόσημοι και οι αριθμοί $+1{,}25$, $+\frac{10}{7}$ και $+5$ είναι ομόσημοι.

- **Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο**.

Οι αριθμοί -7 και $+0{,}58$ είναι ετερόσημοι αλλά και οι αριθμοί $-1{,}25$ και $+\frac{10}{7}$ είναι ετερόσημοι.

- **Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι **φυσικοί** αριθμοί μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς** αριθμούς.

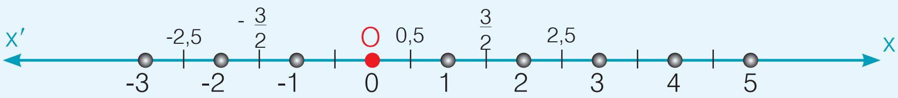
..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- **Ρητοί** αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: **φυσικοί**, **κλάσματα** και **δεκαδικοί** μαζί με τους **αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς**.

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο "Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία" ("Τσιου-τσανγκ-σουάν σου"), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).
Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός ***Διόφαντος****, που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα "Αριθμητικά", χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.*

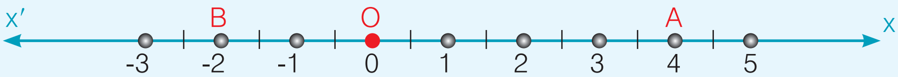
Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

- Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής **Ο** του ημιάξονα **Οx** των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα **Οx′**, μπορούμε να παραστήσουμε τους αρνητικούς αριθμούς σε συμμετρικά σημεία, ως προς **Ο**, των αντιστοίχων σημείων που παριστάνουν τους θετικούς αριθμούς. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε σημεία που να παριστάνουν κλασματικούς ή δεκαδικούς αριθμούς.



▶ **Ο άξονας x′Οx περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς (αρνητικούς, θετικούς και το μηδέν).**

- Η θέση ενός σημείου **Α** επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται **τετμημένη του σημείου**.



Το σημείο **Α** έχει τετμημένη **4** και το σημείο **Β** έχει τετμημένη **–2**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

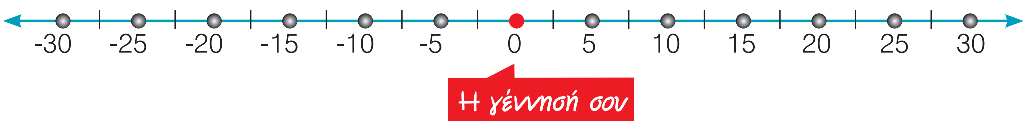
Να εκφραστούν με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών ρητών αριθμών:
(α) 13,75 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, (β) 20° Κελσίου πάνω από το μηδέν, (γ) κέρδος 3.368,97 €, (δ) αύξηση κατά 2.527,15 €, (ε) μείωση κατά 50 μονάδες και (στ) έκπτωση 15% επί της τιμής.

Λύση

(α) -13,75 m, (β) +20°, (γ) +3.368,97 €, (δ) +2.527,15 €, (ε) -50, (στ) -15%.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ας υποθέσουμε, ότι η στιγμή της γέννησής σου είναι το μηδέν, δηλαδή η αρχή της μέτρησης του χρόνου. Βρες μέχρι δέκα χρονολογίες, που αφορούν τα πιο σημαντικά, για σένα, προσωπικά και οικογενειακά γεγονότα και τοποθέτησέ τα στην παρακάτω ευθεία.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Οι ρητοί που έχουν πρόσημο "+" λέγονται .... ενώ αυτοί που έχουν πρόσημο "–" λέγονται ....

(β) Οι αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται .... ενώ αυτοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται ....

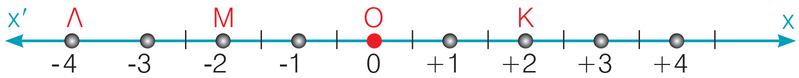
(γ) Στην ευθεία των αριθμών, δεξιά του μηδενός βρίσκονται οι .... ρητοί και αριστερά του μηδενός οι .... ρητοί.

2. Να κατατάξεις τους παρακάτω αριθμούς σε δύο ομάδες, τους θετικούς και τους αρνητικούς: –3,1, +5, +8, –20, 7, –3, 18.

3. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Οι ακόλουθοι αριθμοί είναι όλοι θετικοί: +1, +5, +216, +3701		
(β) Οι αριθμοί που ακολουθούν είναι όλοι αρνητικοί: –3, –8, 7, –22		

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα που ακολουθεί.

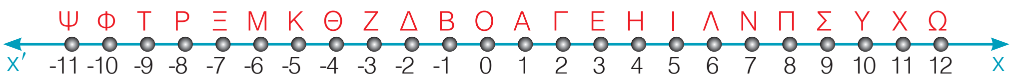


	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(γ) Η τετμημένη του σημείου Κ είναι +2		
(δ) Η τετμημένη του σημείου Λ είναι –4		
(ε) Τα σημεία Κ και Μ έχουν την ίδια τετμημένη		

4. Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι: (α) 3 και +3, (β) 2 και 5, (γ) –2 και –4, (δ) 7 και +9, (ε) –2 και 1, (στ) 17 και –20, (ζ) –9 και –3,2, (η) –10,5 και 11, (θ) –3 και –100, (ι) +6,7 και +12,3.

5. Να εκφράσεις με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω προτάσεις: (α) Κατάθεση 50.000 €, (β) Ανάληψη 78.000 €, (γ) Αύξηση μισθού κατά 500 €, (δ) Μείωση επιτοκίου κατά 1 μονάδα, (ε) 30 μέτρα αριστερά.

6. Βρες τη λέξη που σχηματίζεται από τα γράμματα με τετμημένες –6, 10, 9, –9, 5, –5, 0 στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια γράψε μ' αυτό τον τρόπο ένα όνομα που σου αρέσει.

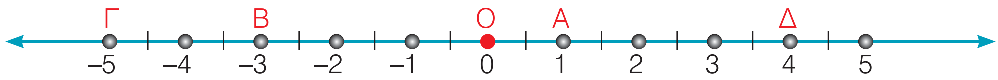


7. Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β, αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν: (α) α = +5 και β = +8, (β) α = –4 και β = –13.

Α.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

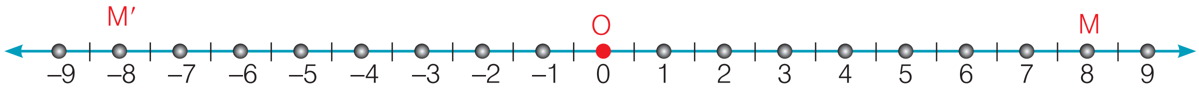
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Βρες πόσες μονάδες απέχουν από την αρχή Ο του άξονα τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στην παρακάτω ευθεία βρες τις τετμημένες των σημείων Μ′ και Μ.

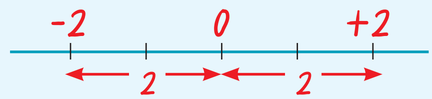


- *Τι παρατηρείς για τις τετμημένες των σημείων Μ′ και Μ;*
- *Προσπάθησε να τοποθετήσεις στην παραπάνω ευθεία των ρητών τα σημεία Α′ και Α που απέχουν από την αρχή Ο του άξονα 3,5 μονάδες.*
- *Κάνε το ίδιο για τα σημεία Β′ και Β που απέχουν από την αρχή Ο του άξονα 6 μονάδες.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού **α** εκφράζει την **απόσταση του σημείου με τετμημένη α** από την αρχή **Ο** του άξονα και συμβολίζεται με |**α**|.

- **Αντίθετοι** ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι **ετερόσημοι** και έχουν την **ίδια απόλυτη τιμή**.



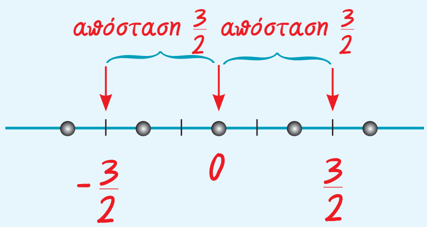
$|-2| = |+2| = 2$

- Ο αντίθετος του **x** είναι ο **–x**.

ο αντίθετος του +5,1 είναι ο -5,1
ο αντίθετος του -2,7 είναι ο -(-2,7)=+2,7

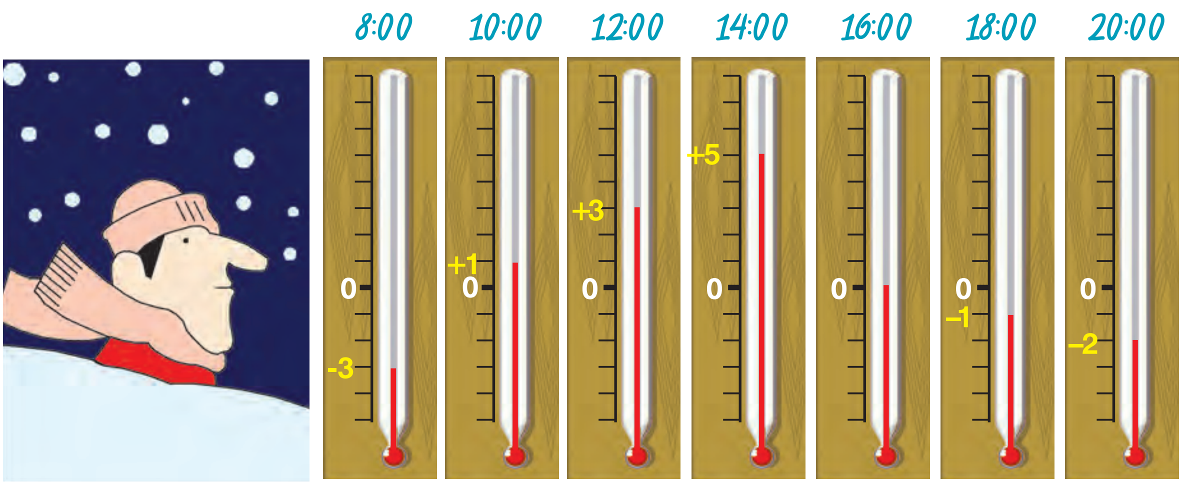
- Η **απόλυτη τιμή** ενός **θετικού αριθμού** είναι ο **ίδιος ο αριθμός**. π.χ. $|+9,63| = 9,63$
- Η **απόλυτη τιμή** ενός **αρνητικού αριθμού** είναι ο **αντίθετός του**. π.χ. $|-8,4| = 8,4 = -(-8,4)$
- **Η απόλυτη τιμή του μηδενός** είναι το **μηδέν**. π.χ. $|0| = 0$

- Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή των αξόνων, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

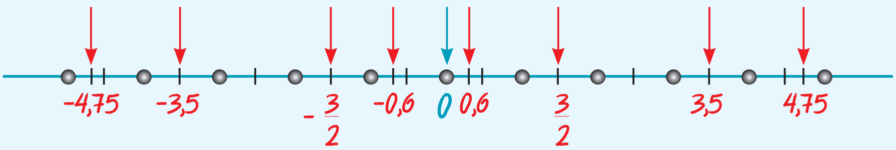
Μια κρύα μέρα του χειμώνα ο Κώστας κοιτούσε τη θερμοκρασία κάθε δύο ώρες. Οι ενδείξεις του θερμομέτρου, που έβλεπε, φαίνονται παρακάτω:



➢ *Μπορείς να καταγράψεις όλες τις ενδείξεις του θερμομέτρου με αύξουσα ή φθίνουσα σειρά;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

▶ Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.

$$-4{,}75 < -3{,}5 < -\frac{3}{2} < -0{,}6 < 0 < 0{,}6 < +\frac{3}{2} < +3{,}5 < +4{,}75$$

◆ Το **μηδέν** είναι **μικρότερο** από κάθε θετικό αριθμό και **μεγαλύτερο** από κάθε αρνητικό αριθμό.

π.χ. $0 < 2{,}9$ και $-3{,}8 < 0$

◆ Ο **μεγαλύτερος** από δύο **θετικούς ρητούς** είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

$+2{,}67 < +5{,}89$
διότι
$|2{,}67| < |5{,}89|$

◆ Ο **μεγαλύτερος** από δύο **αρνητικούς ρητούς** είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

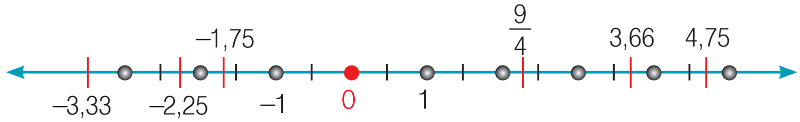
$-6{,}8 < -3{,}7$
διότι
$|-6{,}8| = 6{,}8 > 3{,}7 = |-3{,}7|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Στον άξονα των αριθμών να τοποθετηθούν οι αριθμοί:*

(α) –2,25, (β) –3,33, (γ) –1,75, (δ) $+\frac{9}{4}$*, (ε) +4,75 και (στ) +3,66.*

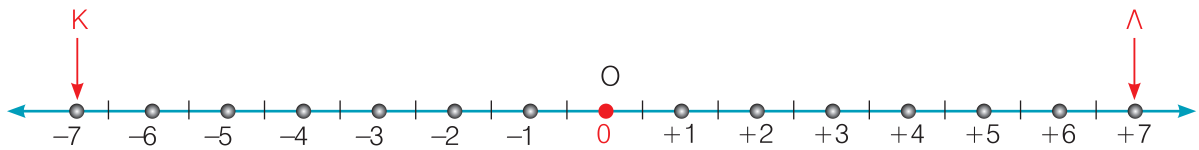
Λύση



$-3{,}33 < -2{,}25 < -1{,}75 < +\frac{9}{4} < +3{,}66 < +4{,}75$

2. *Το σημείο Κ έχει τετμημένη –7. Να βρεθεί το σημείο Λ με αντίθετη τετμημένη.*

Λύση

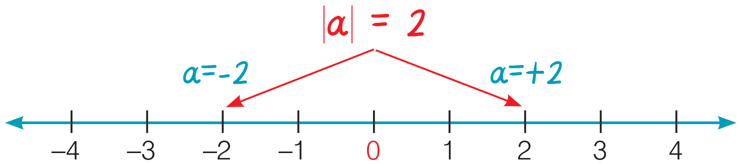


Πάνω σε άξονα x'Οx βρίσκουμε το σημείο Κ με τετμημένη -7.
Τότε το Λ έχει τετμημένη τον αριθμό +7.

3. *Εάν η απόλυτη τιμή του αριθμού α είναι 2, να βρεθεί ο αριθμός α.*

Λύση

Εφόσον $|α|=2$ τότε ο αριθμός α θα είναι, είτε το +2 είτε το –2, διότι $|+2| = 2$ και $|-2| = 2$.



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί -2 και +2, έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Η απόσταση του σημείου, με το οποίο αναπαριστάνεται ένας ρητός αριθμός, από την αρχή του άξονα λέγεται .... του αριθμού και είναι πάντα .... αριθμός.

(β) Δύο ρητοί αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και είναι ετερόσημοι λέγονται ....

(γ) Αν ένας αριθμός α είναι θετικός ο αντίθετός του είναι ....
Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ίση με 6 τότε ο αριθμός είναι ο ...... ή ο ..... .

(δ) Από δύο θετικούς ρητούς μικρότερος είναι εκείνος που έχει την .... απόλυτη τιμή.

(ε) Από δύο αρνητικούς ρητούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει την .... απόλυτη τιμή.

2. Να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός	–2,73	+7,66	–1,05	0	+8,07	–8
Απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί από την αρχή του άξονα						

3. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Ισχύει η ανισότητα: $-5,7 < 5,7$.		
(β)	Ισχύει η ανισότητα: $-7,6 > -6,7$.		
(γ)	Στην ανισότητα $2,3 < x < 4,7$ ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές.		
(δ)	Υπάρχουν 5 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq +2$.		
(ε)	Δύο ακέραιοι με αντίθετο πρόσημο είναι αντίθετοι.		

4. Βρες την απόλυτη τιμή των ρητών: (α) +7,25, (β) –2,5, (γ) +16, (δ) –20,05, (ε) –58.

5. Βρες τους αριθμούς που έχουν ως απόλυτη τιμή: (α) 100, (β) 21,7, (γ) 0, (δ) 7,03, (ε) 5,2.

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Αριθμός	1			–19				
Αντίθετος					–8	12		
Απόλυτη τιμή		2					7	

7. Τοποθέτησε στον άξονα x'Ox τα σημεία με τετμημένες: –9, –5,5, +8, –3, –7,25, +1, +12, +3, +9. Ποια από αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;

8. Σχεδίασε τον άξονα x'Ox, με κατάλληλη μονάδα για να παραστήσεις τα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς: –20,5, +15, –39,75, –68,25, +70, +52,25, +43, –69.

9. Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) +41 και +38, (β) 9 και 11, (γ) –3 και –2, (δ) –9 και –16, (ε) 7 και –8, (στ) 0 και –3, (ζ) 0 και +4.

10. Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) 11, –11 και $|11|$, (β) –3, +3 και $|3|$. Τι συμπεραίνεις;

11. Να γράψεις τους αριθμούς: –2, +7, +15, –3, 0, –4, +5, –8 και –10 σε αύξουσα σειρά.

12. Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο: <, > ή = τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις: (α) –3 ... –8, (β) –4 ... 10, (γ) 0 ... –1, (δ) +3 ... 0, (ε) –5 ... $-|-5|$, (στ) –5 ... –(+5), (ζ) $|+7|$ ... $|-7|$, (η) –(–8) ... –8, (θ) +3 ... –(+4), (ι) 0 ... $-|-4|$.

13. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις: (α) $-13 < x < -8$, (β) $-4 > x > -5$, (γ) $-2 < x < 5$.

Α.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που περιγράφονται στον πρώτο πίνακα, να βρεις στον δεύτερο πίνακα την πρόσθεση που της αντιστοιχεί και τέλος το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον τρίτο πίνακα.

1 *Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη αύξηση ήταν 8 € και η δεύτερη 6 €*	α (+8) + (-6)	Ι −14 *Μειώθηκε κατά 14 €*
2 *Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη μείωση ήταν 8 € και η δεύτερη 6 €*	β (-8) + (+6)	ΙΙ +2 *Αυξήθηκε κατά 2 €*
3 *Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 8 € και μετά μειώθηκε κατά 6 €*	γ (+8) + (+6)	ΙΙΙ −2 *Μειώθηκε κατά 2 €*
4 *Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε κατά 8 € και μετά αυξήθηκε κατά 6 €*	δ (-8) + (-6)	ΙV +14 *Αυξήθηκε κατά 14 €*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Για να **προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς** αριθμούς, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

  (+8,5) + (+6,2) = +14,7
  (-8,5) + (-6,2) = -14,7

- Για να **προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς** αριθμούς, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

  (+8,5) + (-6,2) = +2,3
  (-8,5) + (+6,2) = -2,3

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Παρατηρούμε ότι:

$(+1{,}5) + (-2{,}3) = -0{,}8$

$(-2{,}3) + (+1{,}5) = -0{,}8$

Γενικά ισχύει ότι:

▶ **Αντιμεταθετική ιδιότητα**
(Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος)

$\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$

$(-1{,}4) + [(+2{,}7) + (-3{,}1)] = (-1{,}4) + (-0{,}4) = -1{,}8$

$[(-1{,}4) + (+2{,}7)] + (-3{,}1) = (+1{,}3) + (-3{,}1) = -1{,}8$

▶ **Προσεταιριστική ιδιότητα**

$\boxed{\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta) + \gamma}$

$(+1{,}5) + 0 = +1{,}5$

$0 + (-2{,}3) = -2{,}3$

▶ Το **άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν** ισούται με τον **ίδιο τον ρητό.**

$\boxed{\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha}$

$(+\frac{9}{4}) + (-\frac{9}{4}) = 0$ ή

$(-\frac{9}{4}) + (+\frac{9}{4}) = 0$

▶ Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

$\boxed{\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0}$

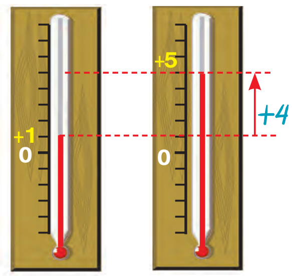
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Σε μια πόλη παρατηρήθηκαν οι παρακάτω αυξομειώσεις της θερμοκρασίας:*

	Αρχικές θερμοκρασίες		Αυξομειώσεις θερμοκρασίας
(α)	Βράδυ	+1°C	την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 4°C
(β)	Μεσημέρι	–1°C	το βράδυ μειώθηκε κατά 2°C
(γ)	Βράδυ	–2°C	την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 5°C
(δ)	Μεσημέρι	+5°C	το βράδυ μειώθηκε κατά 7°C
(ε)	Μεσημέρι	–3°C	το βράδυ μειώθηκε κατά 3°C

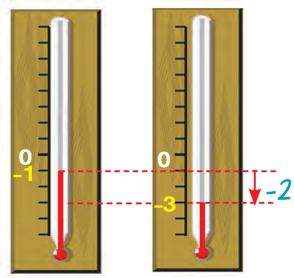
Ποια ήταν η τελική θερμοκρασία σε κάθε περίπτωση;

Λύση



(α) Την επομένη ημέρα η θερμοκρασία έχει αυξηθεί κατά 4°C, δηλαδή έχει μεταβληθεί κατά +4°C.
Η θερμοκρασία θα είναι 5°C πάνω από το μηδέν, διότι:

$$(+1) + (+4) = +5$$

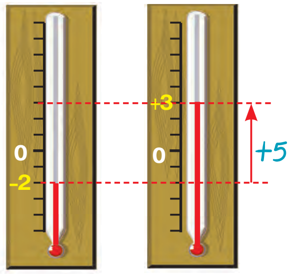


(β) Από –1°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 2°C, άρα μεταβλήθηκε κατά –2°C.
Η νέα θερμοκρασία είναι –3°C, διότι έχουμε:

$$(-1) + (-2) = -3$$

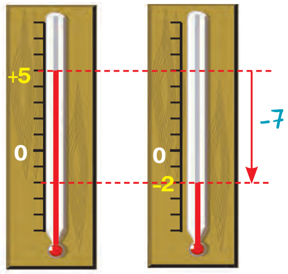
(γ) Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία από –2°C, αυξήθηκε κατά 5°C, δηλαδή έχουμε μια μεταβολή +5°C.
Η θερμοκρασία έφτασε στους +3°C, διότι:

$(-2) + (+5) = +3$



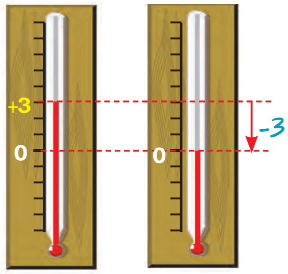
(δ) Η αρχική θερμοκρασία ήταν +5°C και μειώθηκε κατά 7°C, δηλαδή έχουμε μια μεταβολή κατά –7°C.
Η θερμοκρασία έγινε, τελικά –2°C, διότι:

$(+5) + (-7) = -2$



(ε) Από 3°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 3°C, δηλαδή μεταβλήθηκε κατά –3°C.
Η θερμοκρασία έγινε τελικά 0°C, διότι:

$(+3) + (-3) = 0$



2. *Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:*

(α) (+5,6) + (+8,7) + (–3,2) + (–6,9) + (+3,2) + (–7,4) και

(β) (–1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (–4,8) + (–3,4) + (+1,5).

Λύση

(α) $(+5{,}6) + (+8{,}7) + (-3{,}2) + (-6{,}9) + (+3{,}2) + (-7{,}4) =$

$= (+5{,}6) + (+8{,}7) + (+3{,}2) + (-3{,}2) + (-6{,}9) + (-7{,}4) =$

(χωρίζουμε τους αρνητικούς από τους θετικούς)

$= (+17{,}5) + (-17{,}5) = 0$

(προσθέτουμε χωριστά τους αρνητικούς και τους θετικούς)

(β) $(-1{,}8) + (+4{,}8) + (+9{,}7) + (-4{,}8) + (-3{,}4) + (+1{,}5) =$

$= (-1{,}8) + (-4{,}8) + (-3{,}4) + (+4{,}8) + (+9{,}7) + (+1{,}5) =$

$= (-10) + (+16) = +6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Στους ρητούς αριθμούς η πρόσθεση σημαίνει πάντα αύξηση.		
(β)	Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί.		
(γ)	Αν α+β=0, (α, β≠0) τότε οι α και β είναι αντίθετοι ρητοί αριθμοί.		
(δ)	Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι θετικοί αριθμοί.		
(ε)	Το άθροισμα ενός ρητού και του αντίθετου αυτού είναι πάντα μηδέν.		

2. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) (+4,05) + (+6,15), (β) (+5,03) + (+4,07), (γ) (+2,7) + (+97,3),
(δ) (+2,6) + (+11,4), (ε) (+7,25) + (+8,75), (στ) (–3,5) + (–2,5),
(ζ) (–1,3) + (–5,2), (η) (–7,15) + (–4,85), (θ) (–5,25) + (–9,75), (ι) (–13,7) + (–6,3).

3. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) (+4,05) + (–6,15), (β) (+5,03) + (–4,07), (γ) (–2,7) + (+97,3),
(δ) (–2,6) + (+11,4), (ε) (+7,25) + (–8,75), (στ) (+3,5) + (–2,5),
(ζ) (–1,3) + (+5,2), (η) (+7,15) + (–4,85), (θ) (–5,25) + (+9,75), (ι) (+13,7) + (–6,3).

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

+	+4	–8	–11	+17
–5				
+9				
–4				
–21				

5. Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

(α) (....6) + (–8) = –2, (β) (+5) + (....5) = 0, (γ) (+7) +(....9) = +16,
(δ) (....9) + (....8) = –17, (ε) (....6) + (....5) = +11 .

6. Εξέτασε αν είναι μαγικά τα τετράγωνα: (Μαγικά τετράγωνα είναι αυτά στα οποία η πρόσθεση των αριθμών κάθε στήλης ή γραμμής, καθώς και των διαγωνίων τους, δίνουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα).

–1	+4	–3
–2	0	+2
+3	–4	+1

+1,1	+2,4	–2,5
–0,1	+3,5	–2,4
0	–4,9	+5,9

7. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) (–3,8) + (+2,8) + (–5,4) + (+8,2) και
(β) (–3,5) + (–9,99) + (+2,5) + (–15,75) + (+20,75) + (+9,99)

8. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

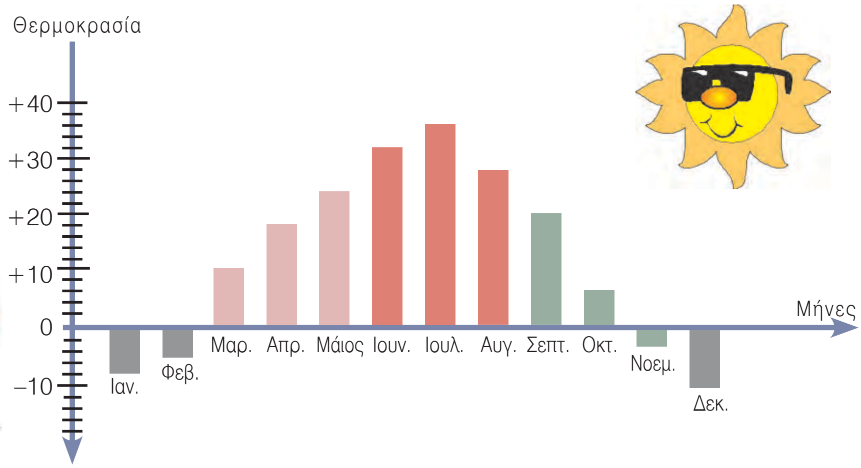
(α) $(+\frac{9}{4}) + (-\frac{5}{4}) + (+\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{3}) + (+\frac{7}{13}) + (-\frac{20}{13})$ και

(β) $(+\frac{1}{7}) + (-\frac{5}{7}) + (+\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{35})$.

Α.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία μιας περιοχής για τους 12 μήνες του χρόνου σε συγκεκριμένη ώρα της ημέρας.



- ➢ *Ποιος είναι ο πιο ζεστός μήνας του έτους και ποιος ο πιο κρύος;*
- ➢ *Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ αυτών των μηνών;*
- ➢ *Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό α τον αριθμό β, **προσθέτουμε** στον α τον **αντίθετο** του β.

$$\boxed{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

$(+8{,}5) - (+6{,}2) = (+8{,}5) + (-6{,}2) =$
$= 8{,}5 - 6{,}2 = 2{,}3$

$(+8{,}5) - (-6{,}2) = (+8{,}5) + (+6{,}2) =$
$= 8{,}5 + 6{,}2 = 14{,}7$

- Στους ρητούς αριθμούς **η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση** και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).

Απαλοιφή παρενθέσεων

Σε αρκετές περιπτώσεις αριθμητικών παραστάσεων εμφανίζονται περισσότεροι του ενός αριθμοί με τα πρόσημά τους μέσα σε παρενθέσεις, μπροστά από τις οποίες μπορεί να υπάρχουν τα πρόσημα + ή – . Για να απαλείψουμε τις παρενθέσεις εργαζόμαστε ως εξής:

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$

$(9{,}1-6{,}2+3{,}4) + (-7{,}5+10-8{,}3) =$
$= 9{,}1-6{,}2 + 3{,}4-7{,}5 + 10-8{,}3$

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το –, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το – και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

$(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$

$-(9{,}1-6{,}2+3{,}4)-(-7{,}5+10-8{,}3) =$
$= -9{,}1+6{,}2-3{,}4+7{,}5-10+8{,}3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ένα βράδυ το θερμόμετρο στο μπαλκόνι ενός σπιτιού έδειχνε –3 °C και μέσα στο σπίτι 18 °C. Πόση ήταν η διαφορά θερμοκρασίας;*

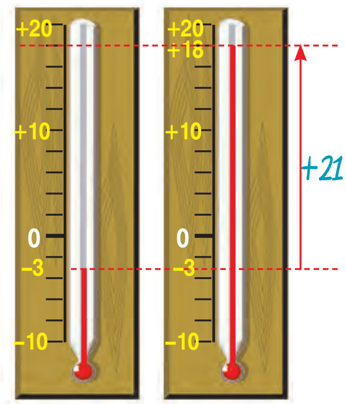
Λύση

Το πρόβλημα ζητάει να υπολογίσουμε τη διαφορά των θερμοκρασιών, δηλαδή τη διαφορά $(+18) - (-3)$.

Αν παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του εσωτερικού του σπιτιού και του εξωτερικού του ήταν +21 °C.

Σύμφωνα με τον ορισμό της αφαίρεσης ρητών θα έχουμε:

$(+18) - (-3) = (+18) + (+3) = (+21)$.



2. *Ένας έμπορος χρωστάει στον προμηθευτή του 897,56 € και του οφείλει ένας πελάτης 527,42 €. Πόσα € πρέπει να έχει στο ταμείο για να ξεχρεώσει;*

Λύση

Αν x είναι το ποσό των χρημάτων που χρειάζεται, θα είναι:

$x + (+527,42) = +897,56$. Γνωρίζουμε ότι: $x = (+897,56) - (+527,42)$.

Σύμφωνα με τον κανόνα της αφαίρεσης ρητών, έχουμε ότι:

$x = (+897,56) + (-527,42)$. Άρα, $x = +(897,56 - 527,42)$ ή $x = +370,14$ €.

3. *Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $x + (+3) = (-9)$, (β) $(-8) - x = +7$.*

Λύση

(α) Αν είναι: $x + (+3) = (-9)$ τότε $x = (-9) - (+3)$ ή $x = (-9) + (-3)$ ή $x = (-12)$.
Δηλαδή, $x = -12$.

(β) Εφ' όσον $(-8) - x = +7$ θα ισχύει ότι: $(-8) = (+7) + x$ και επίσης:
$x = (-8) - (+7)$ ή $x = (-8) + (-7)$ δηλαδή $x = -15$.

4. *Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11)$.*

Λύση

Έχουμε: $-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11) =$
$= -13 - 0,38 + 11 + 13 + 0,38 - 11 =$
$= -13 + 13 - 0,38 + 0,38 - 11 + 11 =$
$= 0 + 0 + 0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση.		
(β) Αν η διαφορά δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί.		
(γ) Ισχύει στην αφαίρεση η αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha - \beta = \beta - \alpha$.		
(δ) Ισχύει ότι: $6 - (+8) + (+5) + (-3) + (2) + (-1) = 0$.		
(ε) Λύση της εξίσωσης $x + (-3) = -2$ είναι ο αριθμός $+1$.		
(στ) Οι εξισώσεις $x+(-2)=+5$ και $x-(+7)=-10+(+5)$ έχουν την ίδια λύση.		
(ζ) Λύση της εξίσωσης $x - (-2) = -8 + (+7) - (-4)$ είναι ο αριθμός $+1$.		

2. Υπολόγισε τις διαφορές:
(α) $5 - (-7)$, (β) $-8 - (+8)$, (γ) $-2 - (-15{,}2)$, (δ) $14{,}55 - 18{,}45$, (ε) $-\frac{2}{7} - (-\frac{2}{7})$.

3. Κάνε τις πράξεις:
(α) $|+3| + |-2| + |-9|$, (β) $|-20| + |-10| - |+10|$, (γ) $|-3| - |-2| + |-5| - |+6|$.

4. Κάνε τις πράξεις:
(α) $(+5) - (+3) + (+8)$, (β) $(-25) + (-4) - (-10)$, (γ) $(+12) + (+2) - (-8)$.

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς:

α	β	α+β	α–β
+3		–5	
	–8	+10	
–2	–5		
–9		+6	

6. Να λύσεις τις εξισώσεις: (α) $x + (-8) = -18$, (β) $x + 12 = -14$, (γ) $x + \frac{5}{4} = \frac{7}{8}$,
(δ) $x - \frac{5}{4} = 2$.

7. Συμπλήρωσε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα:
Τι συμπεραίνεις για τους αριθμούς των δύο αυτών στηλών;

α	β	α–β	β–α
7	3		
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$		
–5,55	–2,45		
3	–2,1		

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους: (α) $11-(12-2)+(10-5)-(8+5)$,
(β) $-(13{,}7-2{,}6)+14{,}8-(-8{,}7+5)$, (γ) $\frac{1}{6}-(\frac{3}{4}-\frac{5}{4})-(\frac{7}{12}+\frac{5}{6})$.

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	3,5		1,89	$-\frac{1}{4}$
y	–1,5	4,3		$-\frac{1}{4}$
z		–2,3	3,11	
x+y+z	0		0,22	$\frac{1}{2}$
x–y–z		0		

Α.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας έμπορος διαπίστωσε, ότι κάθε ημέρα του τελευταίου δεκαήμερου των εκπτώσεων έβγαζε κέρδος 524,5€.
Το επόμενο, όμως, δεκαήμερο είχε καθημερινή ζημιά 265,4€.

Είναι γνωστό, ότι στα λογιστικά βιβλία το κέρδος καταχωρείται ως θετική εγγραφή και η ζημιά ως αρνητική.

Δηλαδή, το συνολικό κέρδος για το δεκαήμερο των εκπτώσεων θα είναι (+524,5€) • (+10 ημέρες) και για το επόμενο δεκαήμερο η συνολική ζημιά θα είναι (–265,4€) • (+10 ημέρες)

- *Προσπάθησε να βρεις το αποτέλεσμα των παραπάνω πράξεων χωρίς να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.*
- *Τι παρατηρείς για το πρόσημο των αποτελεσμάτων;*

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι:

- Το γινόμενο δύο **θετικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.
- Το γινόμενο ενός **θετικού** και ενός **αρνητικού** ρητού είναι **αρνητικός** ρητός.

Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων.

$(-10) \cdot (+9) = -90$
$(-10) \cdot (+8) = -80$
$(-10) \cdot (+7) = -70$
$(-10) \cdot (+6) = -60$
$(-10) \cdot (+5) = -50$
$(-10) \cdot (+4) = -40$
$(-10) \cdot (+3) = -30$
$(-10) \cdot (+2) = -20$
$(-10) \cdot (+1) = -10$
$(-10) \cdot 0 = 0$
$(-10) \cdot (-1) =$;
$(-10) \cdot (-2) =$;
$(-10) \cdot (-3) =$;
$(-10) \cdot (-4) =$;
....

Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το –10, και ο άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά.

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10.

Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι:

$(-10) \cdot (-1) = +10 = +(10 \cdot 1)$
$(-10) \cdot (-2) = +20 = +(10 \cdot 2)$
$(-10) \cdot (-3) = +30 = +(10 \cdot 3)$
$(-10) \cdot (-4) = +40 = +(10 \cdot 4)$
....

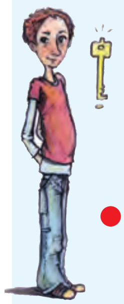
Διαπιστώνουμε επομένως ότι:

- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων είναι **θετικός** ακέραιος.

Γενικότερα:

- Το γινόμενο δύο **αρνητικών** ρητών είναι **θετικός** ρητός.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

  Δηλαδή: $+ \cdot + = +$ και $- \cdot - = +$

  $(+1{,}5) \cdot (+2{,}2) = (+3{,}3)$

  $(-1{,}5) \cdot (-2{,}2) = (+3{,}3)$

- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «–».

  Δηλαδή: $+ \cdot - = -$ και $- \cdot + = -$

  $(+1{,}5) \cdot (-2{,}2) = (-3{,}3)$

  $(-1{,}5) \cdot (+2{,}2) = (-3{,}3)$

Ο Διόφαντος πρώτος εισάγει την έννοια «ΛΕΙΨΙΣ» (αρνητικός) διατυπώνοντας τους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έκφραση:

«ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΛΕΙΨΙΝ ΠΟΙΕΙ ΥΠΑΡΞΙΝ, ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΥΠΑΡΞΙΝ ΠΟΙΕΙ ΛΕΙΨΙΝ»

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Παρατηρούμε ότι:

$(+1{,}5) \cdot (-2{,}2) = -3{,}3$

$(-2{,}2) \cdot (+1{,}5) = -3{,}3$

Γενικά ισχύει ότι:

- **Αντιμεταθετική ιδιότητα**
  (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου)

  $\boxed{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$

$(-0{,}5) \cdot [(+2{,}2) \cdot (-3{,}5)] = (-0{,}5) \cdot (-7{,}7) = +3{,}85$

$[(-0{,}5) \cdot (+2{,}2)] \cdot (-3{,}5) = (-1{,}1) \cdot (-3{,}5) = +3{,}85$

- **Προσεταιριστική ιδιότητα**

  $\boxed{\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$

$1 \cdot (+1{,}5) = (+1{,}5) \cdot 1 = +1{,}5$

$1 \cdot (-2{,}2) = (-2{,}2) \cdot 1 = -2{,}2$

- Το **γινόμενο ενός ρητού αριθμού** με τη **μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό**.

  $\boxed{1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha}$

$0{,}15 \cdot (-5) + 1{,}85 \cdot (-5) =$

$(-0{,}75) + (-9{,}25) = -10$

ή $(0{,}15 + 1{,}85) \cdot (-5) = 2 \cdot (-5) = -10$

- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

  $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ και $\boxed{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$

$(+3) \cdot (+\frac{1}{3}) = +(3 \cdot \frac{1}{3}) = 1$

$(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{3}{2}) = +(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}) = 1$

$(-0{,}25) \cdot (-4) = +(0{,}25 \cdot 4) = 1$

- Οι ρητοί αριθμοί **α** και **β** λέγονται **αντίστροφοι**, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα:

  $\boxed{\alpha \cdot \beta = 1}$

  Ο καθένας από τους **α** και **β** είναι αντίστροφος του άλλου.

$(-1{,}3) \cdot 0 = 0$ ή $0 \cdot (+\frac{2}{3}) = 0$

- Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν. $\boxed{0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0}$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Πώς εργαζόμαστε όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες;

Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θετικών ρητών είναι πάντα θετικό. Αν υπάρχει ένας παράγοντας που είναι αρνητικός μετατρέπει το γινόμενο σε αρνητικό. Στην περίπτωση που υπάρχει και δεύτερος αρνητικός παράγοντας ξαναμετατρέπει το γινόμενο σε θετικό κ.ο.κ.
Άρα:

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
  - Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** *(ζυγό)*.
  - Το πρόσημο –, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** *(μονό)*.
- Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Το σημείο του πολλαπλασιασμού «•» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) $(-1,4)\cdot 5$, (β) $(+\frac{2}{3})\cdot(-2,1)$, (γ) $(-10)\cdot(-0,7)$.*

Λύση

(α) $(-1,4)\cdot 5 = -(1,4\cdot 5) = -7$

(β) $(+\frac{2}{3})\cdot(-2,1) = -(\frac{2}{3}\cdot 2,1) = -1,4$

(γ) $(-10)\cdot(-0,7) = +(10\cdot 0,7) = +7$

2. *Να υπολογιστεί το γινόμενο $(-1)\alpha$, όταν το α παίρνει τις τιμές: $+3$, $-1,2$, $+\frac{2}{3}$, -2.*

Λύση

Για $\alpha = +3$ είναι: $(-1)(+3) = -3$

Για $\alpha = -1,2$ είναι: $(-1)(-1,2) = +1,2$

Για $\alpha = +\frac{2}{3}$ είναι: $(-1)(+\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$

Για $\alpha = -2$ είναι: $(-1)(-2) = +2$

3. *Να δειχθεί ότι: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$.*

Λύση

Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:

$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta)\gamma + (\alpha+\beta)\delta = \alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$

4. *Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων: $(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25)$.*

Λύση

$(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25) =$ *(πλήθος αρνητικών παραγόντων 4)*

$= +(1\cdot 20\cdot \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 0,25) = +(20\cdot 2\cdot 0,25) = +(40\cdot 0,25) = +10$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά:

(α) Το πρόσημο του γινομένου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα ....

(β) Το πρόσημο του γινομένου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα ....

(γ) Ένας ρητός όταν πολλαπλασιάζεται με το 1 δεν ....

(δ) Το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι πάντα ίσο με ....

(ε) Το πρόσημο γινομένου πολλών παραγόντων εξαρτάται από το πλήθος των .... παραγόντων.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $(–1)(–1)$, (β) $–3(–10)$, (γ) $–1,2(–0,5)$, (δ) $0(–10589)$, (ε) $1(–20015)$, (στ) $–0,725(+1000)$, (ζ) $\frac{12}{25}(-\frac{15}{24})$.

3. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με τις λιγότερες δυνατές πράξεις:

(α) $–5\cdot 27 + 2\cdot 27$, (β) $10,35(–25) + 9,65(–25)$, (γ) $-\frac{6}{7}(-10)+(-\frac{6}{7})(+3)$.

4. Συμπλήρωσε τον διπλανό πίνακα:

$\bullet$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+2$	$+3$
-2					
$-3,2$					
$+\frac{3}{2}$					
$+10$					

5. Κάνε τις πράξεις: (α) $–7(–8+10–5)$, (β) $(0,25–0,05)(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8})$, (γ) $-10-6(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$.

6. Κάνε τις πράξεις: (α) $(5+α)(2+β)$, (β) $(α+7)(α–7)$, (γ) $(α–3)(β–3)$, (δ) $(γ+8)(δ+5)$.

7. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $(–1)(–1)$, (β) $(–1)(–1)(–1)$, (γ) $(–1)(–1)(–1)(–1)$.

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

$Α = (α–1)(α+1)(α–2)(α+2)$, όταν $α = 3$

$Β = β(β–3)(β+3)(β–5)(β+5)$, όταν $β = 2$

$Γ = γ(2γ–1)(3γ+1)(4γ–2)(γ+2)(γ–2)$, όταν $γ=0,5$

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	y	z	ω	Α=xyz	Β=yxω	Γ=xΑ–Β	ΑΒ+Γ
-2	$0,5$	$+1$	-3				
$-\frac{1}{2}$	$+6$	-4	$-0,3$				
-2	$+\frac{3}{2}$	$0,2$	-7				

Α.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Για να **διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς**, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:
  - το πρόσημο +, αν είναι **ομόσημοι**. Δηλαδή:

    $+ : + = +$ και $- : - = +$
  - το πρόσημο –, αν είναι **ετερόσημοι**. Δηλαδή:

    $+ : - = -$ και $- : + = -$

$(+11{,}22) : (+2{,}2) = (+5{,}1)$

$(-11{,}22) : (-2{,}2) = (+5{,}1)$

$(+11{,}22) : (-2{,}2) = (-5{,}1)$

$(-11{,}22) : (+2{,}2) = (-5{,}1)$

- Το πηλίκο της διαίρεσης α:β ή $\frac{α}{β}$ λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης **β·x=α**.

Ο λόγος του -20 προς το 4 είναι:

$(-20):(+4) = \frac{-20}{+4} = -5$ διότι $(+4) \cdot (-5) = (-20)$

Ο λόγος του -7 προς το -2 είναι:

$(-7):(-2) = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ διότι $(-2) \cdot \frac{7}{2} = (-7)$

- Η διαίρεση $\frac{α}{β}$ μπορεί και να γραφεί $α \cdot \frac{1}{β}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{α}{β} = α \cdot \frac{1}{β}$$

$(-3) : (-4) = \frac{-3}{-4} = -3 \cdot (-\frac{1}{4})$

$6 : (-7) = \frac{6}{-7} = 6 \cdot (-\frac{1}{7})$

$(-5) : (+2) = \frac{-5}{2} = -5 \cdot (\frac{1}{2})$

- **Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα πηλίκα:*

(α) (+1,5):(+5), (β) $(+\frac{2}{3}):(-\frac{7}{5})$*, (γ) (–0,45):(–0,15).*

Λύση

(α) $(+1{,}5) : (+5) = +(1{,}5 : 5) = +0{,}3$

(β) $(+\frac{2}{3}) : (-\frac{7}{5}) = -(\frac{2}{3} : \frac{7}{5}) = -(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}) = -\frac{10}{21}$

(γ) $(-0{,}45) : (-0{,}15) = +(0{,}45 : 0{,}15) = +3$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις: (α) $-6x = -24$, (β) $-3x = +15$, (γ) $x : (-2) = -3$.

Λύση

(α) $-6x = -24$
$x = (-24) : (-6)$
$x = +(24 : 6)$
$x = +4$

(β) $-3x = +15$
$x = (+15) : (-3)$
$x = -(15 : 3)$
$x = -5$

(γ) $x : (-2) = -3$
$x = (-3) \cdot (-2)$
$x = +(3 \cdot 2)$
$x = +6$

3. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $[\frac{2}{3}(-3)-(-2)(-9)] : [0,4(-10)-(-0,2)(-5)]+7$.

Λύση

$[\frac{2}{3}(-3)-(-2)(-9)] : [0,4(-10)-(-0,2)(-5)]+7 =$

$= [-(\frac{2}{3}\cdot 3)-(2\cdot 9)] : [-(0,4\cdot 10)-(0,2\cdot 5)]+7 =$ (κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)

$= (-2-18) : (-4-1) + 7 =$

$= (-20) : (-5) + 7 =$ (κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις)

$= +(20 : 5) + 7 =$

$= +4 +7 =$ (κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

$= +11$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:
(α) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα ....
(β) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα ....
(γ) Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το .... με τον αντίστροφο του ....
(δ) Ένα πηλίκο α : β λέγεται και .... του α προς το β.

2. Κάνε τις διαιρέσεις:
(α) $(+15,15) : (+3)$, (β) $(-4,5) : (-1,5)$, (γ) $(-81) : (+0,9)$, (δ) $49 : (-7)$.

3. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	y	x+y	x−y	xy	x:y
$\frac{-7}{3}$	$\frac{5}{-6}$				
1,7	2,3				
$-\frac{4}{5}$	–1				

4. Υπολόγισε τα πηλίκα: (α) $\frac{10}{0,25}$, (β) $\frac{-0,75}{-0,5}$, (γ) $\frac{-120}{(-12)+(-8)}$, (δ) $(-3\frac{1}{5}):(-2\frac{2}{3})$.

5. Λύσε τις εξισώσεις: (α) $-3x = 74$, (β) $-0,14x = -49$, (γ) $x(-2) = 12$, (δ) $\frac{2}{3}x = -\frac{4}{6}$.

6. Κάνε τις πράξεις: (α) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{-6} - \frac{12}{-15}$, (β) $-\frac{(-2)(-5)(-1)}{-10}$, (γ) $(\frac{-7}{3}-\frac{5}{-3}):(-\frac{3}{2})$.

7. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης: $[(-8)(\frac{-7}{64})-(-15) : (-8)](-8)+(-27) : (-\frac{9}{8})$.

Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Τέσσερις μαθητές, ο Κώστας, η Μαρία, η Ελένη και ο Γιώργος, πήγαν στο γήπεδο του σχολείου τους για να τρέξουν γύρω από αυτό. Ένας γύρος του γηπέδου είναι 400 μέτρα. Ο Κώστας έτρεξε το $\frac{1}{10}$ του γύρου, η Μαρία έτρεξε το $\frac{1}{4}$ του γύρου, η Ελένη έτρεξε μισό γύρο και ο Γιώργος έτρεξε το $\frac{1}{9}$ του γύρου.

➤ *Ποιό είναι το ακριβές μήκος σε μέτρα που έτρεξε το καθένα από τα παιδιά;*

Σκεφτόμαστε

Για να βρούμε πόσα μέτρα έτρεξε ο Κώστας διαιρούμε το 400 με το 10 και βρίσκουμε: 400 : 10 = 40 μέτρα. Με τον ίδιο τρόπο, για τη Μαρία βρίσκουμε: 400 : 4 = 100 μέτρα και για την Ελένη 400 : 2 = 200 μέτρα.
Όταν φτάσουμε στον Γιώργο, κάνοντας τη διαίρεση του 400 με το 9 παρατηρούμε ότι η διαίρεση δεν είναι τέλεια, αλλά δίνει πηλίκο 44 και υπόλοιπο 4. Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι πάντα το ίδιο, τα δεκαδικά ψηφία θα επαναλαμβάνονται και θα είναι όλα ίσα με 4. Έτσι, το πηλίκο θα είναι ο δεκαδικός αριθμός 44,44...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να βρεις, με όση ακρίβεια μπορείς, το πηλίκο της διαίρεσης 101 διά 44.

Σκεφτόμαστε

Βλέπουμε ότι η διαίρεση 101: 44 δεν είναι τέλεια. Δίνει ακέραιο πηλίκο 2 και υπόλοιπο 13.
Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση θα βρούμε τον δεκαδικό αριθμό 2,295454... με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τέτοια ώστε, μετά το δεύτερο δεκαδικό (το 9) να επαναλαμβάνονται συνεχώς τα ίδια δύο ψηφία (5 και 4), δηλαδή 545454...

101,00000...	44
130	2,295454...
420	
240	
200	
240	
....	

Μαθαίνουμε

- Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε **περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.**
- Το τμήμα των επαναλαμβανομένων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος.**

Γενικότερα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι:

► Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού και συμβολίζεται όπως φαίνεται στα παραδείγματα.

π.χ. $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$ και $\frac{1.000.000}{7} = 142857,\overline{142857}.$

Προηγουμένως, είδαμε με ποιον τρόπο ένας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.
Γεννιέται, όμως, το ερώτημα αν μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μπορούμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό να τον γράψουμε με μορφή ρητού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί: (α) $0,\overline{2}$ και (β) $1,\overline{64}$.

Λύση

(α) Θέτουμε $x = 0,\overline{2}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x &= 0,222... \\ 10x &= 2,222... \\ 10x &= 2 + 0,222... \\ 10x &= 2 + x \\ 9x + x &= 2 + x \\ 9x &= 2 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

(β) Αν $x = 1,\overline{64}$ έχουμε

$$\begin{aligned} x &= 1,646464... \\ 100x &= 164,646464... \\ 100x &= 164 + 0,646464... \\ 100x &= 164 + x - 1 \\ 99x + x &= 163 \\ 99x &= 163 \\ x &= \frac{163}{99} \end{aligned}$$

Δηλαδή: $1,\overline{64} = \frac{163}{99}$

Συμπεραίνουμε ότι:

► Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών: (α) $-\frac{15}{10}$, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{13}{14}$, (δ) $\frac{20}{11}$, (ε) $\frac{32}{31}$.*

2. *Βρες την κλασματική μορφή των αριθμών:*
(α) 57,92, (β) $2,\overline{8}$, (γ) $3,\overline{83}$, (δ) $7,4\overline{561}$, (ε) $15,3\overline{99}$.

3. *Βρες μια άλλη δεκαδική μορφή των αριθμών: (α) $2,\overline{9}$, (β) $7,6\overline{9}$, (γ) $7,325\overline{9}$.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα:
"Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ' αυτόν".
Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας υπολογιστής μολύνθηκε από κάποιο ιό, ο οποίος είχε την ιδιότητα να καταστρέφει τα ηλεκτρονικά αρχεία με τον εξής τρόπο:
Κάθε μολυσμένο αρχείο μόλυνε, πριν καταστραφεί, τρία άλλα αρχεία μέσα σε μία ώρα λειτουργίας του υπολογιστή.

➢ *Προσπάθησε να βρεις, πόσα μολυσμένα αρχεία υπάρχουν στο τέλος της 5ης ώρας.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Συμβολισμοί

- Το γινόμενο $\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot \ \ldots \ \cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$ *(είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός)*, συμβολίζεται με το α^ν και λέγεται **δύναμη** με **βάση** το **α** και **εκθέτη** το φυσικό **ν>1**.

εκθέτης

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot \ \ldots \ \cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

βάση

- Για **ν = 1**, γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$.
- Η **δύναμη** α^ν διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.
- Η **δύναμη** α^2 λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο.**
- Η **δύναμη** α^3 λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +32 > 0$

$(-2)^4 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{άρτιο πλήθος}} = +16 > 0$

$(-2)^5 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{περιττό πλήθος}} = -32 < 0$

Γενικά ισχύει ότι:

► Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.

Αν **α** > 0, τότε $\alpha^\nu > 0$

► Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

Αν **α** < 0 και **ν άρτιος**, τότε $\alpha^\nu > 0$

► Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

Αν **α** < 0 και **ν περιττός**, τότε $\alpha^\nu < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι:

$(-3)^3(-3)^5 =$

$= \underbrace{\underbrace{(-3)(-3)(-3)}_{3 \text{ παράγοντες}}\underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}_{5 \text{ παράγοντες}}}_{8 \text{ παράγοντες}} =$

$= (-3)^8 = (-3)^{3+5}$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\boxed{\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}}$$

$7^8 : 7^3 = \frac{7^8}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} =$

$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 7^{8-3}$

► Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\boxed{\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}}$$

$(2 \cdot 7)^6 = (2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)$

$= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)\ (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) =$

$= 2^6 \cdot 7^6$

► Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu}$$

$\left(\frac{2}{9}\right)^5 = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} =$

$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{2^5}{9^5}$

► Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}}$$

$(8^3)^7 = 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 =$

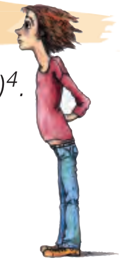
$= 8^{3+3+3+3+3+3+3} =$

$= 8^{7 \cdot 3} = 8^{21}$

► Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$\boxed{(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. *Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων: (α) -3^3, (β) $(-3)^3$, (γ) -3^4 ,(δ) $(-3)^4$.*

Λύση

(α) Η παράσταση θα είναι: $-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$

(β) Επειδή ο εκθέτης είναι περιττός, η δύναμη θα είναι αρνητικός αριθμός. Άρα, θα είναι: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -3^3 = -27$.

(γ) Η παράσταση θα είναι: $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

(δ) Επειδή ο εκθέτης είναι άρτιος, η δύναμη θα είναι θετικός αριθμός. Άρα, θα είναι: $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +3^4 = +81$

2. *Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $Π=(-2)^3 \cdot 3-3^4+(-2)^4:16+[-1-(-1)^7 \cdot 8]$.*

Λύση

Η σειρά των πράξεων είναι η εξής: **1ο** Δυνάμεις, **2ο** Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, **3ο** Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

Άρα: $Π = (-2)^3 \cdot 3-3^4+(-2)^4:16+[-1-(-1)^7 \cdot 8] = (-8) \cdot 3-81+(+16):16+[-1+8] =$
$= -24-81+1+7 = -97$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι .... αριθμός.

(β) Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη .... είναι θετικός αριθμός.

(γ) Δύναμη με βάση .... αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

(δ) Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το .... των εκθετών.

(ε) Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη ....

(στ) Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε .... του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

(ζ) Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε .... του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

(η) Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο .... των εκθετών.

2. *Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης γραμμής αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης γραμμής του παρακάτω πίνακα.*

$3+5^2$	$(3+5)^2$	$3 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2$	$3-5^2$	$(3-5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$
Διαφορά των 3 και 5^2	*Άθροισμα των 3 και 5^2*	*Γινόμενο των 3 και 5^2*	*Πηλίκο των 3^2 και 5*	*Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5*	*Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5*	*Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5*	*Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5*
75	4	28	64	0,36	225	1,8	–22

3. *Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων: $A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$,*

$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87{,}5 \cdot 4^3$, $\quad Γ = -\dfrac{(-6)^5}{3^5} - \dfrac{8^4}{(-4)^4} + \dfrac{10^3}{(-5)^3}$.

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι:

$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$, *γνωρίζουμε ότι είναι και* $\frac{5^7}{5^7} = 1$ *επομένως,* $5^0 = 1$.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- **Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.**

$$\boxed{\alpha^0 = 1}$$

Επίσης, θα είναι:

$\frac{5^7}{5^8} = 5^{7-8} = 5^{-1}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^7}{5^8} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5}$,άρα $5^{-1} = \frac{1}{5}$

$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^6}{5^8} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5^2}$,άρα $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

κ.ο.κ.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

- Η **δύναμη κάθε αριθμού**, διάφορου του μηδενός, με **εκθέτη αρνητικό** είναι ίση με κλάσμα που έχει **αριθμητή τη μονάδα** και **παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη**.

$$\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu}$$

Επειδή τα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί,

όπως και τα **α** και $\frac{1}{\alpha}$ στην προηγούμενη σχέση,

εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu}$$

- Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: (α) $(-2)^{-5}$, (β) -3^{-3}, (γ) $(-234567)^0$.

Λύση

(α) $(-2)^{-5}=\dfrac{1}{(-2)^5}=\dfrac{1}{-32}=-\dfrac{1}{32}$, (β) $-3^{-3}=-\dfrac{1}{3^3}=-\dfrac{1}{27}$, (γ) $(-234567)^0=1$

2. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $[(-3)^3]^2$, (β) $3^3 : 3^{-2}$, (γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6$, (δ) $\dfrac{12^{-3}}{3^{-3}}$.

Λύση

(α) $[(-3)^3]^2 = (-3)^{3\cdot 2} = (-3)^6 = 729$

(β) $3^3 : 3^{-2} = 3^{3-(-2)} = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

(γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^6 = (-2)^{4+6} = (-2)^{10} = 1024$

(δ) $\dfrac{12^{-3}}{3^{-3}} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{4}{1}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$

3. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}.

Λύση

$10^{-1}=\dfrac{1}{10^1}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$

$10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}=0{,}01$

$10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\dfrac{1}{1000}=0{,}001$

$10^{-4}=\dfrac{1}{10^4}=\dfrac{1}{10000}=0{,}0001$

$10^{-5}=\dfrac{1}{10^5}=\dfrac{1}{100000}=0{,}00001$

$10^{-6}=\dfrac{1}{10^6}=\dfrac{1}{1000000}=0{,}000001$

$10^{-7}=\dfrac{1}{10^7}=\dfrac{1}{10000000}=0{,}0000001$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	β	γ	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha\beta)^2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$	$(-\alpha)^{-2}$	$(\gamma\beta)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$					
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$					
10	-10	$0{,}01$					

2. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = (-1)^{-3}+(-1)^{-2}+(-1)^{-1}+(-1)^{0}+(-1)^{1}+(-1)^{2}$,

$B = [(-2)^2]^5[(-3)^2]^{-2}+[(-23{,}5)^2(23{,}5)^{-2}]^5$, $\quad \Gamma = \dfrac{(-6)^{-5}}{12^{-5}}+\dfrac{16^{-4}}{(-32)^{-4}}-\dfrac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}$.

3. Βρες ποιος από τους αριθμούς: $\frac{1}{10}$, $10^3 \cdot 5 \cdot 2$, $\frac{1}{10^3}$, 10^3+10^2, δεν είναι δύναμη του 10.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	0,001	0,01	0,1	-10	-100	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
x^{-3}										
x^3										
x^{-1}										

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

$\cdot$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
10^{-3}							
10^{-2}							
10^{-1}							
10^0							
10^1							
10^2							
10^3							

Α.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η διάμετρος ενός ατόμου υδρογόνου είναι 0,00000000016 cm.

➢ *Μπορείς να διαβάσεις και να θυμηθείς εύκολα αυτόν τον αριθμό;*

Παρατηρούμε ότι υπάρχει, αρκετή δυσκολία στη γραφή και των αριθμών που εκφράζουν πολύ μικρά μεγέθη. Όμως, η κατάλληλα προσαρμοσμένη χρήση της "τυποποιημένης μορφής" των αριθμών, που μάθαμε στην παράγραφο 3.4., για τη γραφή των πολύ μεγάλων αριθμών, μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση και της γραφής των πολύ μικρών αριθμών.

Μαθαίνουμε

- Όπως οι πολύ μεγάλοι, έτσι και οι πολύ μικροί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή: $\alpha \cdot 10^{-\nu}$, όπου α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και ν φυσικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να εκφραστεί με τυποποιημένη μορφή το βάρος ενός μορίου νερού, που είναι: 0,000000000000000000000029 gr.*

Λύση

Για να εκφράσουμε το βάρος ενός μορίου νερού με την τυποποιημένη μορφή πρέπει να βρούμε εκείνη τη δύναμη του 10 που, όταν πολλαπλασιάσει έναν δεκαδικό αριθμό με ένα μόνο ακέραιο ψηφίο, δίνει ξανά το παραπάνω βάρος. Δηλαδή:

$$\underbrace{0{,}0000000000000000000000029}_{23\ \text{θέσεις}}\ gr = 2{,}9 \cdot 10^{-23}$$

Για να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν (ο οποίος με αρνητικό πρόσημο είναι εκθέτης του 10) μετράμε πόσες θέσεις προς τα δεξιά πρέπει να μετακινηθεί η υποδιαστολή (ώστε να προκύψει ο δεκαδικός αριθμός α που έχει ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10).

2. *Να εκφραστούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:*
(α) 0,123456789, (β) 0,00000003598, (γ) 0,000008:1000000

Λύση (α) $0{,}123456789 = 1{,}23456789 \cdot 10^{-1}$, (β) $0{,}00000003598 = 3{,}598 \cdot 10^{-8}$,
(γ) $0{,}000008:1000000 = 0{,}000000000008 = 8 \cdot 10^{-12}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:*
(α) Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι 384.400.000 m.
(β) Η ηλικία της Γης είναι 4.500.000.000 έτη.
(γ) Η απόσταση Γης - Ήλιου είναι 149.600.000 km.

2. *Η μάζα του ατόμου του υδρογόνου είναι $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ gr.*
Να βρεις πόσα άτομα περιέχει 1 gr υδρογόνου.

3. *Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:*
(α) Η διάμετρος ενός πυρήνα ατόμου είναι 0,00000000000001 cm.
(β) Το βάρος ενός μορίου αλατιού είναι 0,0000000000000000000000097 gr.

Ανακεφαλαίωση

Ακέραιοι αριθμοί: ...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,.....

Ρητοί αριθμοί: Φυσικοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί (Θετικοί και Αρνητικοί)

Ομόσημοι ρητοί αριθμοί: Έχουν το ίδιο πρόσημο

Ετερόσημοι ρητοί αριθμοί: Έχουν αντίθετο πρόσημο

Απόλυτη τιμή ρητού $|\alpha|$: Εκφράζει την απόσταση σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα των ρητών

Αντίθετοι ρητοί αριθμοί: Οι ετερόσημοι με ίδια απόλυτη τιμή

Αν $\alpha > 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$ και αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha$

Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
- $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$ (α και –α, αντίθετοι)

Αφαίρεση

- $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ *(Προσεταιριστική)*
- $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$
- $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$ (α και $\frac{1}{\alpha}$ αντίστροφοι)
- $\alpha\cdot 0=0$

Διαίρεση

- $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση: $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

Προτεραιότητα Πράξεων

Δυνάμεις — Πολλαπλασιασμοί & Διαιρέσεις — Προσθέσεις & Αφαιρέσεις

Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμοί

$\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha$ (ν φορές)

Το α λέγεται **βάση** και το ν **εκθέτης**

$\alpha^0 = 1$ και $\alpha^1 = \alpha$

$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ ή $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Ιδιότητες των δυνάμεων

- $\alpha^\mu\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^\mu:\alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$

(όπου: α, β ≠0 και μ, ν φυσικοί αριθμοί)

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

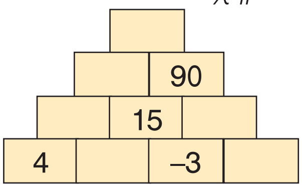
Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

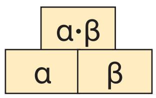
Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1. 7,2 + (–5) = 2,2		
2. –1,2 – 0,2 = –1		
3. –2,2 + 2,2 = –4,4		
4. 7,8 – 8 = 0,2		
5. 3,5 – 9 = –5,5		
6. 3,5 – 4,5 = –1		
7. 6 – 15 = –11		
8. 3 – 8,4 = –5,4		
9. 6 – 17 = –9		
10. 59 – 64 = –5		

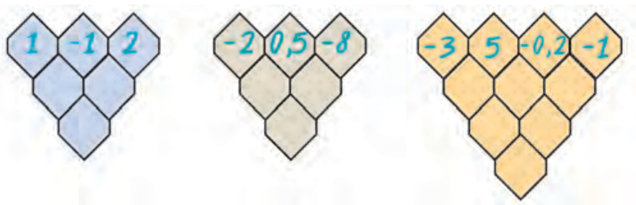
Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1. *Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:*
   (α) (...8)+(...3)+(...6)+(...5)=+4 (β) (...8)+(...3)+(...6)+(...5)=–10.
   (γ)(...3,7)+(....14,8)+(...5,2)+(...16,3)=0 (δ) (...3,7)+(...14,8)+(...5,2)+(...16,3)=–10,4.
2. *Βρες ποιο από τα Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι το μεγαλύτερο, αν γνωρίζεις ότι:*
   Α + (–1) = Β + 3 = Γ + (–3) = Δ + 4 = Ε + (–5).
3. *Βρες τα αθροίσματα:*
   (α) 1+(–2)+3+(–4)+ ... +49+(–50), (β) 1+(–2)+3+(–4)+ ... +(–198)+199.
4. *Βάλε τα γράμματα Α, Ε, Ι, Κ, Ο, Π, Ρ, Υ και Ω με αύξουσα σειρά και γράψε τη λέξη που βρήκες, όταν:* Α = 4+(–1,5), Ε = –0,8+(–4,8), Ι = –0,8+4,8, Κ = 4+1,5, Ο = 0,8+4,8, Π = 0,8+(–0,8), Ρ = 0,8+(–4,8), Υ = –4+(–1,5), Ω = –4+1,5.
5. *Πολλαπλασίασε ανά δύο τους τρεις ρητούς –6,5, 3,5 και –4,5 με όλους τους δυνατούς τρόπους. (α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν; (β) Ποιος από τους τέσσερις ρητούς 29,25, –15,75, –22,75 και 15,75 ως αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών αυτών είναι λάθος;*
6. *Συμπλήρωσε τα κενά στο σχήμα:* *Αν γνωρίζεις ότι:*





7. *Συμπλήρωσε τα κενά στα σχήματα, αν γνωρίζεις ότι:*



Γ. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

Αντιστοίχισε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης στο στοιχείο της δεύτερης στήλης που βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα.

(α)

(+14)+(–17)	(+3)+(–23)
(–12)+(–8)	(+11)+(–11)
(+11)+(–9)	(–22)+(+19)
(–5)+(+25)	(–19)+(+21)
(–16)+(+16)	(+37)+(–17)

(β)

(+13)–(–18)	(+3)–(+7)
(+11)–(+3)	(+13)–(+13)
(–5)–(+25)	(–37)–(–7)
(–16)–(–16)	(+17)–(+9)
(–12)–(–8)	(–2)–(–33)

(γ)

(–2)·0,5·9·10	900
2·5·(–0,9)·(–10)	–900
2·(–5)·(–9)·(–10)	9
–2·5·9·(–10)	–90
0,2·(–5)·(–0,9)·10	90

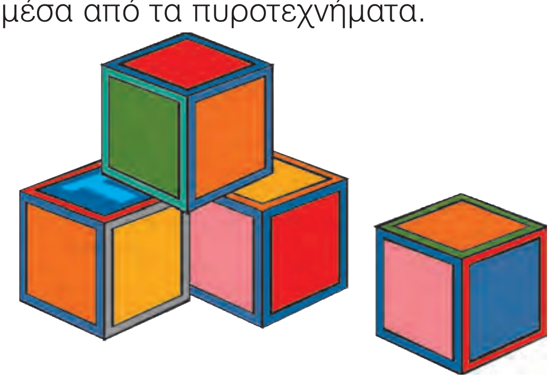
Το παράπονο της Άννας

Η βιβλιοθήκη ήταν πάντα στην ίδια θέση, από τότε που η Άννα θυμάται τη ζωή της σε τούτο το δωμάτιο. Ήταν το τελευταίο πράγμα που έβλεπε πριν την πάρει ο ύπνος, αφού το κρεβάτι της βρισκόταν ακριβώς απέναντι.
Της άρεσε πολύ να τοποθετεί στα ράφια τα βιβλία της, αλλά και ότι άλλο αγαπούσε εύρισκε πάντα θέση στη μικρή βιβλιοθήκη. Συχνά τα μετακινούσε και τα έφτιαχνε διαφορετικά για να τα αγαπήσει πάλι από την αρχή με νέα διάθεση.
Μόνο στους “κύβους” της δεν άλλαζε ποτέ θέση. Έμεναν πάντα στο ίδιο ράφι που ήταν ψηλά στη μέση περίπου της βιβλιοθήκης. Εκεί που το βλέμμα έπεφτε πιο συχνά. Αν και το ράφι για τους κύβους ήταν πάντα το ίδιο, τους άλλαζε τακτικά διάταξη. Έχτιζε κάθε φορά με άλλο τρόπο τα ξύλινα παραλληλεπίπεδα αφήνοντας ανάμεσα κενά σαν παράθυρα και πόρτες. Στο τέλος τοποθετούσε στην κορυφή, σα στέγη, τις πυραμίδες και τους κώνους.
Κάθε βράδυ πριν ξαπλώσει γύριζε το φωτιστικό του γραφείου με τέτοιο τρόπο ώστε να φωτίζει τους κύβους της. Το φως τρύπωνε από τα κενά και με τις σκιές έδινε βάθος στον χώρο, στις σκέψεις και στα όνειρα που έκανε η Άννα λίγο πριν ο ύπνος της κλείσει τα βλέφαρα.

Ένα βράδυ το ξαφνικό μπουρίνι και η ασυνήθιστα δυνατή καταιγίδα αναστάτωσε την περιοχή. Το ρεύμα κόπηκε και το σπίτι βυθίστηκε στο σκοτάδι. Η μητέρα της Άννας άναψε ένα κερί και το ακούμπησε στο γραφείο της.
- Δεν ξέρουμε πότε θα έρθει το φως, καλύτερα να κοιμηθείς, της είπε η μητέρα της.
Η Άννα μισοξάπλωσε στο κρεβάτι και κοίταξε το δωμάτιό της κάτω από το φως του κεριού που τρεμόπαιζε. Όσες φορές και αν το ξανάφερε στον νου της ποτέ δεν ήταν σίγουρη αν ήταν όνειρο ή πραγματικότητα αυτό που είδε εκείνο το βράδυ.

Όλα γύρω μίκρυναν και χάθηκαν στο σκοτάδι και μόνο οι “κύβοι” μεγάλωσαν και έμειναν να αιωρούνται φωτισμένοι στη μέση του απέραντου χώρου. Δεν ήταν όμως οι κύβοι που ήξερε. Ήταν μια σύνθεση διαφορετική, μια άλλη κατασκευή, κάτι σαν τον ναό του Ποσειδώνα στο Σούνιο που έμοιαζε να πλέει φωτισμένος στη σκοτεινή απεραντοσύνη. Δίπλα του βρισκόταν οι πυραμίδες της Αιγύπτου στη σκοτεινή έρημο, φωτισμένες από την πανσέληνο. Πιο πίσω ήταν το Κολοσσαίο της Ρώμης κοντά στον καθεδρικό του Μιλάνου και στο βάθος τα Μετέωρα που φωτίζονταν από τους κεραυνούς. Κάποια στιγμή της φάνηκε ότι είδε στο βάθος τη Μονεμβασιά ή μπορεί και τη Σαντορίνη, με τα σπίτια σκαρφαλωμένα στην κορυφή για να σωθούν από τα νερά. Μετά, ήταν σίγουρη πως είδε φωτισμένο τον Παρθενώνα γιατί γνώρισε τα τρίγωνα στα αετώματά του. Και αμέσως λίγο πιο κει το Ολυμπιακό στάδιο τη μέρα της μεγάλης γιορτής να απογειώνεται μέσα από τα πυροτεχνήματα.

- Θεέ μου σκέφτηκε, τι ομορφιά. Βάλε εσύ το φως και άσε με να βάλω εγώ το σχήμα να φτιάξουμε από την αρχή τον κόσμο.
- Επιτέλους ήρθε το φως, ακούστηκε η φωνή της μητέρας της.
- Δεν εννοούσα αυτό το φως, Θεέ μου, ψιθύρισε με παράπονο η Άννα...



ΜΕΡΟΣ Β΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

1.1. Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

- Σχεδιάζω και συμβολίζω επίπεδα, σημεία, ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες και ημιεπίπεδα
- Διακρίνω τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από δύο σημεία και σε ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία
- Γνωρίζω ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία, ενώ από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες
- Γνωρίζω ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα

1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

- Κατανοώ την έννοια της γωνίας και σχεδιάζω, συμβολίζω και διαβάζω γωνίες
- Γνωρίζω τα είδη των γραμμών και διακρίνω τις κυρτές από τις μη κυρτές πολυγωνικές γραμμές
- Γνωρίζω την έννοια του ευθυγράμμου σχήματος και διακρίνω το κυρτό από το μη κυρτό ευθύγραμμο σχήμα
- Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι ίσα αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο

1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

- Γνωρίζω ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει συγκεκριμένο μήκος και το υπολογίζω
- Γνωρίζω τις μονάδες μέτρησης μήκους στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τον συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις
- Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ίσα μήκη και συγκρίνω ευθύγραμμα τμήματα με τον χάρακα και με τον διαβήτη
- Κατασκευάζω τμήμα δοθέντος μήκους με αρχή γνωστό σημείο πάνω σε γνωστή ευθεία και να βρίσκω την απόσταση σημείων με χάρακα
- Γνωρίζω ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο και το προσδιορίζω με τη βοήθεια του χάρακα
- Βρίσκω το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος με τον χάρακα
- Γνωρίζω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η μικρότερη σε μήκος γραμμή από όλες τις γραμμές που συνδέουν τα σημεία Α και Β

1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

- Μπορώ να προσθέτω και να αφαιρώ ευθύγραμμα τμήματα

1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

- Γνωρίζω ότι κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο, το υπολογίζω και γνωρίζω ότι αυτό εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμα» των πλευρών της
- Γνωρίζω τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών και υπολογίζω με μοιρογνωμόνιο το μέτρο τους
- Συγκρίνω γωνίες με διαφανές χαρτί ή με μοιρογνωμόνιο και γνωρίζω ότι δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο
- Σχεδιάζω γωνίες όταν γνωρίζω το μέτρο τους
- Γνωρίζω τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας, ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο και τη σχεδιάζω

1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

- Γνωρίζω και σχεδιάζω διάφορα είδη γωνιών (οξεία, ορθή, αμβλεία)
- Διαπιστώνω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου αν μια γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία και πότε δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους
- Γνωρίζω ότι από ένα σημείο άγεται μία και μόνο κάθετη σε μία ευθεία και τη χαράσσω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα

1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

- Γνωρίζω και σχεδιάζω εφεξής γωνίες και υπολογίζω το άθροισμα δύο ή και περισσοτέρων γωνιών

1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

- Γνωρίζω πότε δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και πότε συμπληρωματικές
- Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες, οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και αντιστρόφως
- Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετες ημιευθείες, οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και αντιστρόφως
- Υπολογίζω και σχεδιάζω την παραπληρωματική και τη συμπληρωματική μιας γωνίας
- Γνωρίζω πότε δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες και σχεδιάζω δύο κατακορυφήν γωνίες

1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- Γνωρίζω πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες και ότι αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μία τρίτη, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες
- Γνωρίζω ότι από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν και τη χαράσσω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ
(ΑΚΜΑΣΕ ΠΕΡΙΠΟΥ ΤΟ 300 π.Χ.)

1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

- Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση σημείου από ευθεία και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα
- Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση δύο παραλλήλων και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα

1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

- Κατανοώ την έννοια του κύκλου, αναγνωρίζω τα στοιχεία του και τον σχεδιάζω
- Διακρίνω τον κύκλο από τον κυκλικό δίσκο και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του

1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου – Μέτρηση τόξου

- Γνωρίζω ότι ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και ότι στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους), ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως
- Κατασκευάζω, με κανόνα και διαβήτη, γωνία ίση με δεδομένη και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο όταν δίνονται: (α) δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία και (β) μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες

1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

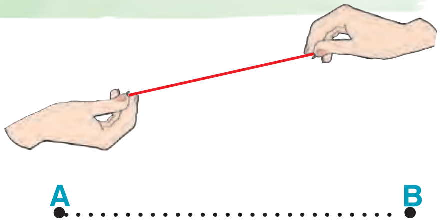
- Διακρίνω αν μία ευθεία είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη του κύκλου και σχεδιάζω την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του

Β.1.1. Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία - Επίπεδο - Ημιεπίπεδο

Στο Δημοτικό μάθαμε τις βασικές γεωμετρικές έννοιες όπως σημείο, ευθεία, επίπεδο και γνωρίσαμε τα απλά γεωμετρικά σχήματα όπως τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και κύκλος.
Τώρα, αφού ξαναθυμηθούμε αυτές τις έννοιες και τα σχήματα, μπορούμε να αναζητήσουμε περισσότερα χαρακτηριστικά τους στοιχεία, να ανακαλύψουμε τις ιδιότητές τους και να προχωρήσουμε σε πιο σύνθετα σχήματα. Έτσι θα ασκήσουμε περισσότερο την παρατηρητικότητά μας, θα βελτιώσουμε την αντίληψη και θα οργανώσουμε καλύτερα τις σκέψεις. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Πώς μπορείς να ονομάσεις το σχήμα μιας τεντωμένης κλωστής;
Το σχήμα που φαίνεται πιο κάτω αποτελείται από μερικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο.



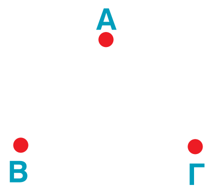
- *Μπορείς να το χαρακτηρίσεις με τον ίδιο τρόπο; Κι αν όχι, γιατί;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ. Ένωσέ τα με ευθύγραμμα τμήματα, ανά δύο, και δώσε ονομασία σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.

- *Τι παρατηρείς;*

1η περίπτωση:



2η περίπτωση:

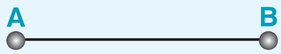
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Το σημείο

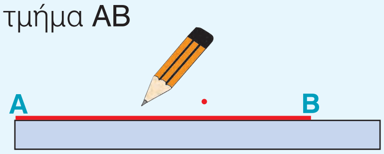
- Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του **σημείου**.

Το ευθύγραμμο τμήμα

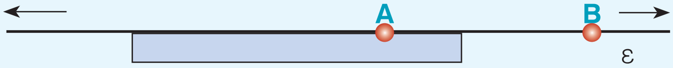
- Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα **Α** και **Β** μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του **ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ**.



- Τα σημεία **Α** και **Β** είναι τα **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος.
- Λέμε ότι τα σημεία **Α** και **Β** **ορίζουν** το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**
- Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, συνδέοντας δύο σημεία Α και Β, με τη βοήθεια ενός χάρακα (*“κανόνα”*).

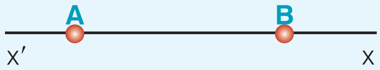


Η ευθεία



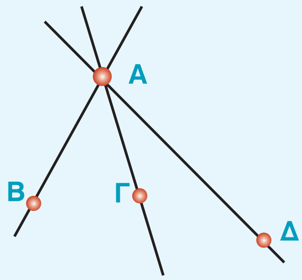
- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, τότε το νέο σχήμα, που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**, λέγεται **ευθεία**.

- Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ. **(ε)**, ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. **x′x**, **y′y**.

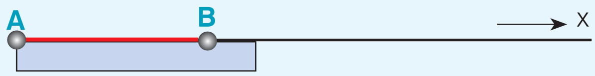


- **Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.**

- **Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.**

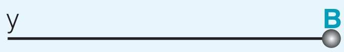


Η ημιευθεία

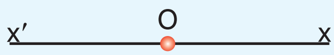


- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, τότε το νέο σχήμα, που έχει **αρχή** το **Α** αλλά **δεν έχει τέλος**, λέγεται **ημιευθεία**.

- Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα π.χ. **Αx**, **Βy** κ.λπ.



- Εάν **Ο** είναι ένα σημείο της ευθείας **x′x**, τότε με αρχή το **Ο** ορίζονται δύο ημιευθείες **Οx** και **Οx′**, οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

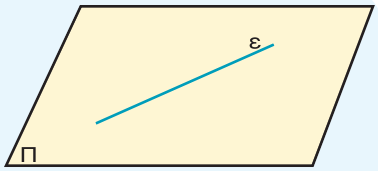
Έχεις ακούσει εκφράσεις όπως: “Στο επίπεδο του ορίζοντα φαίνεται να χάνεται ο δρόμος”. “Οι χώρες της Δύσης έχουν υψηλό επίπεδο ανάπτυξης”. “Η επίπεδη οθόνη είναι καλύτερη από την κυρτή”. “Οι σχέσεις τους βρίσκονται σε καλό επίπεδο”. “Η επιφάνεια του εδάφους στην περιοχή αυτή είναι επίπεδη”.

Αλλά και στον υλικό κόσμο, που βρίσκεται γύρω μας, μπορείς να δεις και να αναγνωρίσεις πολλές επίπεδες επιφάνειες. Τους τοίχους της τάξης, την οροφή του δωματίου, ένα κάδρο, την πίστα προσγείωσης, την επιφάνεια του ήρεμου νερού, τον ισημερινό της Γης.

➢ *Ποιο χαρακτηριστικό ή ονομασία μπορείς να δώσεις σε μια τέτοια επιφάνεια;*

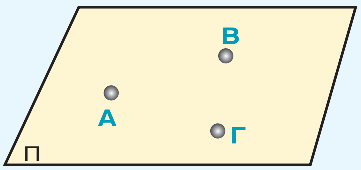
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Το επίπεδο

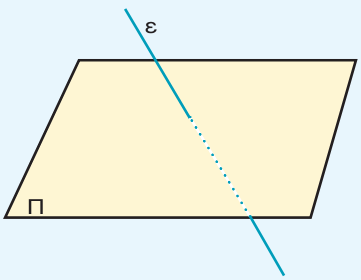


- **Επίπεδο** είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

▶ Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.



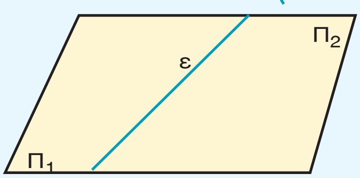
▶ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.



▶ Κάθε επίπεδο χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.

◆ **Η ονομασία** του επιπέδου δίνεται με ένα **κεφαλαίο γράμμα** του αλφάβητου π.χ. **Π, Ρ, Σ** κ.λπ.

Το ημιεπίπεδο



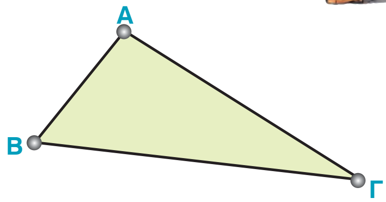
- **Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Ας πάρουμε από τα γνωστά μας σχήματα το τρίγωνο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και το τετράπλευρο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και ας δούμε, ποια ονομασία έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα που βλέπουμε στα σχήματα αυτά.*

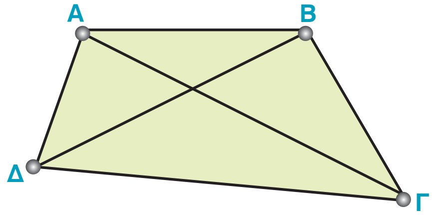
Λύση

Στο τρίγωνο **ΑΒΓ**, τα τμήματα **ΑΒ**, **ΒΓ** και **ΓΑ** που ορίζονται από δύο **κορυφές**, λέγονται **πλευρές** του τριγώνου.



Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** με **κορυφές** τα σημεία **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** έχει **πλευρές** τα τμήματα **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** που ορίζονται από διαδοχικές κορυφές.

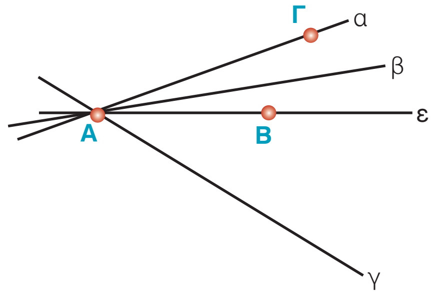
Τα τμήματα **ΑΓ** και **ΒΔ**, που ορίζονται από μη διαδοχικές κορυφές, λέγονται **διαγώνιες** του τετραπλεύρου.



2. *Έστω τρία σημεία Α, Β και Γ που δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία. Πόσες ευθείες περνούν από το Α; Πόσες από τις ευθείες αυτές περνούν από το Β; Το Γ είναι σημείο της ευθείας ΑΒ;*

Λύση

Από το **Α** διέρχονται άπειρες ευθείες. Μία από αυτές περνάει και από το **Β**.

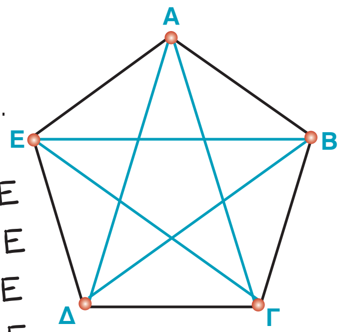


Επειδή τα σημεία **Α**, **Β** και **Γ** δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία, το σημείο **Γ** δεν μπορεί να είναι σημείο της ευθείας **ΑΒ**.

3. *Στο σχήμα φαίνονται πέντε σημεία, τα Α, Β, Γ, Δ και Ε. Να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι;*

Λύση

Κάθε σημείο είναι άκρο ενός από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, που το συνδέουν με τα υπόλοιπα τέσσερα σημεία. Επομένως:



Το σημείο **Α** είναι άκρο των τμημάτων: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ

Το σημείο **Β** είναι άκρο των τμημάτων: ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ

Το σημείο **Γ** είναι άκρο των τμημάτων: ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΓΕ

Το σημείο **Δ** είναι άκρο των τμημάτων: ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΔΕ

Το σημείο **Ε** είναι άκρο των τμημάτων: ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ

Στα παραπάνω, κάθε τμήμα εμφανίζεται δύο φορές π.χ. το **ΑΒ** και **ΒΑ**, αφού το τμήμα έχει δύο άκρα. Έτσι, στο σχήμα, **δεν είναι είκοσι** (20) διαφορετικά τμήματα, αλλά **δέκα** (10) τα: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΔ, ΓΕ και ΔΕ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα Α και Β μας δίνει την εικόνα της έννοιας του ....

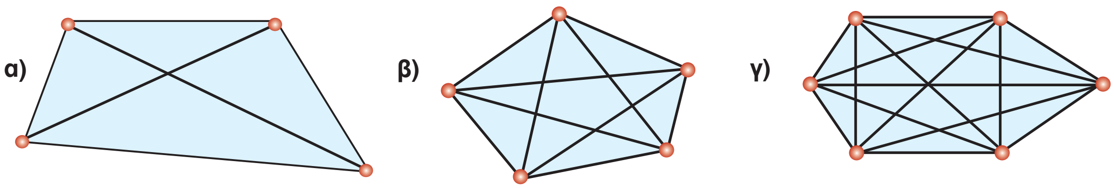
(β) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από τα δύο άκρα του, Α και Β, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ....

(γ) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ....

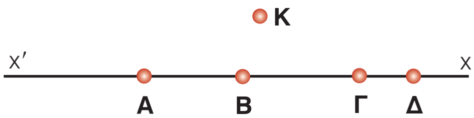
(δ) .... λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή και που οι δύο μαζί αποτελούν μία ευθεία.

(ε) Η επιφάνεια, πάνω στην οποία η απεριόριστη ευθεία γραμμή εφαρμόζει παντού ολόκληρη είναι το ....

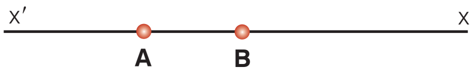
2. Να δώσεις δική σου ονομασία σε όλα (α) τα σημεία και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα των παρακάτω ευθυγράμμων σχημάτων.



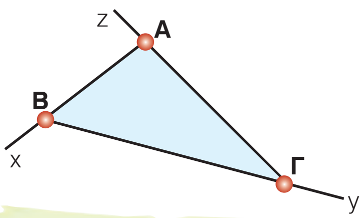
3. Πάρε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ πάνω σε μια ευθεία και ένα σημείο Κ που δεν βρίσκεται στην παραπάνω ευθεία. Ένωσε το Κ με τα Α, Β, Γ, Δ και ονόμασε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.



4. Πάνω σε μια ευθεία x′x παίρνουμε δύο σημεία Α και Β. Ονόμασε τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Α και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Β.



5. Στο διπλανό σχήμα χάραξε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών ΑΒx, ΒΓy και ΓΑz.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Σχεδίασε ένα πολύγωνο που να έχει: (α) Λιγότερες διαγώνιες από πλευρές, (β) ίδιο αριθμό διαγωνίων και πλευρών, (γ) περισσότερες διαγώνιες από πλευρές.

2. Στον διπλανό χάρτη φαίνονται έξι (6) πόλεις της Ελλάδας, που δε βρίσκονται ανά τρεις στην ίδια ευθεία: Α (Αλεξανδρούπολη), Ρ (Ρόδος), Η (Ηράκλειο), Χ (Χανιά), Κ (Κέρκυρα) και Θ (Θεσσαλονίκη). Μπορείς να σχεδιάσεις τις απ' ευθείας αεροπορικές συνδέσεις μεταξύ των πόλεων αυτών; Ονόμασε τις συνδέσεις αυτές χρησιμοποιώντας τα γράμματα των πόλεων. Μπορείς να βρεις πόσες τέτοιες συνδέσεις υπάρχουν, δικαιολογώντας κατάλληλα την απάντησή σου;

Β.1.2. Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα σχήματα - Ίσα σχήματα

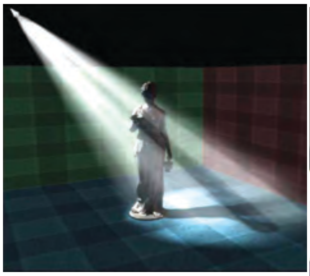
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Γύρω μας υπάρχουν διαφόρων ειδών γωνίες, μερικές από τις οποίες βλέπουμε στις παρακάτω εικόνες. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν;

➢ *Προσπάθησε να τις περιγράψεις, χωρίς να σε επηρεάζει η υλική τους υπόσταση.*



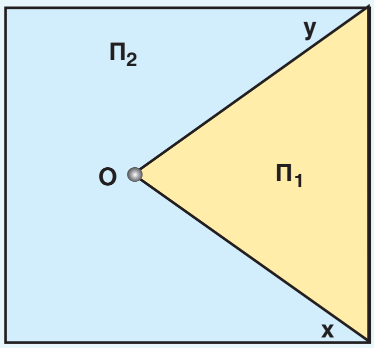




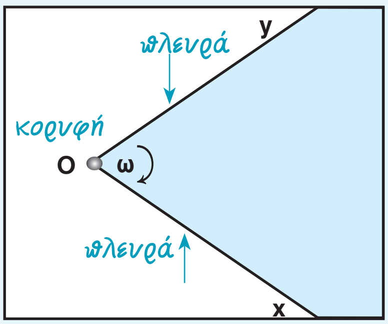


Ορίζοντας τη γωνία

Σχεδιάζουμε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο ημιευθείες **Οx** και **Οy**, με κοινή αρχή το σημείο **Ο**.
Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές **$Π_1$** και **$Π_2$**.

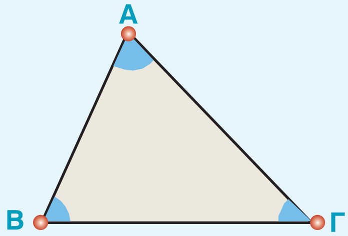


- Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες **Οx** και **Οy** ονομάζεται **γωνία**.
- Η "μικρότερη" ($Π_1$) λέγεται **κυρτή** και η άλλη ($Π_2$) **μη κυρτή**.
- Το σημείο **Ο** λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες **Οx** και **Οy** λέγονται **πλευρές** της γωνίας.
- Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε **$x\hat{O}y$** ή **$y\hat{O}x$** (το γράμμα της κορυφής **Ο** γράφεται πάντα στη μέση) ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. "$\hat{ω}$".

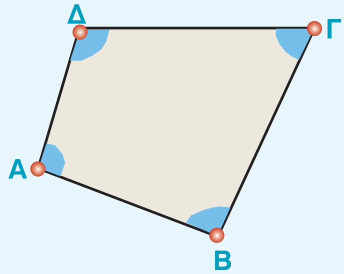


- Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες, την $\hat{A}$, τη $\hat{B}$ και τη $\hat{\Gamma}$.
- Όταν λέμε, π.χ. η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου **ΑΒΓ**, εννοούμε τη γωνία που έχει πλευρές τις ημιευθείες **ΑΒ**, **ΑΓ** και περιέχει το τρίγωνο.
- Η γωνία $\hat{A}$ λέμε ότι **περιέχεται** μεταξύ των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ** του τριγώνου.
- Ακόμα λέμε ότι η πλευρά **ΒΓ** είναι **απέναντι** στη γωνία $\hat{A}$, ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι **προσκείμενες** της πλευράς **ΒΓ**.
- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** έχει τέσσερις γωνίες, που καθεμιά τους περιέχει το τετράπλευρο. Οι γωνίες αυτές είναι οι $\Delta\hat{A}B$, $A\hat{B}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Delta}A$, που γράφονται απλά $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα.

Γωνίες τριγώνου

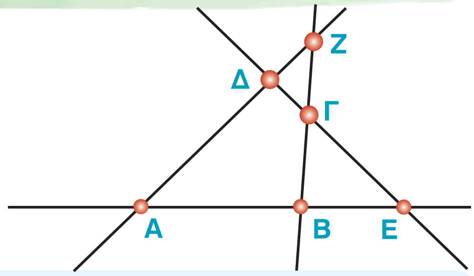


Γωνίες τετραπλεύρου



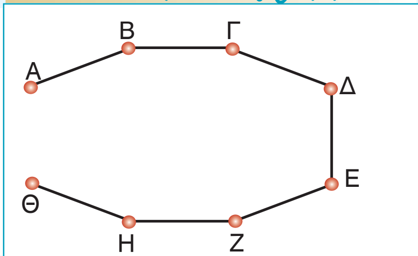
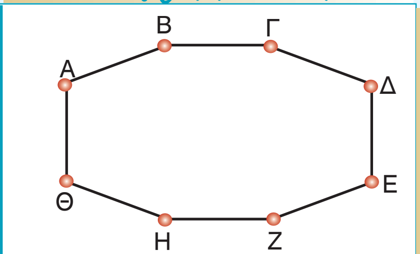
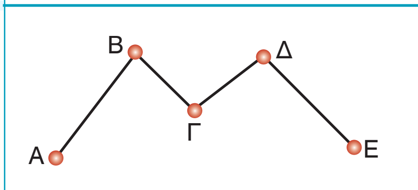
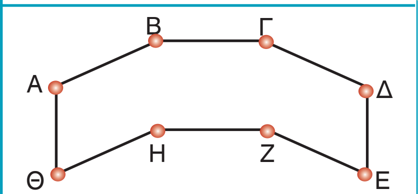
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ποιες γωνίες και τι είδους σχήματα σχηματίζονται από τις ευθείες του διπλανού σχήματος;



Ευθύγραμμα σχήματα

- **Τεθλασμένη γραμμή** είναι το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία.
- **Ευθύγραμμο σχήμα** ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**.

	Τεθλασμένη γραμμή	Ευθύγραμμο σχήμα	
Κυρτή			Κυρτό
μη κυρτή			μη κυρτό

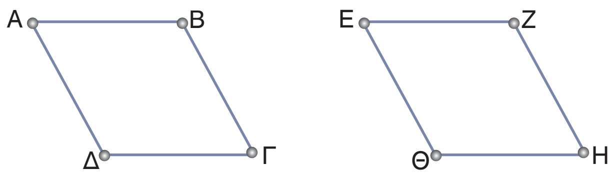
Ίσα σχήματα

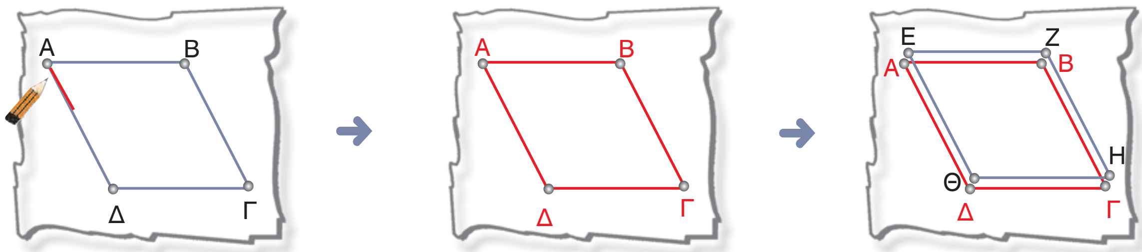
- Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **ίσα**, αν **συμπίπτουν**, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.
- Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται **αντίστοιχα στοιχεία** των σχημάτων αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

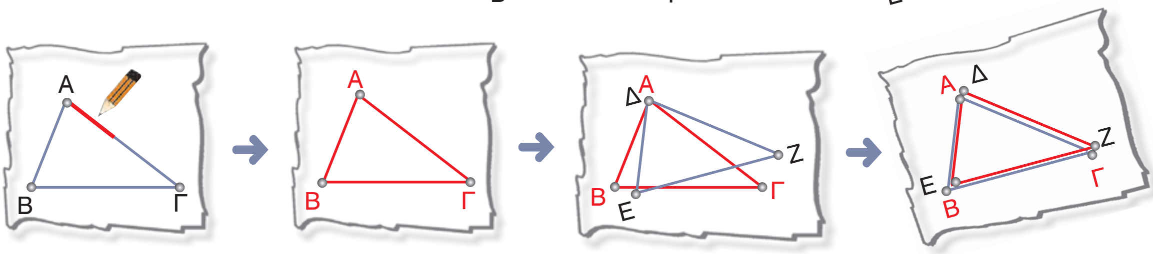
Να χρησιμοποιηθεί διαφανές χαρτί, για να διαπιστωθεί η ισότητα των σχημάτων στις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η





Περίπτωση 2η



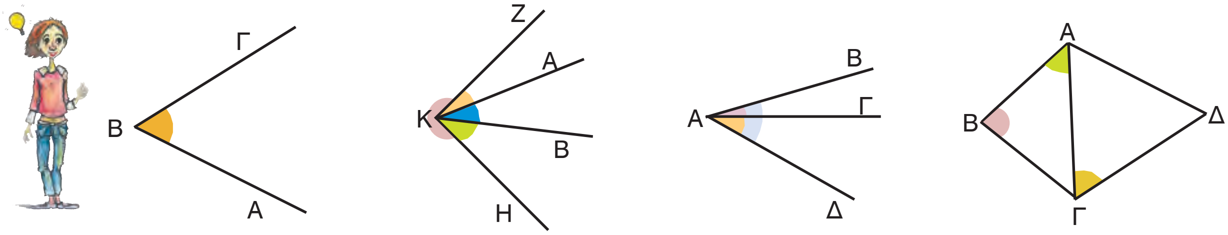
Στρέφουμε το διαφανές χαρτί

Παρατηρούμε ότι:

- Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των ίσων σχημάτων είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

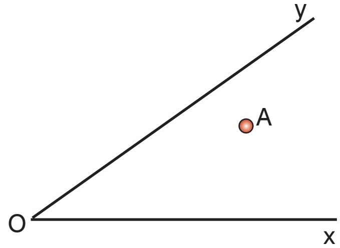
1. Να ονομάσεις με τρία γράμματα τις γωνίες που σημειώνονται στο σχήμα:



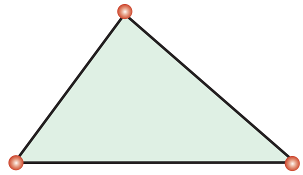
(α) (β) (γ) (δ)

2. Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Ποια γωνία του τριγώνου περιέχεται στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ; (β) Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$; (γ) Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ;

3. Να γραμμοσκιάσεις και να ονομάσεις τη γωνία στην οποία ανήκει το σημείο Α.



4. Στο διπλανό τρίγωνο να ονομάσεις $\hat{A}$ τη γωνία που είναι απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά, $\hat{B}$ τη γωνία που είναι απέναντι στη μικρότερη πλευρά και $\hat{\Gamma}$ την τρίτη γωνία.
(α) Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ;
(β) Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ;



5. Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(α)

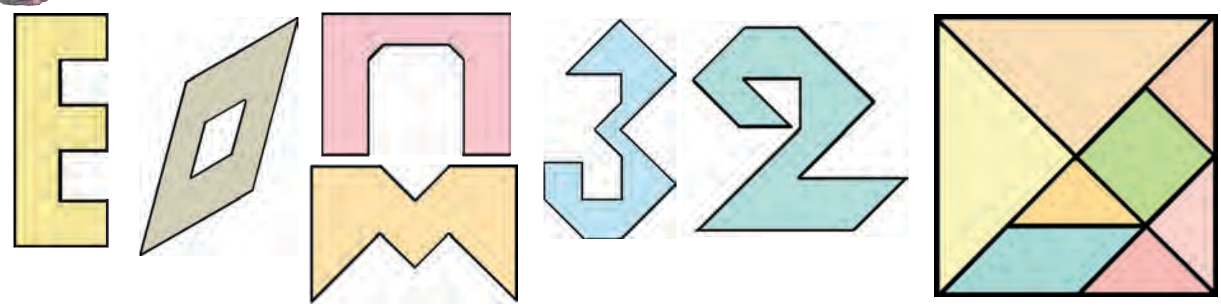
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	ΚΟΡΥΦΕΣ 1	2	3	4	5	ΠΛΕΥΡΕΣ 1	2	3	4	5
ΓΩΝΙΑ										
ΤΡΙΓΩΝΟ										
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ										
ΠΕΝΤΑΠΛΕΥΡΟ										

(β)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2															
3															
4															
5															
6															

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Έχεις παίξει ποτέ το TANGRAM; Σχεδίασε σ' ένα χαρτί το διπλανό τετράγωνο σχήμα με πλευρά 10 cm και μετά κόψε τα οκτώ κομμάτια. Προσπάθησε να φτιάξεις τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας κατάλληλα κομμάτια απ' αυτά.



Β.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων - Απόσταση σημείων - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Στα προηγούμενα είδαμε τον τρόπο με τον οποίο διαπιστώνουμε την ισότητα δύο γεωμετρικών σχημάτων. Το απλούστερο σχήμα, του οποίου το μήκος μπορεί να μετρηθεί, είναι το ευθύγραμμο τμήμα και αποτελεί βασικό στοιχείο των άλλων ευθυγράμμων σχημάτων. Τι είναι όμως μέτρηση και μονάδες μήκους;

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

*Από τα πολύ παλιά χρόνια, οι ανάγκες της ζωής, υποχρέωσαν τους ανθρώπους να μετρήσουν διάφορα μεγέθη. Για να εξυπηρετούν οι μετρήσεις αυτές έπρεπε να χρησιμοποιηθούν σταθερά υποδείγματα, τα οποία να διαθέτει ο καθένας οποιαδήποτε στιγμή τα χρειαζόταν. Αρχικά στη μέτρηση χρησιμοποιήθηκαν τα μέλη του ανθρώπινου σώματος αλλά και ο βηματισμός, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος. Έτσι, δημιουργήθηκαν οι μονάδες, όπως: οι "*δάκτυλοι*", οι "*πόδες*", οι "*παλάμες*" κ.α. Αυτή την παλιά συνήθεια εξακολουθούμε να εφαρμόζουμε και σήμερα στις πρόχειρες μετρήσεις μας: "Το πανταλόνι θέλει δυο δάκτυλα μάκρεμα", "Το χορτάρι ψήλωσε μια πιθαμή", "Το σκάφος έχει μήκος 40 πόδια", "Τα δίκτυα έφτασαν στις 50 οργιές", "Βάλε στο ποτήρι ένα δάκτυλο κρασί", "Το πέναλτι χτυπιέται στα 11 βήματα", κ.λπ. Οι μονάδες αυτές, αν και πολύ χρήσιμες, άρχισαν να χάνουν την αξία τους διότι δεν είναι ακριβείς, αφού όλοι οι άνθρωποι δεν έχουν το ίδιο ύψος, την ίδια παλάμη, το ίδιο πάχος δακτύλων και το ίδιο άνοιγμα στο βήμα τους. Όσο όμως αναπτύσσονταν οι ανθρώπινες κοινωνίες τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονταν ορισμένες μετρήσεις, όπως π.χ. για το κτίσιμο των σπιτιών, την κατασκευή αρδευτικών έργων, την καταμέτρηση της γης, κ.λπ. Στην αρχαία *Αίγυπτο*, μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, η λάσπη κάλυπτε τα σύνορα των κτημάτων. Υπήρχαν τότε ειδικοί υπάλληλοι, οι "αρπεδονάπτες", οι οποίοι επόπτευαν την τήρηση του διαχωρισμού των εκτάσεων. Στις καταμετρήσεις αυτές λέγεται ότι έκαναν μ' ένα ειδικό σχοινί με κόμπους, την "*αρπεδόνη*".*

*Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, από την εποχή του βασιλέα *Σέσωστρη* (κατά τον Ηρόδοτο), τηρούσαν στοιχεία μέτρησης των εκτάσεων που καλλιεργούσαν για να τα ξαναβρίσκουν μετά τις εποχιακές πλημμύρες του Νείλου ποταμού.*

*Άλλωστε *Γεω - μετρία* σημαίνει μέτρηση της Γης. Αλλά και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν συγκεκριμένα υποδείγματα για να υπολογίσουν το εμβαδόν και τον όγκο σε πολλά πράγματα καθημερινής χρήσης.*

*Όταν αναπτύχθηκε η επικοινωνία λαών και κρατών, με τα ταξίδια και το εμπόριο, δημιουργήθηκε η ανάγκη να καθιερωθούν κοινές μονάδες μέτρησης για καλύτερη συννενόηση και αποφυγή της ταλαιπωρίας των μετατροπών απ' τη μία μονάδα στην άλλη, όπως π.χ. στην αρχαία *Αθήνα* από τον *Σόλωνα*.*

Το **1791**, *αμέσως μετά την Επανάσταση, η* **Γαλλική Ακαδημία** *ανέθεσε σε μια ομάδα επιστημόνων, απ' όλες τις χώρες της Ευρώπης, να βρουν ένα απλό σύστημα μονάδων μέτρησης. Οι μονάδες που υιοθετήθηκαν τελικά πάρθηκαν από τη φύση και για παράδειγμα η μέτρηση του μήκους καθιερώθηκε να έχει μονάδα το "μέτρο", που είναι το* **1 από τα 40.000.000 ίσα κομμάτια που χωρίστηκε ο γήινος μεσημβρινός που διέρχεται από το Παρίσι.** *Το σύστημα των μονάδων ακολουθεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, δηλαδή είναι ένα δεκαδικό μετρικό σύστημα. Μετά από ένα αργό ξεκίνημα, το σύστημα αυτό καθιερώθηκε και το* **1875** *ιδρύθηκε στη* **Σεβρ** *(στο Παρίσι) το* **Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών**, *όπου φυλάχτηκαν τα κατασκευασμένα από πλατίνα πρότυπα "μέτρο" και "χιλιόγραμμο".*

Το σύστημα αυτό των μονάδων δεν υιοθετήθηκε αμέσως απ' όλους τους λαούς, που προτίμησαν να χρησιμοποιούν τα δικά τους συστήματα, όπως τα είχαν συνηθίσει, παρ' όλο που ήταν πιο πολύπλοκα. Στη νεώτερη **Ελλάδα**, *καθιερώθηκε με νόμο, το* **1959**, *το δεκαδικό μετρικό σύστημα και ισχύει μέχρι σήμερα.*

Στην **Αγγλία**, *την* **Αμερική** *και σε μερικές ακόμη χώρες, το σύστημα μέτρησης είναι δωδεκαδικό και η βασική μονάδα μήκους είναι η* **υάρδα** *ή* **γιάρδα (yd)**. *Η* **1 γιάρδα (yd)** *διαιρείται σε* **3 πόδια (ft)**, *και το* **1 πόδι (ft)** *σε* **12 ίντσες (in)**. *Οι σχέσεις των μονάδων αυτών μεταξύ τους αλλά και με το μέτρο είναι:*

1 yd = 3 ft = 36 in   1 yd = 0,9144 m = 91,44 cm

1 ft = 12 in   1 ft = 0,3048 m = 30,48 cm

1 in = 0,0254 m = 2,54 cm

Στις ίδιες χώρες για μέτρηση μεγάλων αποστάσεων χρησιμοποιούν το μίλι, που είναι:
1 μίλι = 1609 m = 1,609 km. *Στη ναυτιλία χρησιμοποιούν για μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι, που είναι:* **1 ναυτικό μίλι = 1852 m**.

Μέτρηση και μονάδες μέτρησης

- Για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα σύγκρισης. Έτσι, κάθε σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται **μέτρηση**.

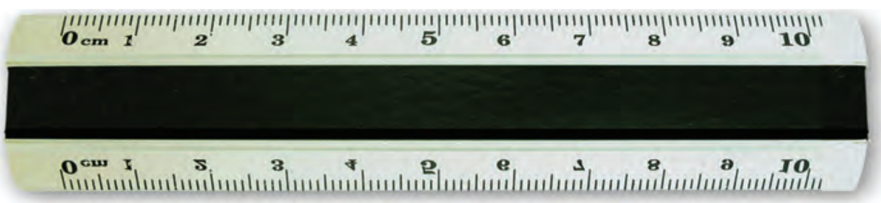
  Έτσι, για το μήκος έχουμε ότι:

- **Μονάδα μήκους** είναι το **"μέτρο"** (m).

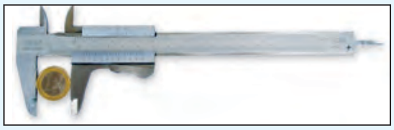
  ► Για να μετρήσουμε, λοιπόν, ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρησιμοποιούμε ένα αντίγραφο του **μέτρου** και κάνουμε τη σύγκριση μ' αυτό, όπως έχουμε μάθει.

  ► Εάν όμως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του **μέτρου**, επιλέγουμε, για τη μέτρηση ένα **πολλαπλάσιο** ή μια **υποδιαίρεση του μέτρου** για τον σκοπό αυτό.

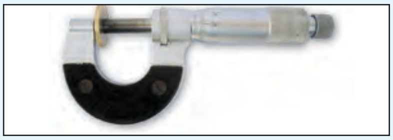
◆ Για να μετρήσουμε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιούμε, συνήθως, το **υποδεκάμετρο**, που είναι το **ένα δέκατο** $\left(\frac{1}{10}\right)$ **του μέτρου**.



- Για μεγαλύτερα μήκη, όπως π.χ. έναν τοίχο ή τις διαστάσεις ενός οικοπέδου, χρησιμοποιούμε τη **μετροταινία**.



- Για πολύ μικρά μήκη π.χ. τη διάμετρο μιας βίδας ή το πάχος μιας λαμαρίνας, χρησιμοποιούμε το **παχύμετρο** ή το **μικρόμετρο**, αντίστοιχα.

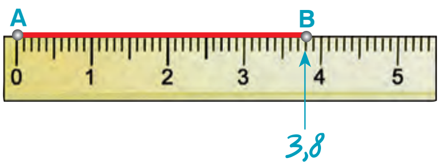


	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΜΕΤΡΟΥ	Χιλιόμετρο	Km	1 Km = 1000 m
	ΜΕΤΡΟ	**m**	
ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ	Δεκατόμετρο ή παλάμη	dm	1 dm = $\frac{1}{10}$ m = 0,1 m
	Εκατοστόμετρο ή πόντος	cm	1 cm = $\frac{1}{100}$ m = 0,01 m
	Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό	mm	1 mm = $\frac{1}{1000}$ m = 0,001 m

Η σχέση μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου είναι η εξής:

1 m	=	10 dm	=	100 cm	=	1000 mm
		1 dm	=	10 cm	=	100 mm
				1 cm	=	10 mm

Η έννοια της απόστασης σημείων είναι από τις πιο συνηθισμένες γεωμετρικές έννοιες, που συναντάμε στη ζωή π.χ. απόσταση δύο πόλεων κλπ.
Πώς όμως, ορίζεται η απόσταση δύο σημείων και πώς τη μετράμε;



- Έχουμε τα σημεία Α και Β. Χαράζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μετράμε με το υποδεκάμετρο. Βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,8 cm.
- Λέμε ότι η **απόσταση** των σημείων Α και Β είναι 3,8 cm και γράφουμε ΑΒ = 3,8 cm.

Συνεπώς:

- **Απόσταση** δύο σημείων Α και Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που τα ενώνει.

Πρέπει, όμως, να προσέξουμε κάτι σημαντικό:

- Με το σύμβολο ΑΒ εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ**, αλλά και το **μήκος** αυτού του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
- Για να ξεχωρίσουμε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (ΑΒ). Αλλά στο βιβλίο αυτό, για απλούστευση, θα γράφουμε απλά: **μήκος ΑΒ**.

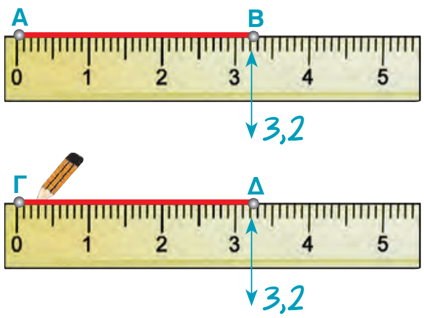
Συχνά ακούμε τη φράση: "Βρισκόμαστε στο μέσο της διαδρομής..." και καταλαβαίνουμε ότι απέχουμε την ίδια απόσταση από τα δύο άκρα. Τι ονομάζουμε, λοιπόν, μέσο του ευθύγραμμου τμήματος;

- **Μέσο** ενός ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ** ονομάζουμε το σημείο **Μ** του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

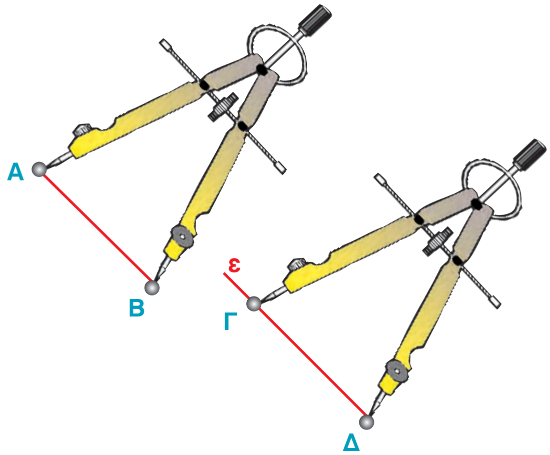
1. *Να σχεδιαστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι ίσο με το τμήμα ΑΒ: (α) με το υποδεκάμετρο και (β) με διαβήτη.*

Λύση



(α) Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** και βρίσκουμε ότι **ΑΒ = 3,2 cm**. Στη συνέχεια πάνω σε μια ευθεία **ε** παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΓΔ** με μήκος ίσο με **3,2 cm**, όπως δείχνει το σχήμα.

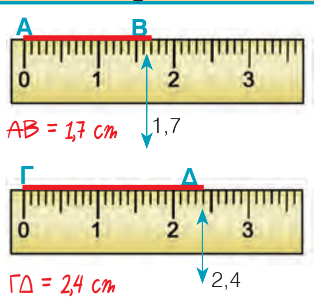
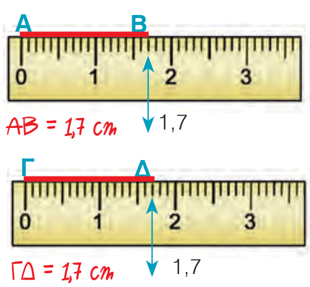
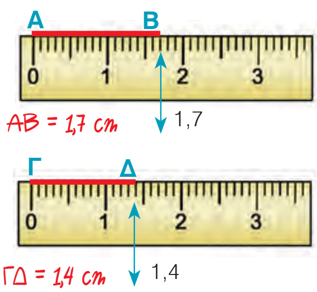
(β) Ανοίγουμε τον διαβήτη, ώστε η μία άκρη του να ακουμπάει στο **Α** και η άλλη στο **Β**. Μετακινούμε τον διαβήτη, χωρίς να μεταβάλλουμε το άνοιγμά του.



Χαράζουμε μια ευθεία **ε**. Τοποθετούμε τη μία άκρη του διαβήτη σε ένα σημείο **Γ** της **ε** και με το άλλο άκρο, που έχει τη γραφίδα, βρίσκουμε το σημείο **Δ** της **ε**. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα **ΓΔ** είναι **ίσο** με το **ΑΒ**.

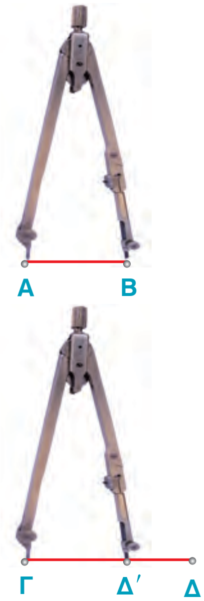
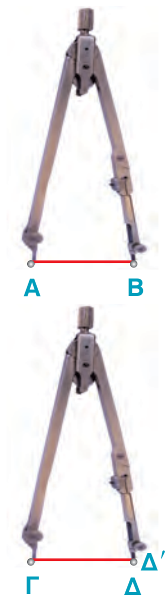
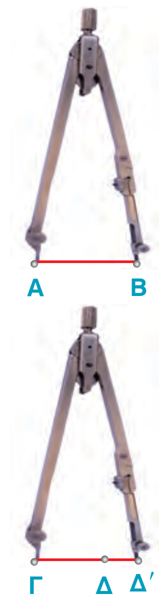
2. *Να βρεθούν κατάλληλοι τρόποι σύγκρισης δύο ευθυγράμμων τμημάτων και να διατυπωθούν τα συμπεράσματα.*

*Ο **1ος τρόπος** είναι να κάνουμε τη μέτρηση με το υποδεκάμετρο.*

1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
 ΑΒ = 1,7 cm, ΓΔ = 2,4 cm	 ΑΒ = 1,7 cm, ΓΔ = 1,7 cm	 ΑΒ = 1,7 cm, ΓΔ = 1,4 cm
ΑΒ < ΓΔ	ΑΒ = ΓΔ	ΑΒ > ΓΔ

Ο **2ος τρόπος** *είναι να τα συγκρίνουμε χρησιμοποιώντας τον διαβήτη.*

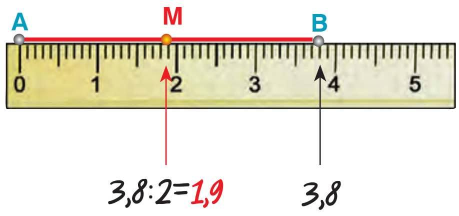
Ακουμπάμε τη μία άκρη του διαβήτη στο **Α** και την άλλη στο **Β**. Μετακινούμε τον διαβήτη, χωρίς να μεταβάλουμε το άνοιγμά του και τοποθετούμε το ένα άκρο του στο σημείο **Γ** και το άλλο επί της ημιευθείας **ΓΔ**. Ονομάζουμε **Δ′** το σημείο στο οποίο καταλήγει το δεύτερο άκρο του διαβήτη. Τότε έχουμε τρεις περιπτώσεις.

1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
 *Το Δ′ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ.*	 *Το Δ′ συμπίπτει με το Δ.*	 *Το Δ′ βρίσκεται στην προέκταση του ΓΔ προς το Δ.*
Τότε λέμε ότι το **ΑΒ** είναι **μικρότερο** από το **ΓΔ** και γράφουμε: **ΑΒ<ΓΔ**	Τότε λέμε ότι τα **ΑΒ** και **ΓΔ** έχουν το **ίδιο μήκος** και γράφουμε: **ΑΒ=ΓΔ**	Τότε λέμε ότι το **ΑΒ** είναι **μεγαλύτερο** από το **ΓΔ** και γράφουμε: **ΑΒ>ΓΔ**

3. *Να βρεθεί το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.*

Λύση

Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ένα σημείο Μ του ΑΒ, για το οποίο είναι:
ΑΜ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.
Αλλά τότε και ΜΒ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.
Δηλαδή: ΑΜ = ΜΒ.



◆ Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει πάντα ένα μέσο Μ, που είναι και μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που ενώνει δύο σημεία Α και Β λέγεται .... των σημείων.

(β) Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο του Μ που .... από τα άκρα του.

2. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση: Από δύο σημεία μπορούν να περάσουν　Άπειρες ευθείες,　Μία μόνο ευθεία,　Δύο μόνο ευθείες.

3. Ένα τόπι ύφασμα είναι 65 m. Πουλήθηκαν κομμάτια με μήκη: 3,5 m, 25 cm, 7,95 m και 3,74 m. Πόσα μέτρα ύφασμα έμεινε στο τόπι;

4. Το εμπορικό τρίγωνο μιας πόλης περικλείεται από τις οδούς Ιπποκράτους, μήκους 319m, Κλεισθένους, μήκους 271m και Περικλέους, μήκους 205m. Πόσα βήματα θα κάνει ένας πεζός που κινείται περιμετρικά στο εμπορικό τρίγωνο, αν το κάθε του βήμα είναι 75cm.

5. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει έναν αγρό σχήματος τετραγώνου και πλευράς 15,3 m. Διαθέτει συρματόπλεγμα, μήκους 60 m 3 dm 18 cm. Να βρεθεί, αν θα του φτάσει το συρματόπλεγμα ή αν πρέπει να αγοράσει και άλλο.

6. Ο διπλανός πίνακας δείχνει την ακτίνα σε m και σε km τεσσάρων πλανητών. Να συμπληρωθούν τα κενά:

Ακτίνα	σε m	σε km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6.085.000	
ΓΗ		6.378
ΑΡΗΣ		3.750
ΔΙΑΣ	71.400.000	

7. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον διπλανό πίνακα είναι τα μήκη των πέντε πλευρών του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, εκφρασμένα με διαφορετικές μονάδες. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να υπολογιστεί η περίμετρος του πολυγώνου σε cm, dm και m.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΕΑ	Περίμετρος
cm	517			1250		
dm					7,6	
m		4,2	0,84			

8. Πάρε ένα σημείο Α. Να βρεις τρία σημεία που το καθένα να απέχει 2,7 cm από το Α.

9. Σχεδίασε δύο αντικείμενες ημιευθείες Αx και Αx'. Να βρεις πάνω στην ημιευθεία Αx δύο σημεία Β και Γ, έτσι ώστε ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 3,8 cm. Επίσης στην ημιευθεία Αx' να πάρεις ένα σημείο Δ έτσι, ώστε ΑΔ = 3 cm. Να συγκρίνεις (α) τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΔ και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΔ.

10. Σε μία ευθεία ε, πάρε στη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: ΑΒ=2,5 cm, ΒΓ=3 cm και ΓΔ=2,5 cm. Εξέτασε αν τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα.

11. Το μέσο Ο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχει 4,2 cm από το άκρο Α. Πόσο είναι το μήκος του ΑΒ;

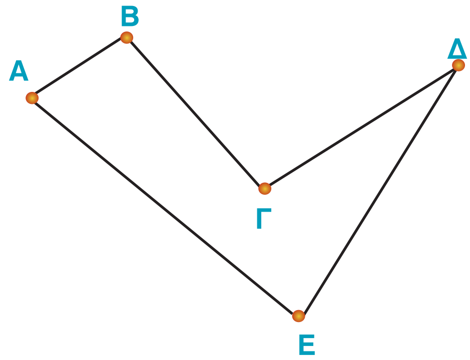
12. Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρεις ένα σημείο Μ, το οποίο να απέχει 3,3 cm από το Α και να μη βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ. Να φέρεις την ευθεία, η οποία περνάει από το Μ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Β.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

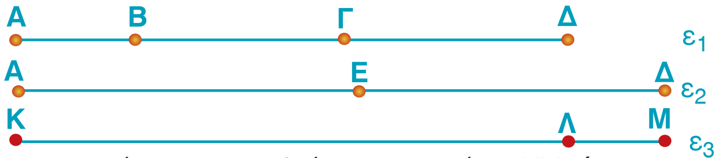
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα, μεταξύ των διαδρομών ΑΒΓΔ και ΑΕΔ, να βρεθεί ποιά διαδρομή από τις δύο είναι ο συντομότερος δρόμος, για να πάει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Δ και στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορά των διαδρομών αυτών;

Σκεφτόμαστε



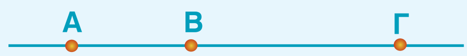
(α) Θεωρούμε τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Στην ευθεία $ε_1$ παίρνουμε, με τη βοήθεια του διαβήτη, διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ίσα με τις πλευρές της τεθλασμένης γραμμής **ΑΒΓΔ**, δηλαδή τα **ΑΒ**, **ΒΓ** και **ΓΔ**. Στην ευθεία $ε_2$ παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα **ΑΕ** και **ΕΔ** ίσα με τις πλευρές της τεθλασμένης γραμμής **ΑΕΔ**.
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που προκύπτει από τη συνένωση των τμημάτων της **ΑΒΓΔ** αποτελεί το άθροισμα των τμημάτων της και επομένως το μήκος της γραμμής αυτής. Όμοια και για την **ΑΕΔ**. Συνεπώς, συγκρίνοντας τα παραπάνω μήκη, συμπεραίνουμε ότι η διαδρομή **ΑΒΓΔ** είναι μικρότερη από την **ΑΕΔ**.



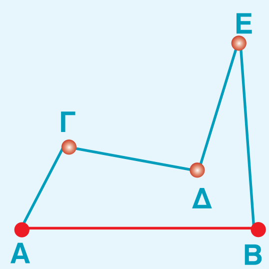
(β) Για να υπολογίσουμε τη διαφορά των δύο διαδρομών τοποθετούμε σε μια άλλη ευθεία $ε_3$ τμήμα **ΚΛ**, **ίσο** με το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΔ**, που ανήκει στην ευθεία $ε_1$ και τμήμα **ΚΜ**, **ίσο** με το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΔ**, που ανήκει στην ευθεία $ε_2$. Το ευθύγραμμο τμήμα **ΛΜ** είναι η **διαφορά** των δύο διαδρομών **ΑΒΓΔ** και **ΑΕΔ**.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Σε μία ευθεία ε έχουμε με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα:



- Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ λέγεται άθροισμα των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ, και γράφουμε: **ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ**.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ λέγεται διαφορά των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ, και γράφουμε: **ΒΓ = ΑΓ – ΑΒ**.

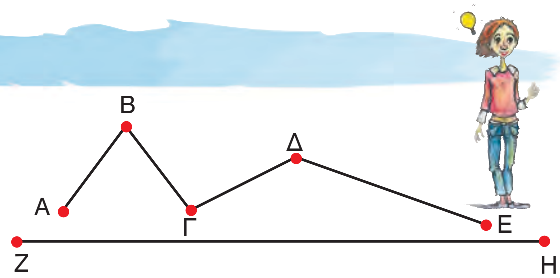


- Η **τεθλασμένη γραμμή** έχει **μήκος** το **άθροισμα** των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.
- **Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα Α και Β.**

- Το **άθροισμα των πλευρών** ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε **περίμετρο** του σχήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συγκρίνεις το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕ με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΖΗ, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



2. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με όλες τις πλευρές ίσες, με 2,5 cm. Βρες στην ημιευθεία ΒΓ, με αρχή το σημείο Β, ένα σημείο Ε έτσι, ώστε το μήκος ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.

3. Μια τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από πέντε διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα. Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ είναι αντίστοιχα 16 mm, 9 mm, 12 mm, 14 mm και 2 cm. Να βρεις το μήκος της τεθλασμένης ΑΒΓΔΕΖ.

4. Να βρεις το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ με πλευρές ΑΒ = 0,4 m, ΒΓ = 3 dm, ΓΔ = 50 cm και ΔΕ = 380 mm.

5. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι, ώστε: ΚΛ = 6 cm, ΚΜ = 16 cm και ΚΝ = 20 cm. Να βρεις τα μήκη των τμημάτων ΛΜ, ΛΝ και ΜΝ.

6. Σε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο Ο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: ΑΒ = 3 cm, ΒΔ = 5,5 cm και ΑΓ = 4,6 cm. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων: (α) ΑΔ, (β) ΒΓ ,(γ) ΑΓ + ΓΔ και (δ) ΑΔ–ΔΒ.

7. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε: ΑΔ = 6 cm, ΑΒ = 1 cm και ΒΓ = 2 cm. Να βρεις το μήκος του ΓΔ.

8. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε το ΒΓ να είναι κατά 4 cm μεγαλύτερο από το ΑΒ και κατά 3 cm μικρότερο από το ΓΔ. Αν είναι ΑΔ = 14 cm, να βρεις τα μήκη των ΒΓ και ΓΔ.

9. Να πάρεις σε μια ευθεία με σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε να είναι: ΑΒ=2 cm, ΒΓ=1 cm και ΑΔ=5 cm. Να βρεις τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ και ΑΓ.

10. Πάρε σε μια ευθεία τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε έτσι, ώστε να είναι: ΑΒ=2 cm, ΑΓ = 3 cm, ΓΔ = 1,5 cm και ΑΕ = 6,2 cm. Να βρεθούν τα μήκη των ΑΔ και ΓΕ.

11. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4,5 cm. Πάνω στην ευθεία ΑΒ πάρε ένα σημείο Κ, τέτοιο ώστε ΑΚ=3 cm και ένα άλλο σημείο Λ, τέτοιο, ώστε να είναι ΒΛ=3,5 cm. (α) Να βρεις το μήκος του ΚΛ, (β) Σε ποια περίπτωση συμβαίνει να είναι ΚΛ = 11 cm; (γ) Να διευρυνήσεις, σε ποιες περιπτώσεις το ΚΛ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 11 cm.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Γιατί το αεροπλάνο μπορεί να διανύσει μικρότερη απόσταση από το πλοίο, για να πάει από την Αθήνα στη Σάμο;

Β.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών - Διχοτόμος γωνίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πατέρας και ο γιος του γυμνάζονται και κάνουν τις ίδιες ασκήσεις.

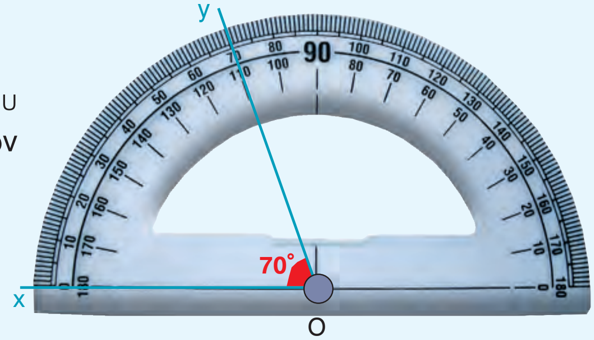
- *Μπορείς να βρεις εάν οι γωνίες, που σχηματίζουν τα πόδια τους στην ίδια ακριβώς στάση που έχουν στο διπλανό σχήμα είναι ίσες;*
- *Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου σχετικά με τη σύγκριση του ανοίγματος των ποδιών τους.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο.**
- Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο της γωνίας.**
- Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα,** που γράφεται: 1°.
- Είναι: $1^\circ = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- **Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο** που εξαρτάται μόνο από το **“άνοιγμα” των πλευρών της**.
- **Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες**.



- Στο εξής με $x\hat{O}y$ ή $\hat{\omega}$ θα συμβολίζουμε τη γωνία και το μέτρο της.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

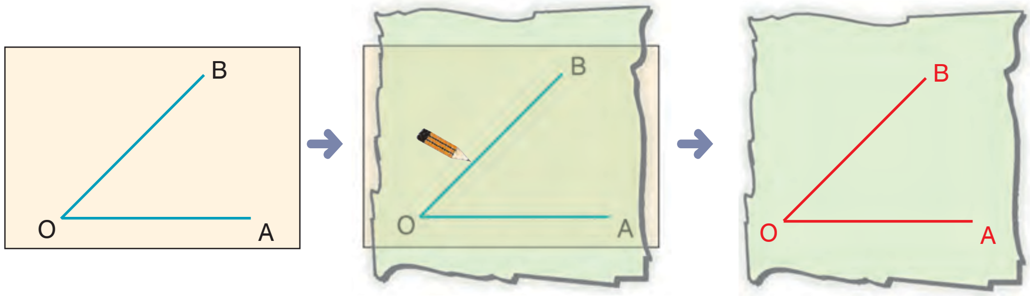
Η μοίρα ανήκει σε **εξηντάδικό** *σύστημα αρίθμησης (με βάση το* 60*). Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το* 2100 π.Χ. *Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το* 5 *και το* 12*). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση* 60 *καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός* 60 *επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηντάδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

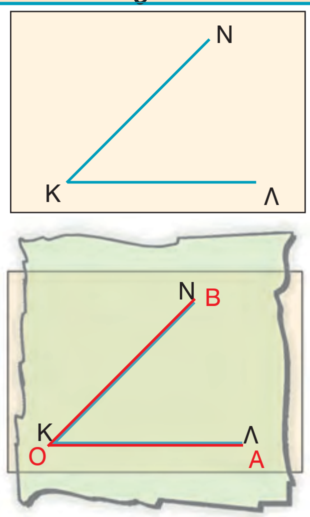
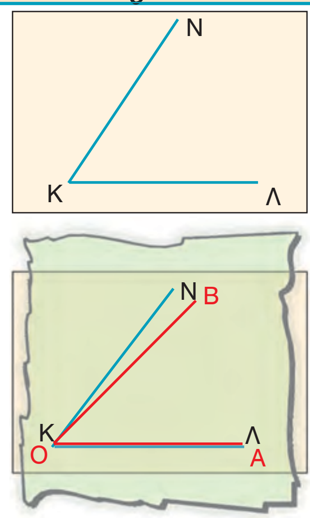
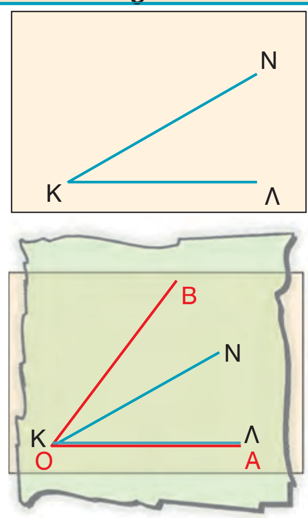
1. *Να γίνει σύγκριση δύο γωνιών με ένα διαφανές χαρτί.*

Λύση

◆ Αποτυπώνουμε τη γωνία $A\hat{O}B$ στο διαφανές χαρτί.



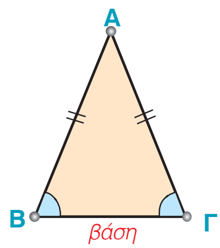
◆ Τοποθετούμε το αποτύπωμα πάνω στη γωνία $\Lambda\hat{K}N$ έτσι, ώστε το O να ταυτιστεί με το K και η πλευρά OA με τη KΛ. Τότε μία μόνο από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστεί.

1η περίπτωση	2η περίπτωση	3η περίπτωση
		
$A\hat{O}B = \Lambda\hat{K}N$	$A\hat{O}B < \Lambda\hat{K}N$	$A\hat{O}B > \Lambda\hat{K}N$

2. *Να συγκριθούν οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου.*

Λύση

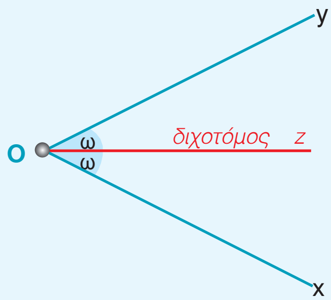
Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες, δηλαδή AB = AΓ. Με το διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις **προσκείμενες στη βάση** γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



Διαπιστώνουμε ότι:

► Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.

Όπως κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα σημείο, το μέσο του, που το διαιρεί σε δύο ίσα μέρη, έτσι και κάθε γωνία έχει μία ημιευθεία στο εσωτερικό της, που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.



- **Διχοτόμος γωνίας** ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε **δύο ίσες γωνίες.**

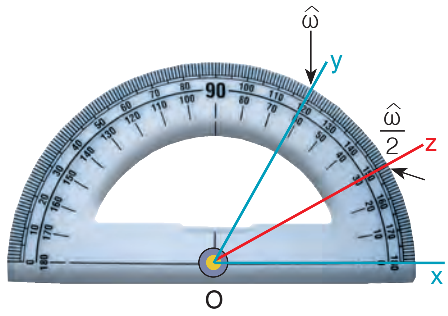
3. *Δίνεται μια γωνία* $x\hat{O}y$. *Να κατασκευαστεί η διχοτόμος της.*

Λύση

1ος τρόπος: *Με το μοιρογνωμόνιο*

Μετράμε τη γωνία $x\hat{O}y$ και βρίσκουμε το μέτρο της $\hat{\omega}$. Σχεδιάζουμε μια ημιευθεία **Oz**, μέσα στη γωνία, ώστε να προκύψει η γωνία $x\hat{O}z$, που έχει την ίδια κορυφή **O**, κοινή πλευρά **Ox** και μέτρο $\frac{\hat{\omega}}{2}$.

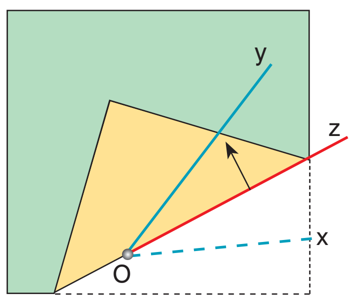
Τότε και η γωνία $z\hat{O}y$ θα έχει μέτρο: $\hat{\omega} - \frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{\hat{\omega}}{2}$.



- **Άρα η ημιευθεία Oz είναι η διχοτόμος της γωνίας, διότι τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.**

2ος τρόπος: *Με δίπλωση χαρτιού*

Σχεδιάζουμε τη γωνία σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδίασης. Το διπλώνουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε η ευθεία της τσάκισης να περάσει από την κορυφή της γωνίας και ταυτόχρονα η μία πλευρά της γωνίας να συμπέσει με την άλλη πλευρά της.
Τότε η ευθεία της τσάκισης σχηματίζει με τις πλευρές της γωνίας δύο ίσες γωνίες, αφού με τη δίπλωση συνέπεσαν.
Άρα η ευθεία αυτή είναι η διχοτόμος της γωνίας.



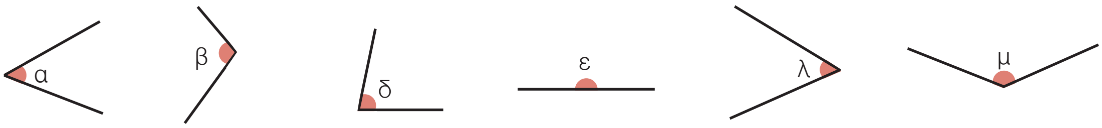
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Από τι εξαρτάται το μέγεθος μιας γωνίας;
(Τοποθέτησε ένα "x" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση).
Από το "άνοιγμα" των πλευρών της
Από το μήκος των πλευρών
Και από τα δύο παραπάνω.

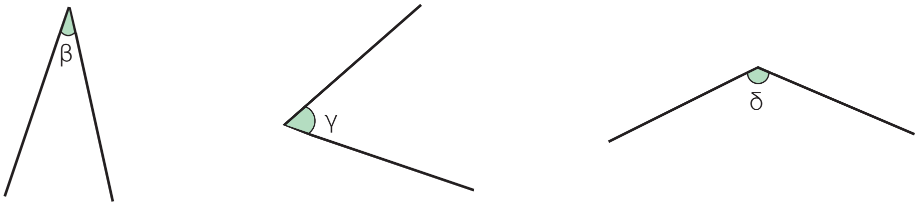
2. Σχεδίασε μια γωνία $x\hat{O}y=76^\circ$. Να γράψεις μια ημιευθεία Oz που να χωρίζει τη γωνία $x\hat{O}y$ σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μία να είναι 56°.

3. Σχεδίασε τις γωνίες $\hat{\mu}=48^\circ$, $\hat{\lambda}=72^\circ$, $\hat{\kappa}=17^\circ$, $\hat{\psi}=6^\circ$, $\hat{\rho}=90^\circ$ και $\hat{\varphi}=170^\circ$.

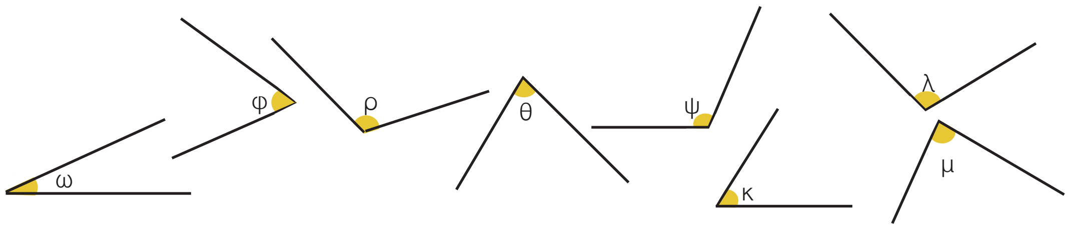
4. Να βρεις το μέτρο των παρακάτω γωνιών:



5. Να συγκρίνεις τις γωνίες και να τις γράψεις κατά σειρά από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.



6. Με το διαφανές χαρτί να συγκρίνεις τις γωνίες:
(α) $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, (β) $\hat{\varphi}$ και $\hat{\rho}$, (γ) $\hat{\omega}$ και $\hat{\rho}$, (δ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\kappa}$, (ε) $\hat{\psi}$ και $\hat{\lambda}$, (στ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\mu}$, (ζ) $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$.



7. Σχημάτισε γωνίες (α) 48°, (β) 72° και (γ) 144° και σχεδίασε τις διχοτόμους αυτών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Σχεδίασε την πορεία μιας ακτίνας φωτός, η οποία προσπίπτει σε καθρέπτη και αντανακλάται.

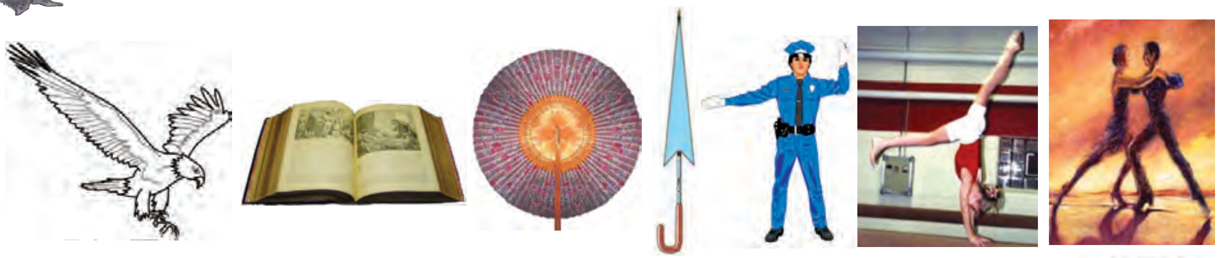
2. Σχεδίασε την κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου που κάνει μέχρι και τέσσερις ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου.

Β.1.6. Είδη γωνιών - Κάθετες ευθείες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε όλα τα παρακάτω αντικείμενα σχηματίζονται διάφορες γωνίες ανάλογα με τη σχετική θέση, κάθε φορά, δύο ημιευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο, όπως π.χ. είναι οι δείκτες του ρολογιού, τα πόδια των ανθρώπων, τα φτερά του αετού κ.λπ.
Η σειρά που τοποθετήθηκαν τα διάφορα σκίτσα είναι τυχαία.

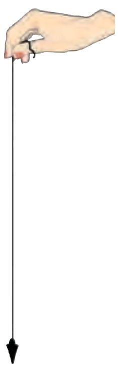
- *Μπορείς να βρεις τη σωστή αντιστοιχία;*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Το σπίτι της διπλανής εικόνας έχει δύο καμινάδες.

- *Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά;*
- *Ποια από τις δύο είναι κάθετη στη στέγη και γιατί;*
- *Γενικότερα, είναι δυνατό να έχουμε κάθετες ευθείες, χωρίς απαραίτητα να είναι αυτές οριζόντιες και κατακόρυφες;*

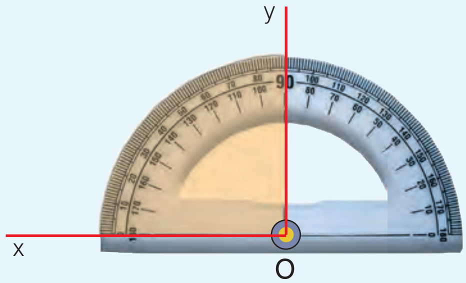


- *Ξέρεις γιατί δεν πέφτει ο πύργος της Πίζας;*
- *Πώς βρίσκουμε την κατακόρυφο σε έναν τόπο;*
- *Και πώς ελέγχουμε ότι ένα επίπεδο έχει οριζόντια θέση;*

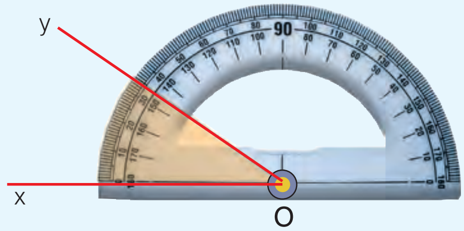
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Είδη γωνιών

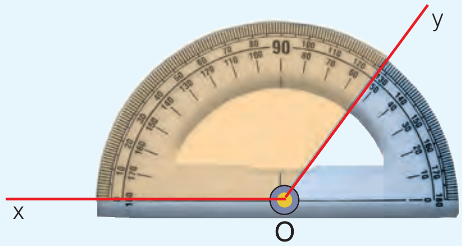
- **Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 90°.**
  - Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι **κάθετες ημιευθείες.**



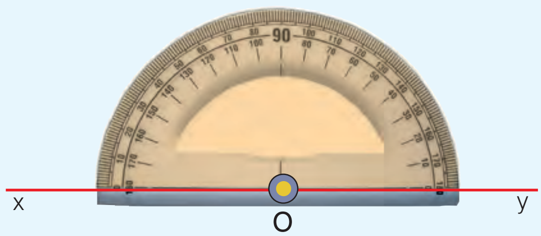
- **Οξεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μικρότερο των 90°.**



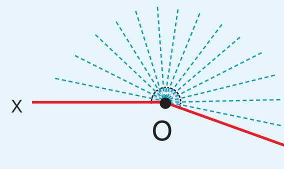
- **Αμβλεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μεγαλύτερο των 90°** και μικρότερο των **180°.**



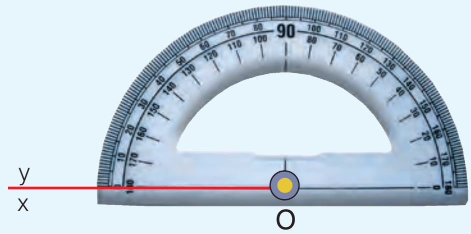
- **Ευθεία γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 180°.**
  - Οι πλευρές της ευθείας γωνίας *είναι αντικείμενες ημιευθείες.*



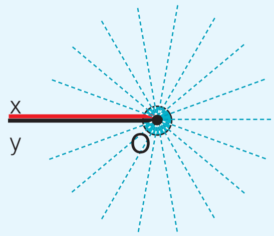
- **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μεγαλύτερο των 180°** και μικρότερο των **360°.**



- **Μηδενική γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας **το μέτρο είναι ίσο με 0°.**

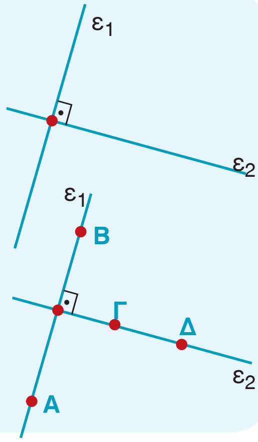


- **Πλήρης γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 360°.**



- **Η ημιευθεία** της τελικής πλευράς μιας **μηδενικής** και μιας **πλήρους γωνίας** ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.

- Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες, που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.



Πώς συμβολίζουμε την καθετότητα δύο ευθειών;

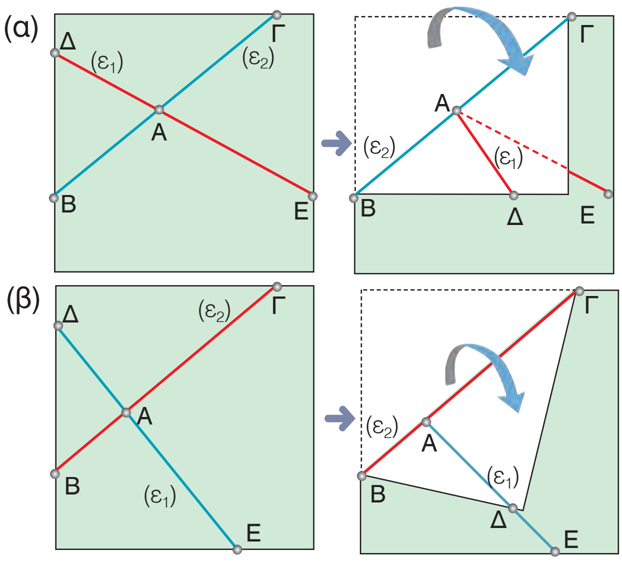
- Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "⊥", γράφουμε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και διαβάζουμε: *"η ε_1 είναι κάθετη στην ε_2".*
- Δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) που βρίσκονται πάνω σε δύο κάθετες ευθείες, λέγονται **κάθετα ευθύγραμμα τμήματα** (ή **κάθετες ημιευθείες**).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετες;*

Λύση

Σχεδιάζουμε δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 σε ένα φύλλο χαρτί.
Διπλώνουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας ε_2 και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



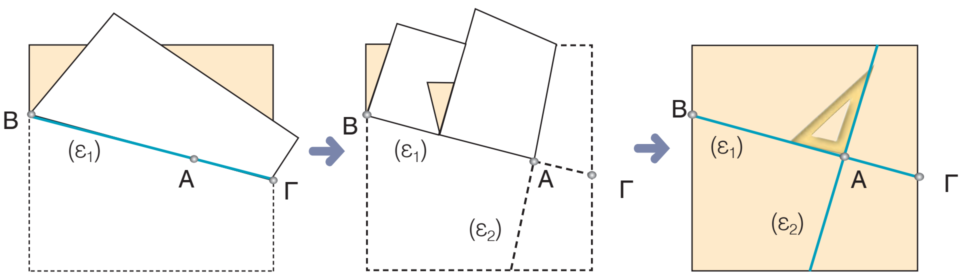
Οι ημιευθείες ΑΔ και ΑΕ δεν συμπίπτουν. Επομένως οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι κάθετες.

Οι ημιευθείες ΑΔ και ΑΕ **συμπίπτουν**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες ($\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$).

2. *Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο κάθετες ευθείες;*

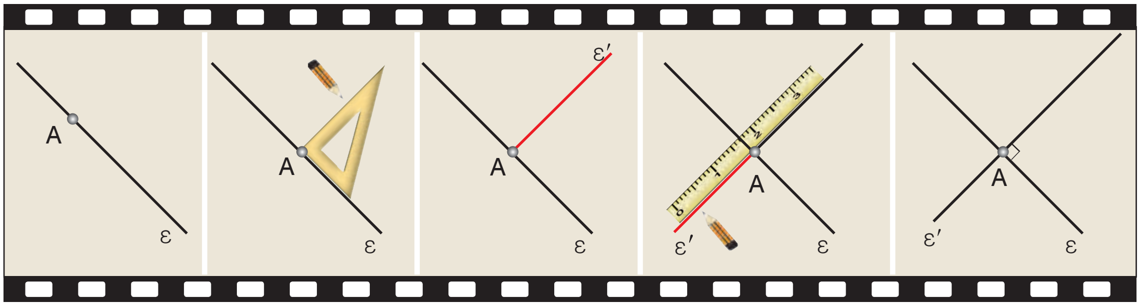
Λύση

Αν διπλώσουμε το φύλλο χαρτί δύο φορές, με τον τρόπο που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα και μετά το ανοίξουμε, παρατηρούμε ότι τα τσακίσματα, που έγιναν πάνω στο χαρτί, παριστάνουν δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2.

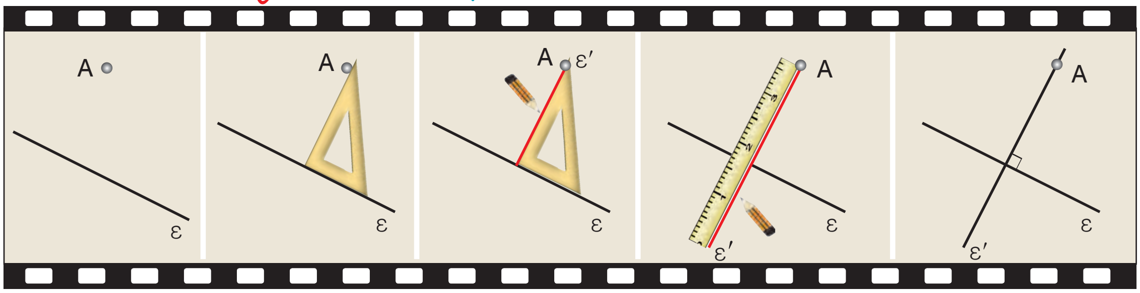


3. *Να σχεδιαστεί ευθεία ε′, που διέρχεται από σημείο Α και είναι κάθετη σε ευθεία ε.*

1η περίπτωση: Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε



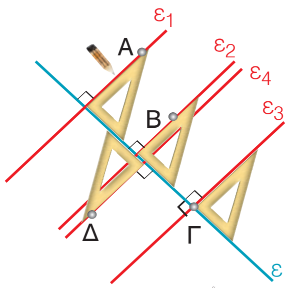
2η περίπτωση: Το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε



4. *Δίνεται η ευθεία ε και τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να σχεδιαστούν ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$, που διέρχονται από αυτά τα σημεία αντίστοιχα, κάθετες στην ε.*

Λύση

Τοποθετούμε τον γνώμονα πάνω στην ευθεία **ε** έτσι, ώστε η μία από τις δύο κάθετες πλευρές του να συμπίπτει με την ευθεία **ε**. Σύρουμε τον γνώμονα στην ευθεία **ε**, έως ότου η άλλη κάθετη πλευρά του να έρθει σε επαφή με ένα από τα δοσμένα σημεία. Από το σημείο αυτό χαράζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην **ε**. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή, για κάθε σημείο **Α, Β, Γ** και **Δ** και κατασκευάζουμε τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$ αντίστοιχα, που είναι κάθετες στην ευθεία ε.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Τοποθέτησε ένα "x" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

(α) *Αν οι πλευρές μιας γωνίας είναι ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους, τότε η γωνία λέγεται:* Οξεία Ορθή Αμβλεία.

(β) *Αν σε μια γωνία η τελική πλευρά της ταυτίζεται με την αρχική, αφού κάνει μια πλήρη στροφή, τότε η γωνία λέγεται:* Μηδενική γωνία Ευθεία γωνία Πλήρης γωνία.

2. *Σχεδίασε ημιευθεία Οx και χάραξε ευθεία που να διέρχεται από το Ο κάθετη στην Οx.*

3. *Σχεδίασε δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.*

4. *Σχεδίασε δύο ημιευθείες Οx και Οy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Σημείωσε στην Οx τρία σημεία Α,Β και Γ. Από κάθε σημείο από αυτά σχεδίασε ευθεία κάθετη προς την Οy.*

5. *Σχεδίασε δύο ημιευθείες Οx και Οy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Στο σημείο Ο να φέρεις τις κάθετες ευθείες προς τις Οx και Οy. Τι παρατηρείς;*

6. *Σχεδίασε ένα τρίγωνο και φέρε από κάθε κορυφή του την κάθετη προς την απέναντι πλευρά του.*

7. *Σχεδίασε μια ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Φέρε από τα Α και Β ευθείες κάθετες προς την ε και εξέτασε σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές κάθετες συμπίπτουν.*

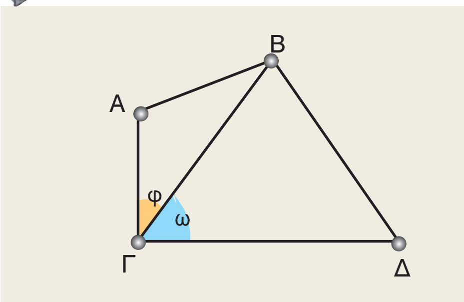
8. *Τοποθέτησε τις παρακάτω ονομασίες γωνιών, με σειρά μεγέθους του μέτρου τους:*
Ορθή - Ευθεία - Πλήρης - Αμβλεία - Μηδενική - Μη κυρτή - Οξεία.

Β.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες - Άθροισμα γωνιών

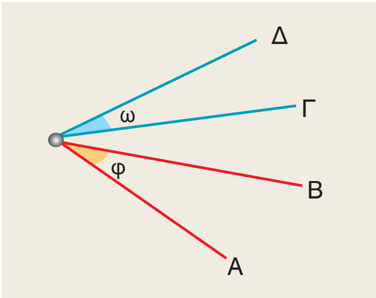
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε καθένα από τα παρακάτω τρία σχήματα υπάρχουν δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ και $\widehat{\omega}$.

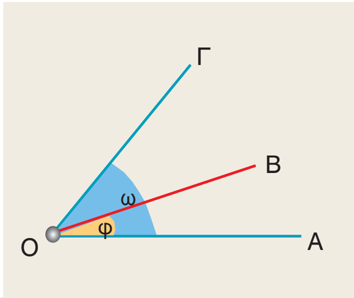
➢ *Συμπλήρωσε τα κενά στην πρόταση που αντιστοιχεί σε καθένα από τα τρία σχήματα και δικαιολόγησε την απάντησή σου.*



Έχουν κοινή την ....
και την .... και
κανένα άλλο κοινό σημείο.



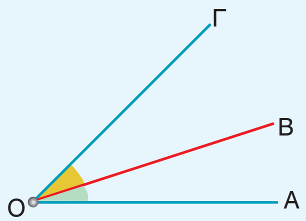
Έχουν μόνο κοινή
.... και
κανένα άλλο κοινό σημείο.



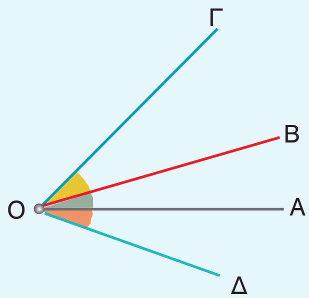
Έχουν κοινή την...............
μία ....
και ....

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Εφεξής γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την **ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο**.

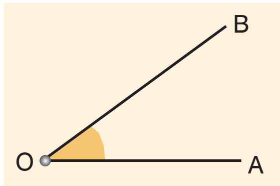


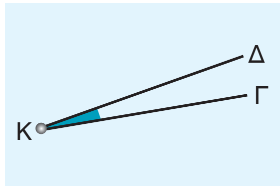
- Οι γωνίες $\Delta\hat{O}A$ και $A\hat{O}B$ καθώς και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής. Τότε οι γωνίες $\Delta\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ λέγονται **διαδοχικές**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

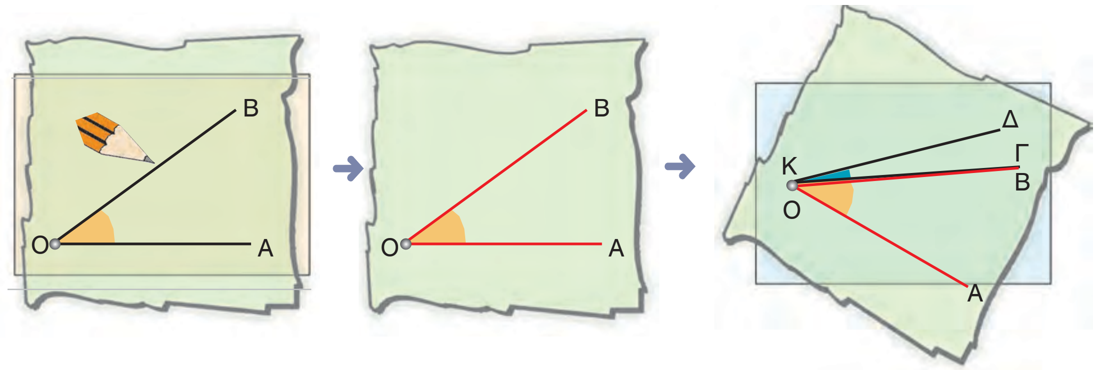
1. *Υπάρχει τρόπος για να γίνουν δύο γωνίες εφεξής;*





Λύση

Αποτυπώνουμε τη μία γωνία σε διαφανές χαρτί και τη μεταφέρουμε κατάλληλα έτσι, ώστε να γίνει εφεξής με την άλλη.

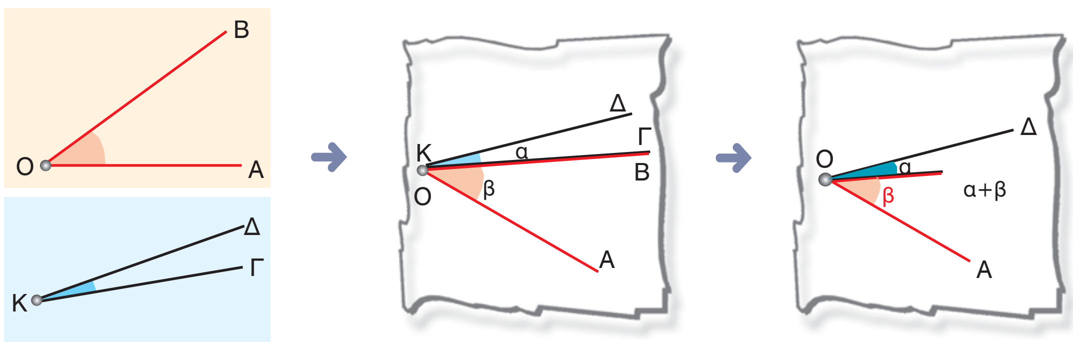


Σε αρκετές περιπτώσεις χρειάζεται να προσθέσουμε δύο γωνίες, δηλαδή να βρούμε μια τρίτη γωνία, που να είναι το άθροισμά τους. Ας δούμε πώς γίνεται αυτό.

2. *Να βρεθεί η γωνία, που είναι άθροισμα δύο γωνιών.*

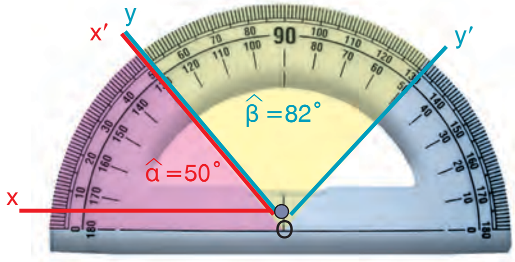
Λύση

Με το διαφανές χαρτί, όπως κάναμε και προηγουμένως, φέρνουμε τις δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ σε θέση τέτοια, ώστε να γίνουν εφεξής. Τότε οι μη κοινές πλευρές **ΟΑ** και **ΟΔ** σχηματίζουν μια νέα γωνία την $A\hat{O}\Delta$, για την οποία διαπιστώνουμε, με το μοιρογνωμόνιο, ότι έχει μέτρο $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, δηλαδή είναι το **άθροισμα** των μέτρων ($\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$) των δύο γωνιών.



3. *Να βρεθεί το άθροισμα δύο γωνιών με μέτρα 50° και 82°.*

Λύση



Έστω οι γωνίες $x\hat{O}x'$ και $y\hat{O}y'$ με μέτρα $\hat{\alpha}=50^\circ$ και $\hat{\beta}=82^\circ$ αντίστοιχα.

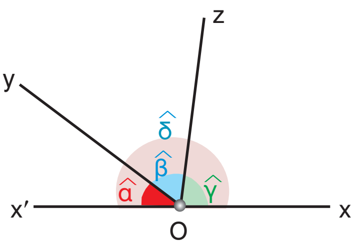
Η γωνία $x\hat{O}y'$ που έχει άνοιγμα:

$x\hat{O}y' = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 50^\circ + 82^\circ = 132^\circ$,

είναι το άθροισμα των γωνιών αυτών.

4. *Δίνεται ευθεία x′x. Από ένα σημείο Ο της ευθείας φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της, δύο ημιευθείες Οy και Οz. Να βρεθεί το άθροισμα των τριών γωνιών, που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα.*

Λύση



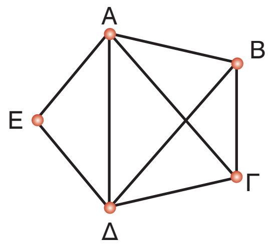
Όπως παρατηρούμε, η γωνία $x\hat{O}x'$ είναι το άθροισμα των διαδοχικών γωνιών $y\hat{O}x'$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}x$. Άρα το μέτρο της $\hat{\delta}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μέτρων $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ των γωνιών αυτών, δηλαδή $\hat{\delta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$. Επειδή όμως οι πλευρές της γωνίας $x\hat{O}x'$ είναι αντικείμενες ημιευθείες, η γωνία αυτή έχει μέτρο $\hat{\delta} = 180^\circ$.

Άρα, $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$.

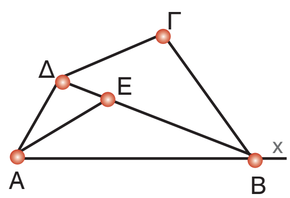
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Σχεδίασε δύο γωνίες που να έχουν την ίδια κορυφή και μια κοινή πλευρά, οι οποίες (α) να είναι εφεξής και (β) να μην είναι εφεξής.*

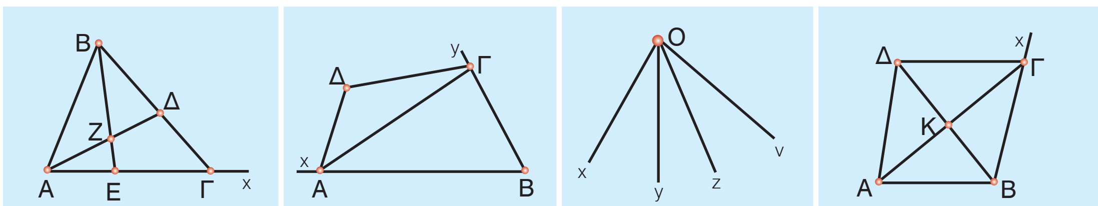
2. *Να βρεις στο σχήμα και να ονομάσεις όλες τις εφεξής και όλες τις διαδοχικές γωνίες.*



3. *Να βρεις τα ζεύγη των εφεξής γωνιών στο σχήμα.*



4. *Να γράψεις τις εφεξής και τις διαδοχικές γωνίες που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.*



Β.1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες - Κατακορυφήν γωνίες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ *και* $y\hat{O}z$ *είναι εφεξής.*
Οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

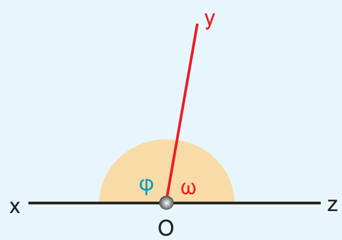
➢ *Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;*

Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ *και* $y\hat{O}z$ *είναι εφεξής.*
Οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες ημιευθείες.

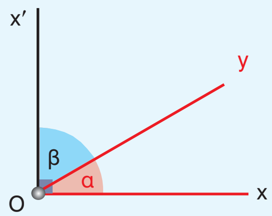
➢ *Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

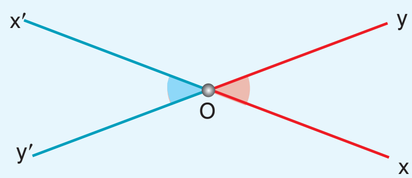
- **Παραπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 180°**. Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.



- **Συμπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 90°**. Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



- **Κατακορυφήν γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την **κορυφή τους κοινή** και τις **πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες**.



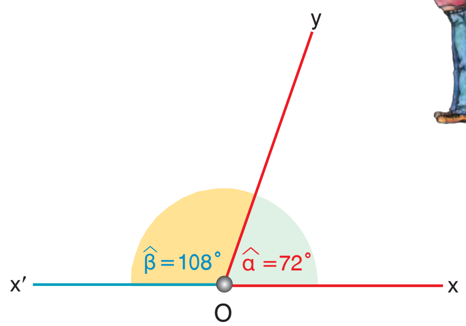
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Δίνεται η γωνία $x\widehat{O}y$ με μέτρο $\widehat{\alpha} = 72°$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η παραπληρωματική της.*

Λύση

Έστω ότι η παραπληρωματική της $\widehat{\alpha}$ έχει μέτρο $\widehat{\beta}$. Θα είναι τότε: $\widehat{\beta} = 180° - \widehat{\alpha}$, δηλαδή θα είναι: $\widehat{\beta} = 180° - 72° = 108°$.

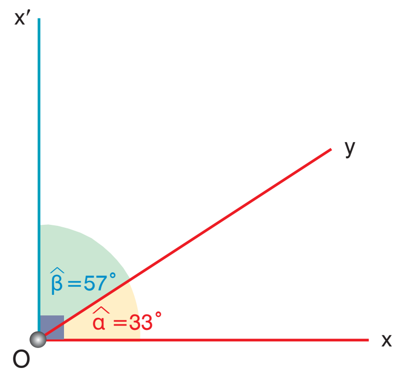
Για να σχεδιάσουμε την παραπληρωματική μιας γωνίας **x$\widehat{O}$y**, προεκτείνουμε την πλευρά αυτής **Οx** προς το μέρος του **Ο**, οπότε έχουμε την ημιευθεία **Οx′**, αντικείμενη της **Οx**. Έτσι σχηματίζεται η γωνία **y$\widehat{O}$x′**, που είναι παραπληρωματική της **x$\widehat{O}$y** και έχει μέτρο το $\widehat{\beta}$, ώστε να είναι: $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 180°$.



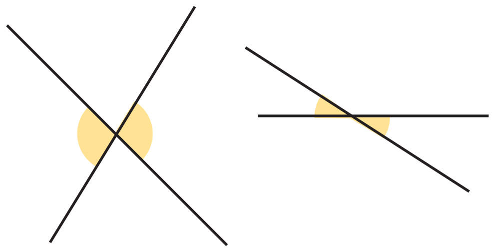
2. *Δίνεται η γωνία $x\widehat{O}y$ με μέτρο $\widehat{\alpha} = 33°$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η συμπληρωματική της.*

Λύση

Έστω ότι η συμπληρωματική της $\widehat{\alpha}$ έχει μέτρο $\widehat{\beta}$.
Θα είναι τότε $\widehat{\beta} = 90° - \widehat{\alpha}$,
δηλαδή θα είναι: $\widehat{\beta} = 90° - 33° = 57°$.
Για να σχεδιάσουμε τη συμπληρωματική μιας γωνίας **x$\widehat{O}$y** φέρνουμε την ημιευθεία **Οx′ ⊥ Οx** προς το μέρος του ημιεπιπέδου που βρίσκεται η **Οy**.
Έτσι σχηματίζεται η γωνία **y$\widehat{O}$x′**, που είναι συμπληρωματική της **x$\widehat{O}$y** και έχει μέτρο το $\widehat{\beta}$, ώστε να είναι: $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 90°$.

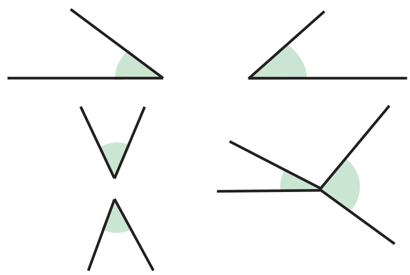


3. *Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι γωνίες είναι κατακορυφήν και γιατί;*



Είναι κατακορυφήν

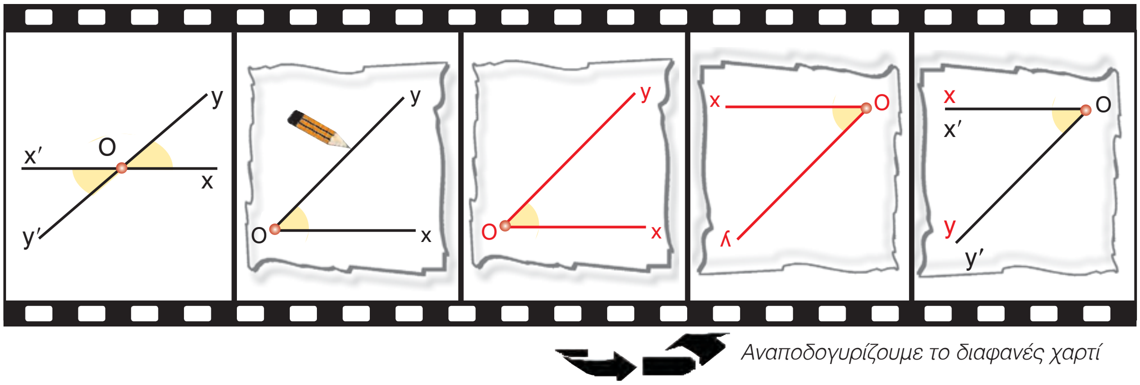
Διότι έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.



Δεν είναι κατακορυφήν

Διότι ή δεν έχουν κοινή κορυφή ή οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

4. *Να εξεταστεί με διαφανές χαρτί η σχέση δύο κατακορυφήν γωνιών.*



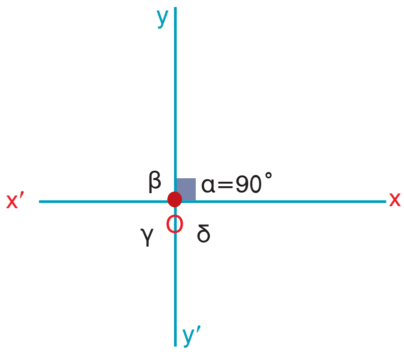
Αναποδογυρίζουμε το διαφανές χαρτί

Διαπιστώνουμε, λοιπόν ότι:

- **Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.**

5. *Να δικαιολογηθεί γιατί δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.*

Λύση

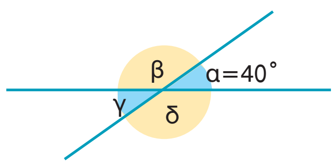


Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ (με μέτρο $\hat{\alpha} = 90^\circ$) και προεκτείνουμε τις πλευρές της προς το μέρος της κορυφής της, οπότε έχουμε δύο κάθετες ευθείες $x'x$ και $y'y$.
Επειδή οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν, θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 90^\circ$.
Οι γωνίες, όμως, $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Αλλά οι γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 90^\circ$.
Επομένως βλέπουμε ότι: $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = 90^\circ$.

6. *Να υπολογιστούν οι γωνίες του σχήματος, εάν είναι* $\hat{\alpha} = 40^\circ$.

Λύση

Επειδή οι γωνίες με μέτρα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\alpha}$ είναι κατακορυφήν, επομένως θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 40^\circ$. Οι γωνίες, όμως, με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι:
$\hat{\beta} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.
Αλλά οι γωνίες με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 140^\circ$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Αν δύο γωνίες έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε λέγονται:

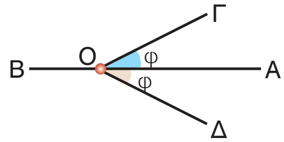
Εφεξής γωνίες Διαδοχικές γωνίες Παραπληρωματικές γωνίες
Συμπληρωματικές γωνίες Κατακορυφήν γωνίες.

2. Να σχεδιάσεις μία γωνία 125° και μετά να βρεις και να σχηματίσεις την παραπληρωματική της.

3. Να βρεις τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική (α) μιας αμβλείας, (β) μιας ορθής και (γ) μιας οξείας γωνίας.

4. Να σχεδιάσεις μια γωνία 35° και μετά να βρεις και να σχηματίσεις τη συμπληρωματική της.

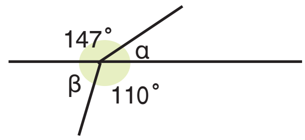
5. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Gamma\widehat{O}A = \Delta\widehat{O}A = \widehat{\varphi}$. Να συγκρίνεις τις γωνίες $\Gamma\widehat{O}B$, $\Delta\widehat{O}B$ και να δικαιολογήσεις το αποτέλεσμα της σύγκρισης.



6. Οι γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές. Η $\widehat{\alpha}$ είναι γνωστή και το μέτρο της δίνεται στον παρακάτω πίνακα. (α) Να σχεδιάσεις την $\widehat{\alpha}$, (β) να σχεδιάσεις και να μετρήσεις τη $\widehat{\beta}$ με το μοιρογνωμόνιο, (γ) να υπολογίσεις την $\widehat{\beta}$. Μετά να αντιγράψεις στο τετράδιό σου τον πίνακα και να τον συμπληρώσεις.

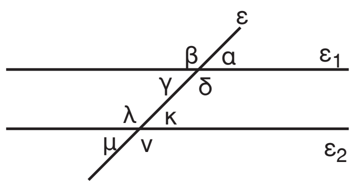
$\widehat{\alpha}$	15°	18°	43°	77°	90°	116°	169°10'
$\widehat{\beta}$ από μέτρηση							
$\widehat{\beta}$ από υπολογισμό							

7. Υπολόγισε τις γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ του σχήματος.



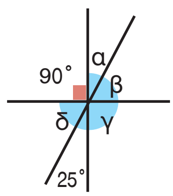
8. Σχεδίασε μια γωνία 37° και μετά σχεδίασε την κατακορυφήν της.

9. Να βρεις όλα τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών του διπλανού σχήματος.



10. Εάν γνωρίζεις ότι η μία γωνία από τις τέσσερις, που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι 57° υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.

11. Να υπολογίσεις τις γωνίες του διπλανού σχήματος (χωρίς μοιρογνωμόνιο).

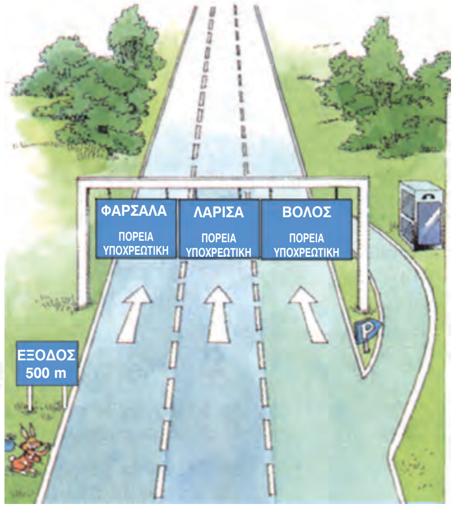


Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

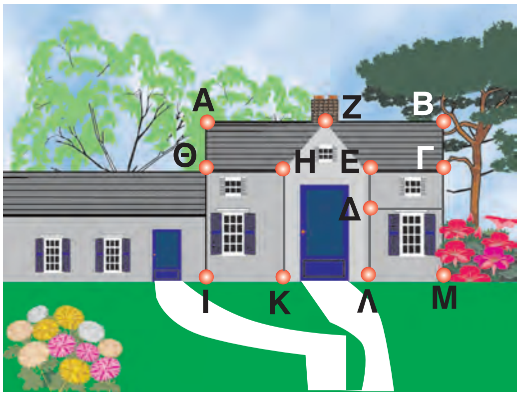
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Οι διαγραμμίσεις του αυτοκινητόδρομου στη διπλανή εικόνα συναντώνται (τέμνονται) κάπου;

➢ *Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



Στην διπλανή εικόνα προσπάθησε να βρεις τη σχετική θέση των ευθειών:
(α) ΑΒ και ΗΕ, (β) ΑΒ και ΒΓ, (γ) ΗΕ και ΚΛ, (δ) ΗΖ και ΖΕ, (ε) ΑΘ και ΒΓ.
(Δικαιολόγησε την απάντησή σου).

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

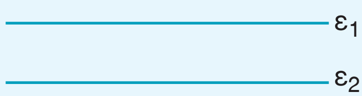
- **Δύο ευθείες** του ιδίου επιπέδου λέγονται **παράλληλες**, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- **Δύο ευθείες** του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται **τεμνόμενες** και το κοινό τους σημείο λέγεται **σημείο τομής** των δύο ευθειών.

Επομένως:

► **Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.**

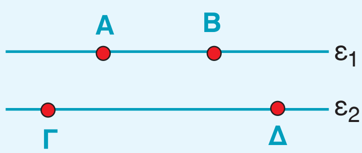
Πώς συμβολίζουμε την παραλληλία δύο ευθειών;

◆ Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "//" και γράφουμε $ε_1 // ε_2$.



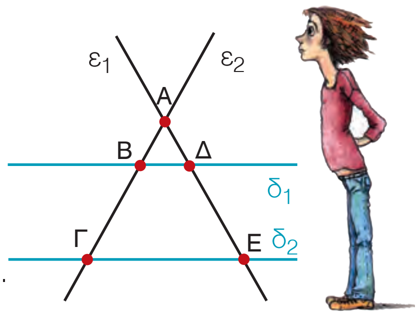
Για τα τμήματα των ευθειών μπορούμε να πούμε ότι:

- Δύο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες, θα λέγονται **παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα** και γράφουμε ΑΒ//ΓΔ.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθούν ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι παράλληλες και ποιες τεμνόμενες.*

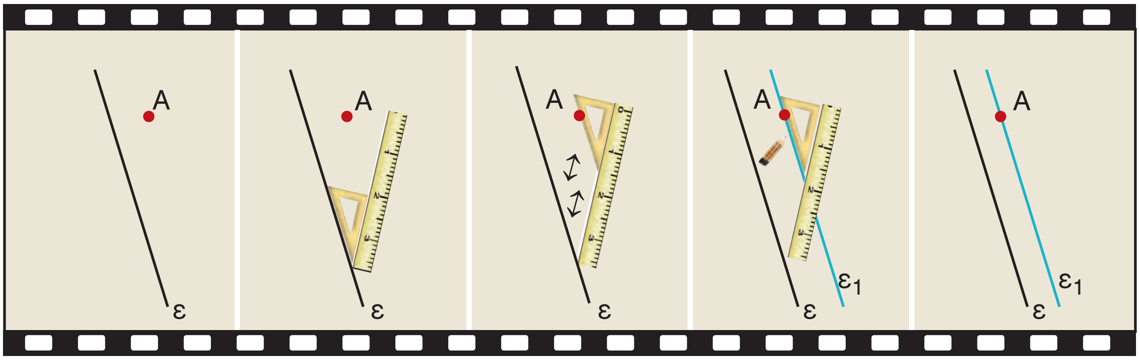


Λύση

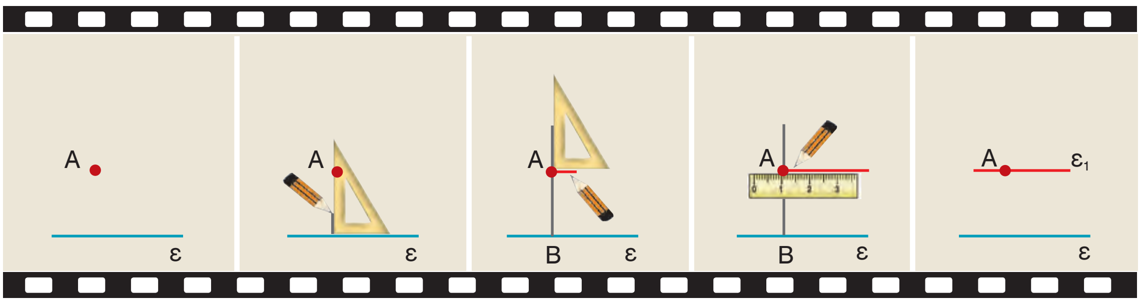
Παράλληλες είναι οι ευθείες δ_1 και δ_2 ($\delta_1 // \delta_2$).
Τεμνόμενες είναι οι ευθείες: (α) ε_1 και ε_2 στο σημείο Α, (β) ε_1 και δ_1 στο σημείο Δ, (γ) ε_1 και δ_2 στο σημείο Ε, (δ) ε_2 και δ_1 στο σημείο Β και (ε) ε_2 και δ_2 στο σημείο Γ.

2. *Να σχεδιαστεί ευθεία ε_1, που να είναι παράλληλη προς μια ευθεία ε και να διέρχεται από σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ε.*

1ος τρόπος: Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε με τον κανόνα και τον γνώμονα την ευθεία ε_1, που διέρχεται από το σημείο **Α** και είναι παράλληλη προς την **ε**.



2ος τρόπος: Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα για να φέρουμε κάθετο **ΑΒ** από το σημείο **Α** στην ευθεία **ε.** Στη συνέχεια φέρουμε την ε_1 κάθετη από το **Α** στην **ΑΒ** η οποία είναι η ζητούμενη παράλληλη της **ε.**

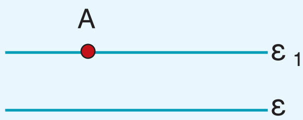


- **Δύο ευθείες** του επιπέδου **κάθετες σε μια ευθεία** είναι μεταξύ τους **παράλληλες.**

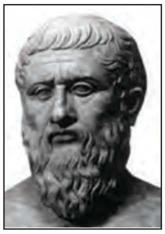
Μπορούμε, άραγε, να φέρουμε κι άλλη (διαφορετική) παράλληλη ευθεία από το Α προς την ε;

Δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση:

▶ Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε.

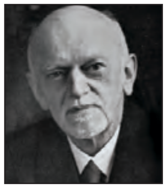


ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Ο Πλάτωνας *έγραψε στην είσοδο της* Ακαδημίας *το ρητό: “Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω”, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα “*Στοιχεία*” (13 βιβλία) του* Ευκλείδη *(άκμασε περίπου το 300 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός* Jean Dieudonné, *έγραψε για τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, ότι: “Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη”.*

Ο Ευκλείδης *στα “*Στοιχεία*” του ορίζει ως παράλληλες:* “**τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον κι από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά**” *(Ορισμός 23) και αμέσως μετά διατυπώνει το διάσημο “5ο Αίτημα”, δηλαδή την πρόταση ότι:* “**εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές**”.



*Σήμερα το 5ο αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατυπώνεται με την εξής μορφή: “*Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτήν μία μόνο παράλληλη*”. Στη διατύπωση αυτή συνέβαλε σημαντικά το 1899 ο Γερμανός μαθηματικός* David Hilbert.

Η αλήθεια της πρότασης αυτής φαίνεται να προκύπτει αβίαστα από την καθημερινή μας εμπειρία. Όμως, από την αρχαιότητα μέχρι τις αρχές του περασμένου αιώνα, έγιναν πολλές αποτυχημένες προσπάθειες να αποδειχθεί με βάση τις άλλες ισχύουσες προτάσεις της Γεωμετρίας. Η πλήρης αποτυχία των προσπαθειών, όμως, δεν πήγε χαμένη. Αποδείχθηκε ότι εκείνο που έφταιγε ήταν το πλαίσιο μέσα στο οποίο γινόντουσαν οι προσπάθειες αυτές, δηλαδή η συγκεκριμένη “Ευκλείδεια” Γεωμετρία. Έτσι αναπτύχθηκαν και άλλες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει το αίτημα αυτό.

Συγκεκριμένα ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobatchevsky *(1792-1856) προτείνει μία διαφορετικού τύπου Γεωμετρία, την “Υπερβολική”, στην οποία το 5ο αίτημα αντικαθίσταται από την πρόταση ότι: “*από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν περισσότερες από δύο παράλληλες προς αυτήν*”. Η Γεωμετρία αυτή περιγράφει χώρους που έχουν παράξενες ιδιότητες, όπως ότι το* άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές *κ.α. Ένας τέτοιος χώρος είναι π.χ. το εσωτερικό του κύκλου στον παράπλευρο πίνακα του Ολλανδού ζωγράφου* Escher.

Επίσης, ο Bernhard Riemann *(1826-1866) θεμελίωσε την λεγόμενη “Ελλειπτική” Γεωμετρία, στην οποία ισχύει ότι: “*από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν*” και στην οποία στηρίχθηκε ο* Albert Einstein *για να διατυπώσει την περίφημη θεωρία του, της* Σχετικότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(α) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέγονται:
- Παράλληλες
- Τεμνόμενες
- Κάθετες

(β) Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται:
- Μία και μοναδική κάθετη ευθεία στην ε.
- Δύο διαφορετικές κάθετες ευθείες στην ε.
- Καμία κάθετη ευθεία στην ε.

(γ) Αν δύο ευθείες του επιπέδου είναι κάθετες σε μια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους:
- Κάθετες
- Παράλληλες
- Τεμνόμενες

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Από ένα σημείο μπορούν να περάσουν .... ευθείες.

(β) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή ....

(γ) Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους ....

(δ) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου, που δεν έχουν κοινό σημείο είναι ....

(ε) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται .... και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο .... των δύο ευθειών.

3. Να χαράξεις τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$, ώστε: (α) οι ευθείες αυτές να μην τέμνονται, (β) η μία να τέμνει τις άλλες δύο, (γ) να τέμνονται ανά δύο και (δ) να έχουν κοινό σημείο.

4. Να σχεδιάσεις δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.

5. Να σχεδιάσεις δύο ημιευθείες Οx και Oy, οι οποίες να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Να σημειώσεις στην Οx τρία σημεία Α, Β και Γ. Από κάθε σημείο από αυτά να σχεδιάσεις ευθεία παράλληλη προς την Oy.

6. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Να φέρεις από τα Α και Β ευθείες παράλληλες προς την ε και να εξετάσεις σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές παράλληλες συμπίπτουν.

Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

Στη γεωμετρία χρησιμοποιούμε την έννοια της απόστασης στις εξής περιπτώσεις:
- *Απόσταση σημείου από σημείο, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο τα ενώνει.*
- *Απόσταση σημείου από ευθεία.*
- *Απόσταση παραλλήλων ευθειών.*

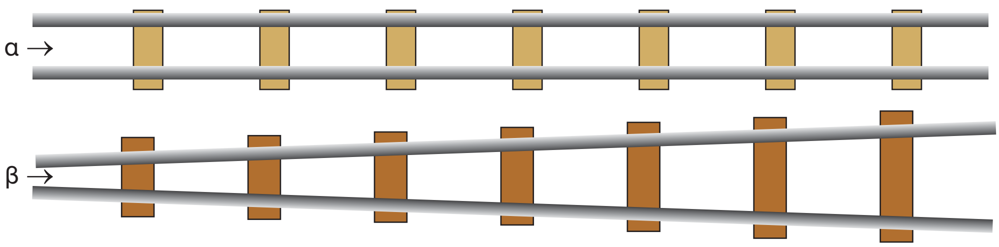
Ας αναζητήσουμε αυτή την έννοια στις παρακάτω δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Να βρεις σε ποιο σημείο του δημόσιου αγωγού νερού, στο παρακάτω σχεδιάγραμμα, πρέπει να γίνει η σύνδεση με το σημείο Α του σπιτιού, ώστε ο σωλήνας να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

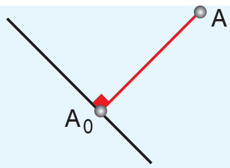
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Σε ποια από τις δύο σιδηροτροχιές (α και β) μπορεί να κινηθεί το τραίνο, χωρίς να εκτροχιαστεί; Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;

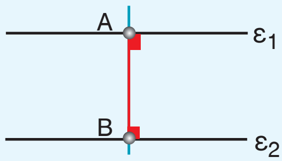


Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Απόσταση** του σημείου **Α** από την ευθεία **ε** ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος $ΑΑ_0$ από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε**.



- **Απόσταση** δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το ΑΒ.

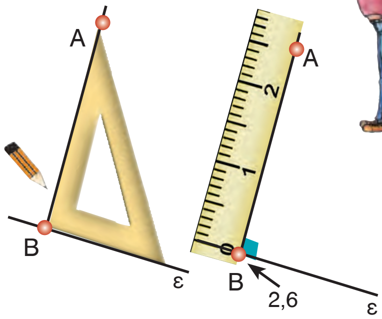


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.*

Λύση

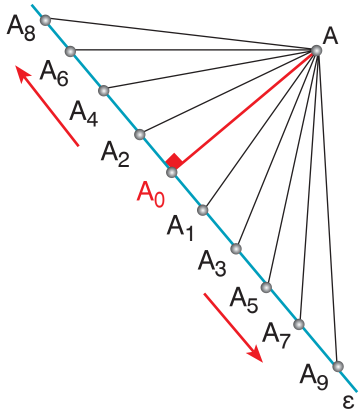
Με τη βοήθεια του γνώμονα σχεδιάζουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** από το **Α** προς την ευθεία **ε**. Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** και το βρίσκουμε π.χ. **2,6 cm**. Άρα, η απόσταση του σημείου **Α** από την ευθεία **ε** είναι, στην περίπτωση αυτή, **2,6 cm**.



2. *Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.*

Λύση

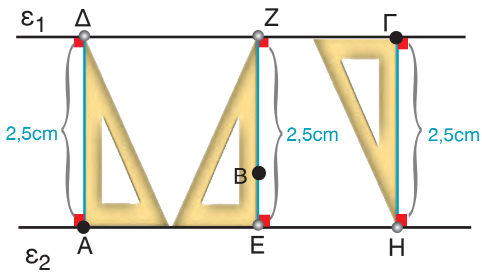
Από το σημείο **Α** φέρνουμε το κάθετο τμήμα **ΑΑ$_0$** στην ευθεία **ε** και συνδέουμε το σημείο **Α** με διάφορα σημεία **Α$_1$**, **Α$_2$**, **Α$_3$**, **Α$_4$**, **Α$_5$**, **Α$_6$**, **Α$_7$**, **Α$_8$** και **Α$_9$** της **ε**.
Μετράμε τις αποστάσεις του **Α** από αυτά και παρατηρούμε ότι αυτές μεγαλώνουν συνεχώς όσο απομακρυνόμαστε **αριστερά** και **δεξιά** από το **Α$_0$**, άρα η ελάχιστη απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΑ$_0$**.
Επομένως το **Α$_0$**, είναι το ζητούμενο σημείο και ονομάζεται **ίχνος** της κάθετης από το **Α**.



3. *Να σχεδιαστούν και να συγκριθούν τα ευθύγραμμα τμήματα που διέρχονται από τα σημεία Α, Β και Γ και εκφράζουν τις αποστάσεις των παραλλήλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.*

Λύση

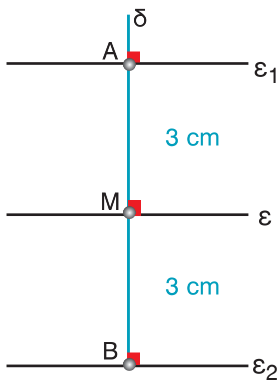
Φέρνουμε τις κάθετες **ΑΔ**, **ΕΒΖ** και **ΗΓ** από τα σημεία **Α**, **Β** και **Γ** στις ευθείες **$ε_1$** και **$ε_2$**.
Μετράμε τα ευθύγραμμα τμήματα **ΑΔ**, **ΕΖ** και **ΗΓ** και βρίσκουμε ότι είναι όλα μεταξύ τους ίσα. Άρα η απόσταση των παραλλήλων ευθειών **$ε_1$** και **$ε_2$** είναι σταθερή και ίση με **2,5 cm**.



4. *Να σχεδιαστούν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες προς μια ευθεία ε, που να απέχουν από αυτή 3 cm.*

Λύση

Σε τυχαίο σημείο **Μ** της **ε** σχεδιάζουμε ευθεία **δ** κάθετη στην **ε**. Πάνω στην ευθεία **δ** βρίσκουμε με το υποδεκάμετρο δύο σημεία **Α** και **Β** έτσι, ώστε να είναι: **ΜΑ = ΜΒ = 3 cm**. Από τα **Α** και **Β**, με τον γνώμονα, σχεδιάζουμε ευθείες **$ε_1$** και **$ε_2$** κάθετες στην **ε**. Οι ευθείες αυτές είναι οι ζητούμενες, γιατί η απόστασή τους από την **ε** είναι **3 cm**.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το μήκος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος $ΑΑ_0$ από το σημείο Α προς την ευθεία ε ονομάζεται .... του σημείου Α από την ευθεία.

(β) Το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος, που είναι κάθετο σε δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές λέγεται .... των δύο παραλλήλων ευθειών.

2. Σημείωσε, πάνω σε μια ευθεία ε, με τη σειρά, τα σημεία Γ, Β και Δ, έτσι ώστε να είναι ΓΒ=ΒΔ=3 cm. Χάραξε μια ευθεία, που να διέρχεται από το Β κάθετη στην ε. Πάνω στην κάθετη αυτή να σημειώσεις ένα σημείο Α, που να απέχει από το Β απόσταση ΑΒ=4 cm. Να συγκρίνεις μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΔ.

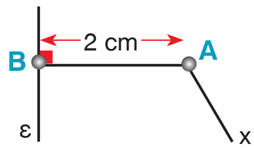
3. Να επαναλάβεις την προηγούμενη άσκηση, εάν είναι: ΓΒ=6 cm, ΒΔ=15 cm, ΑΒ=8 cm.

4. Να σχεδιάσεις δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy. Να πάρεις στην Οx, τα σημεία Α, Β και Γ, τέτοια ώστε να είναι: ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = 2 cm. Να ορίσεις στην Οy ένα σημείο Α', ώστε να είναι ΟΑ' = 1,6 cm και να σχεδιάσεις την ευθεία ΑΑ'. Στη συνέχεια να φέρεις από τα Β και Γ παράλληλες προς την ΑΑ' και να ονομάσεις Β' και Γ' τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν αντίστοιχα την Οy. Να μετρήσεις με το υποδεκάμετρο τα μήκη των τμημάτων Α'Β' και Β'Γ'. Τι παρατηρείς;

5. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία να βρίσκονται στο ένα από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει η ε το επίπεδο, και το καθένα ν' απέχει απ' αυτή 3,2 cm. Να φέρεις από καθένα απ' αυτά τα σημεία ευθεία παράλληλη προς την ε. Πόσες παράλληλες ευθείες υπάρχουν στο σχήμα σου;

6. Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ των οποίων η απόσταση να είναι 35 mm. Να βρεις πέντε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε, που να ισαπέχουν από τις $ε_1$ και $ε_2$. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε από το Α παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$. Τα σημεία Β, Γ, Δ και Ε ανήκουν ή όχι στην ε;

7. Να αντιγράψεις σε τετραγωνισμένο χαρτί το διπλανό σχήμα και να βρεις ένα σημείο Γ της ημιευθείας Αx, που ν' απέχει 3 cm από την ευθεία ε.



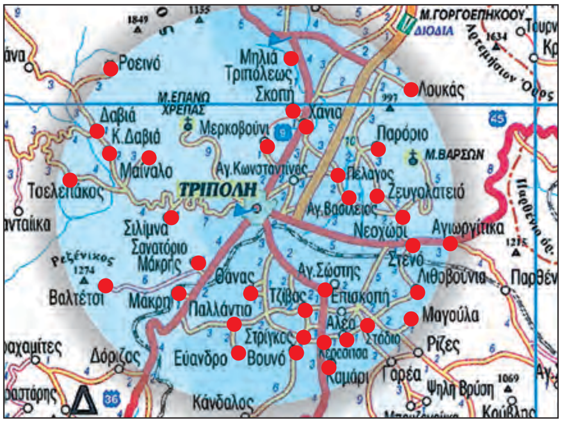
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ένα πλοίο ακολουθεί ευθεία πορεία ΑΒ, που είναι συνολικά 21 Km. Όταν βρίσκεται στη θέση Α απέχει 10 Km από έναν φάρο Φ και όταν βρίσκεται στη θέση Β απέχει 17 Km από τον ίδιο φάρο. Να σχεδιάσεις το σχήμα ΦΑΒ παίρνοντας 1 cm για απόσταση ίση με 1 Km και να υπολογίσεις πόσο κοντά από τον φάρο πέρασε το πλοίο.

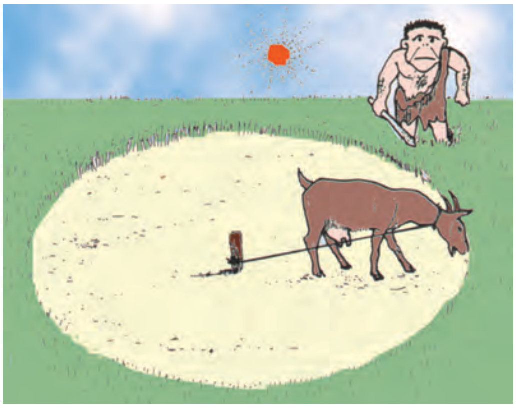
Β.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Στην Τρίπολη της Αρκαδίας γίνεται μια γιορτή, στην οποία είναι καλεσμένοι οι κάτοικοι, που κατοικούν σε απόσταση μικρότερη των 6 Km. Ποιων χωριών οι κάτοικοι θα παρευρεθούν στη γιορτή;



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



Ο πρωτόγονος άνθρωπος για να μη χάσει την κατσίκα του την έδεσε με ένα σχοινί, σ' ένα ξύλινο πάσσαλο, μέσα στο λιβάδι.

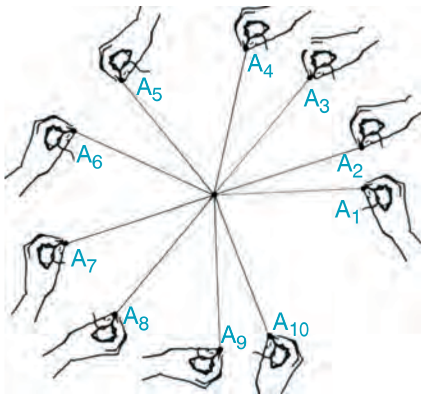
Όταν γύρισε να την πάρει είδε ότι η κατσίκα είχε βοσκήσει εκείνο το μέρος του λιβαδιού που της επέτρεπε το μήκος του σχοινιού να φθάσει. Έτσι, όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένη, είχαν φαγωθεί.

➢ *Ποια γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζει την περιοχή της οποίας το χορτάρι φαγώθηκε;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Να βρεθούν δέκα διαφορετικά σημεία, που ν' απέχουν όλα 2 cm από ένα σημείο Α.

Με τη βοήθεια ενός υποδεκάμετρου μετράμε και βρίσκουμε το ακριβές μήκος των 2 cm σε ένα σχοινί. Μετά, κρατώντας με το ένα χέρι τη μία άκρη αυτού του σχοινιού στο σημείο Α και έχοντας πάντα τεντωμένο το σχοινί, κινούμε με το άλλο χέρι την άλλη άκρη του μήκους αυτού, των 2 cm, σε δέκα διαφορετικές θέσεις A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 και A_{10}, που επιλέγουμε στην τύχη, βρίσκοντας τα αντίστοιχα δέκα ζητούμενα διαφορετικά σημεία.
Βλέπουμε ότι τα σημεία, που απέχουν μια συγκεκριμένη απόσταση από σταθερό σημείο, είναι πάρα πολλά.



➢ *Τι σχήμα φτιάχνουν, λοιπόν, όλα αυτά τα σημεία με την κοινή αυτή ιδιότητα;*

Μέσα από την καθημερινή ζωή, μπορούμε να βρούμε αρκετά παραδείγματα καμπύλων σχημάτων. Όπως είναι π.χ. ο ήλιος στη δύση του, ο τροχός ενός ποδηλάτου, η στεφάνη της μπασκέτας, ένα μεταλλικό νόμισμα, το ρολόι μας, μια τούρτα γενεθλίων, ένας δίσκος μουσικής κλπ.

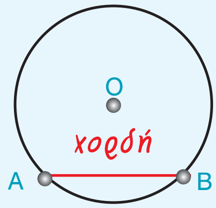
Το πρώτο σχήμα που μπορούσε να επινοήσει ή να ανακαλύψει πάνω στη γη ο άνθρωπος είναι, φυσικά, ο κύκλος. Ο ήλιος και το φεγγάρι αρκούν για να δώσουν στο μάτι το σχήμα και στην ψυχή την ομορφιά της τελειότητας. Και όταν φθάσει η ώρα της σκέψης, τότε η Γεωμετρία αποκτά το πιο πολύτιμο σχήμα της.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

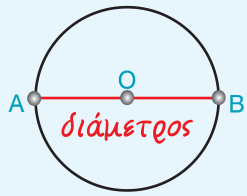
- Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.
- Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κύκλου.
- Ένας κύκλος με κέντρο **Ο** και ακτίνα **ρ**, συμβολίζεται με συντομία **(Ο, ρ)**.
- Για να σχεδιάσουμε έναν κύκλο χρησιμοποιούμε τον διαβήτη.

► Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.

Επίσης:

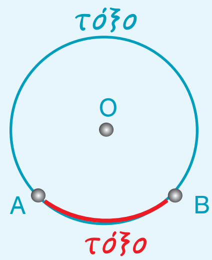


- Το **ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β** του κύκλου, λέγεται **χορδή** του κύκλου.

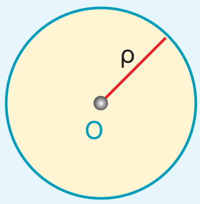


- Ειδικά **η χορδή** που περνάει **από το κέντρο** του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

  ► Η **διάμετρος** είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και **χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη** (ημικύκλια).



- Δύο σημεία **Α** και **Β** του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται **τόξο του κύκλου με άκρα τα Α και Β**.



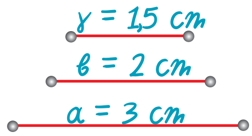
- Κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι ο κύκλος (Ο, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.

  ► Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

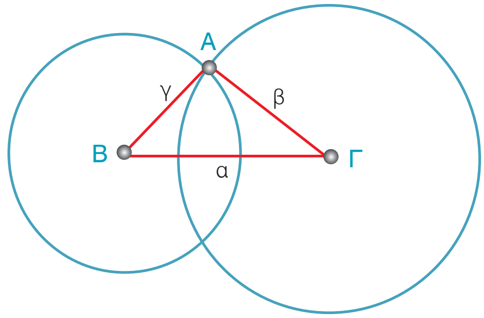
Να σχεδιαστεί ένα τρίγωνο, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του.

Λύση



Ας υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα **α=3 cm**, **β=2 cm** και **γ=1,5 cm** είναι οι πλευρές του τριγώνου που πρέπει να σχεδιάσουμε. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Παίρνουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε πλευρά **ΒΓ = α**.

Μετά χαράζουμε τους κύκλους **(Β,γ=1,5cm)** και **(Γ,β=2cm)**. Οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται στο σημείο **Α**. Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι το ζητούμενο διότι έχει πλευρές: **ΒΓ=3 cm**, **ΑΒ=1,5 cm**, ως ακτίνα του κύκλου **(Β,1,5cm)** και **ΑΓ=2 cm**, ως ακτίνα του κύκλου **(Γ,2cm)**, αφού το **Α** ανήκει και στους δύο κύκλους.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Με κέντρο ένα σημείο Μ να σχεδιάσεις κύκλους με ακτίνες 2,4 cm, 2 cm και 15 mm.*

2. *Να σχεδιάσεις τον κύκλο που έχει διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=3,8 cm.*

3. *Να σχεδιάσεις ομόκεντρους κύκλους με κέντρο σημείο Μ και διαμέτρους 4 cm, 5 cm και 48 mm. (Δύο κύκλοι λέγονται ομόκεντροι, αν έχουν το ίδιο κέντρο και διαφορετικές ακτίνες)*

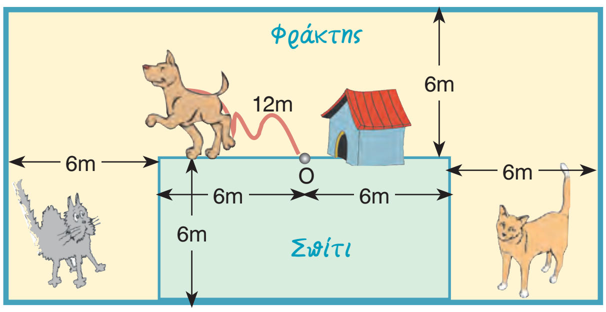
4. *Να σχεδιάσεις έναν κύκλο με κέντρο σημείο Κ και ακτίνα 3,4 cm. Να πάρεις ένα σημείο Μ του κύκλου αυτού και να χαράξεις δύο χορδές του: ΜΑ = 2,4 cm και ΜΒ = 4,1 cm.*

5. *Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm. (α) Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν: 3 cm από το Α και 2 cm από το Β. (β) Ποια σημεία απέχουν ταυτόχρονα 3 cm από το Α και 2 cm από το Β;*

6. *Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,2 cm. Να σχεδιάσεις τους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Β, ΑΒ) και να ονομάσεις Μ και Ν τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι αυτοί. Να βρεις τις αποστάσεις του Μ από τα άκρα Α και Β καθώς και τις αποστάσεις του Ν από τα Α και Β. Στη συνέχεια να συγκρίνεις τις αποστάσεις αυτές.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. *Ένας σκύλος είναι δεμένος με μια αλυσίδα μήκους 12 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να μεταφέρεις το διπλανό σχήμα στο τετράδιο σου και να βρεις, χρωματίζοντας την περιοχή την οποία μπορεί να κινηθεί ο σκύλος. Επίσης, να βρεις σε ποιες περιοχές της αυλής του σπιτιού μπορούν να σταθούν οι γάτες, χωρίς να κινδυνεύουν από τον σκύλο;*

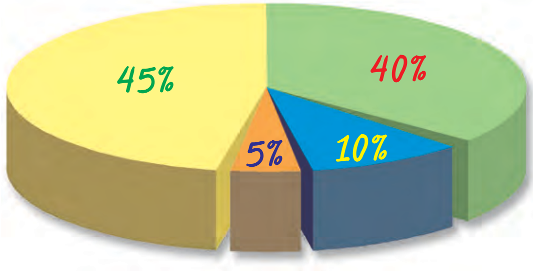


2. *Προσπάθησε να σχεδιάσεις τρίγωνο με πλευρές που είναι:*
α) α=10 cm, β=6 cm και γ=3 cm, β) α=12 cm, β=5 cm και γ=7 cm. Τι παρατηρείς;

Β.1.12. Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου - Μέτρηση τόξου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

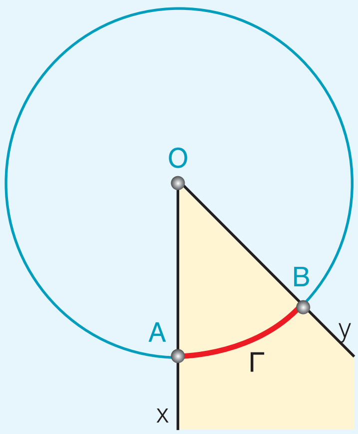
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα ποσοστά που πήραν τέσσερα κόμματα στις εκλογές. Μπορείς να βρεις σε πόσες μοίρες αντιστοιχεί κάθε φέτα της πίτας;



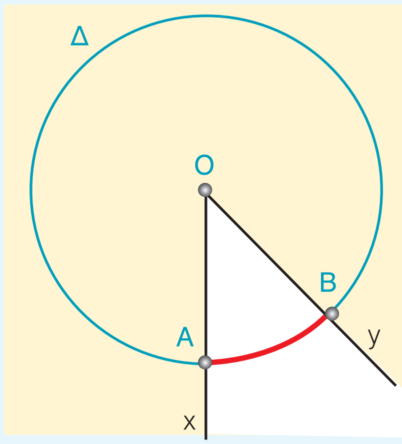
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Κατασκευάζουμε έναν κύκλο **(Ο, ρ)** και μια γωνία **$x\hat{O}y$**, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο **Ο** του κύκλου. Η γωνία αυτή λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

  Αν η πλευρά Οx της γωνίας **$x\hat{O}y$** τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α και η πλευρά Οy στο σημείο Β, τότε:



- Το τόξο **$\overset{\frown}{AΓB}$** που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας **$x\hat{O}y$** λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της **επίκεντρης γωνίας $x\hat{O}y$**.



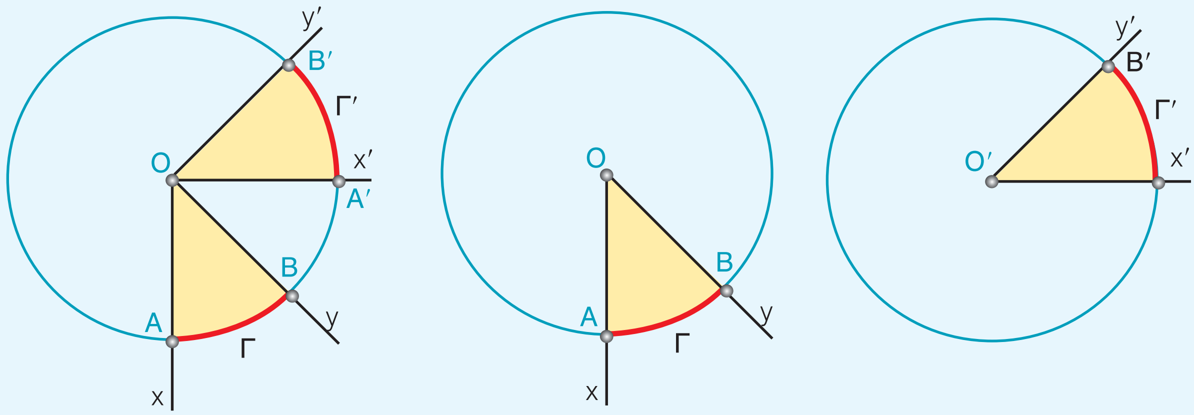
- Το τόξο **$\overset{\frown}{AΔB}$** που βρίσκεται στο εσωτερικό της μη κυρτής γωνίας **$x\hat{O}y$** είναι κι αυτό **αντίστοιχο τόξο** της μη κυρτής **επίκεντρης γωνίας $x\hat{O}y$**.

- **Ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλαδή το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες.**

- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δύο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.

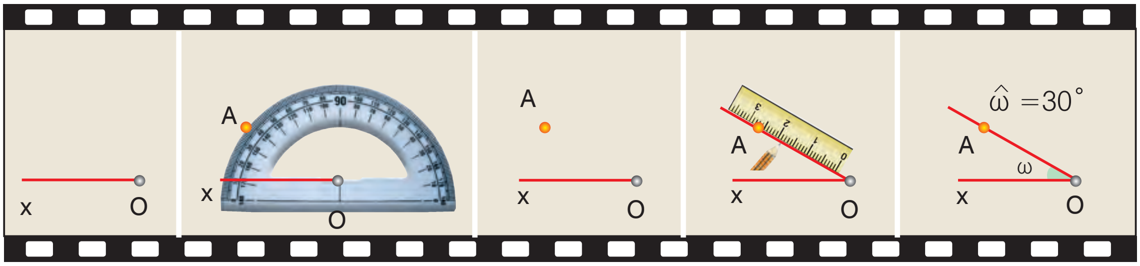
Και αντίστροφα:

- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δύο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες τους.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

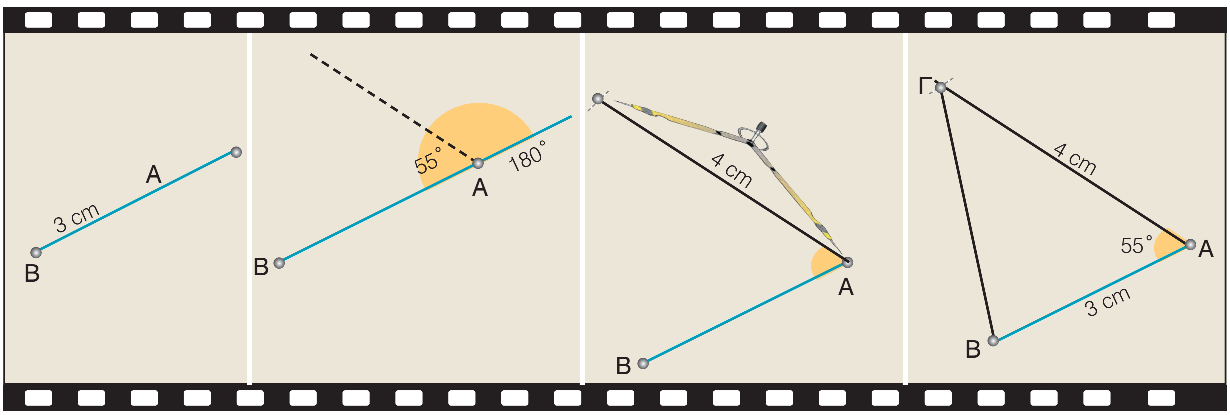
1. *Να κατασκευαστεί γωνία ίση με 30°.*



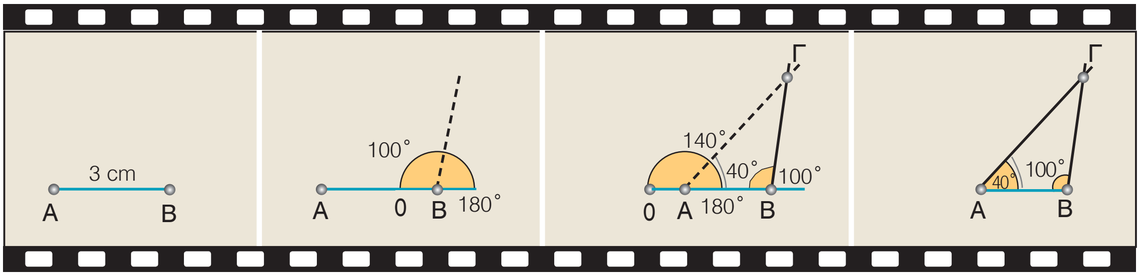
Λύση

Για να κατασκευάσουμε μία γωνία χρησιμοποιούμε το μοιρογνωμόνιο. Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα όργανο με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε το μέτρο ενός τόξου ή μιας γωνίας. Κάθε μοιρογνωμόνιο αντιστοιχεί σε ημικύκλιο που έχει βαθμολογηθεί έτσι, ώστε να δείχνει τα μέτρα των τόξων από 0° έως 180°. Ο τρόπος που μπορούμε να κατασκευάσουμε τη ζητούμενη γωνία 30° φαίνεται στα διαδοχικά παραπάνω σχήματα.

2. *Να κατασκευαστεί τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει δύο πλευρές 3 cm και 4 cm και των οποίων η περιεχόμενη γωνία είναι 55°.*



3. Να κατασκευαστεί τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει μία πλευρά 3 cm και τις προσκείμενες γωνίες 40° και 100°.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρεις πόσες μοίρες έχει: α) ένας κύκλος, β) ένα ημικύκλιο και γ) καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους.

2. Δύο διάμετροι ενός κύκλου σχηματίζουν γωνία 60°. Να βρεις πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από αυτές τις διαμέτρους του.

3. Σχεδίασε δύο κύκλους (Ο, 3cm) και (Ο',4cm). Να ορίσεις στον κάθε κύκλο από ένα τόξο 45° και να εξετάσεις εάν τα τόξα αυτά είναι ίσα. Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

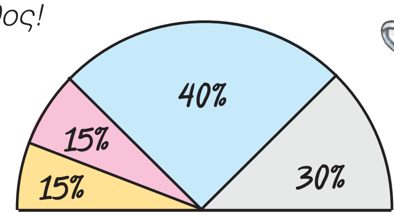
4. Τρεις διάμετροι χωρίζουν έναν κύκλο σε έξι ίσα τόξα. Πόσων μοιρών είναι καθεμιά από τις έξι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα αυτά;

5. Σ' έναν κύκλο (Ο, ρ) να χαράξεις μία χορδή ΑΒ ίση με την ακτίνα του κύκλου. Να υπολογίσεις σε μοίρες την επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και να βρεις σε ποιο κλάσμα του κύκλου αντιστοιχεί το τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

6. Να σχεδιάσεις ένα τμήμα ΑΒ = 2,8 cm και τους κύκλους (Α, 4cm) και (Β, 4cm). Να ονομάσεις Γ το ένα από τα δύο σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι και να μετρήσεις τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Το διπλανό ημικυκλικό διάγραμμα έχει κάποιο λάθος! Γιατί; Μπορείς να το διορθώσεις;

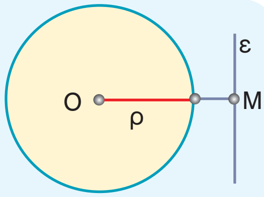


Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

Ας εξετάσουμε τώρα τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν σ' ένα επίπεδο ένας κύκλος και μια ευθεία:

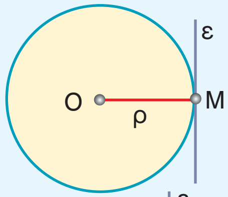
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Όταν ευθεία και κύκλος **δεν έχουν κανένα κοινό σημείο** λέμε ότι η ευθεία είναι **εξωτερική** του κύκλου.



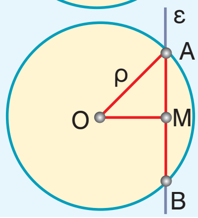
▶ **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ (ΟΜ>ρ), η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.**

- Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν ένα μόνο κοινό σημείο** Μ, η ευθεία λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου στο σημείο Μ.



▶ **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ (ΟΜ=ρ), η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.**

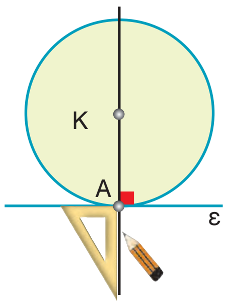
- Όταν ευθεία και κύκλος **έχουν δύο κοινά σημεία** Α και Β, η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου **ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β.**



▶ **Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ (ΟΜ<ρ), η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

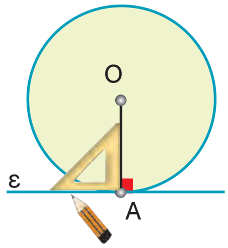
1. *Να σχεδιαστεί κύκλος που να εφάπτεται σε σημείο μιας ευθείας.*



Λύση

Παίρνουμε μια ευθεία **ε** και το σημείο της **Α**. Σχεδιάζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην **ε** στο σημείο **Α**. Με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο **Κ** της κάθετης αυτής και ακτίνα το τμήμα **ΚΑ** γράφουμε κύκλο. Ο κύκλος που φέραμε θα εφάπτεται στην ευθεία **ε**, διότι αυτή είναι κάθετη στην ακτίνα **ΚΑ** του κύκλου στο άκρο της **Α**.

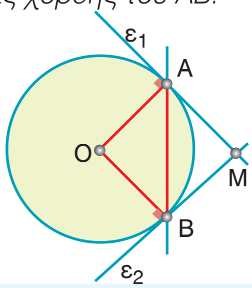
2. *Να σχεδιαστεί ευθεία που να εφάπτεται σε σημείο ενός κύκλου.*



Λύση

Παίρνουμε ένα κύκλο **(Ο, ρ)** και το σημείο του **Α**. Σχεδιάζουμε την ευθεία ε, που είναι κάθετη στην ακτίνα **ΟΑ** στο σημείο **Α**. Η ευθεία **ε** θα εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο **Α**, διότι είναι κάθετη στην ακτίνα **ΟΑ** στο άκρο της **Α**.

3. *Να σχεδιαστούν εφαπτόμενες ενός κύκλου* **(Ο, ρ)** *στα άκρα Α και Β μιας χορδής του ΑΒ.*



Λύση

Σχεδιάζουμε τις ακτίνες **ΟΑ** και **ΟΒ**. Στο σημείο **Α** της ακτίνας **ΟΑ** φέρνουμε την ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ κάθετη στην ακτίνα αυτή. Η ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο **Α**. Στο σημείο **Β** της ακτίνας **ΟΒ** φέρνουμε την ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ κάθετη στην ακτίνα αυτή. Η ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο **Β**.

- **Αν είναι Μ το σημείο που τέμνονται οι εφαπτόμενες, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 που να απέχουν μεταξύ τους 2,5 cm. Να πάρεις ένα σημείο Μ της ε_1 και να βρεις σημεία της ε_2 που απέχουν 3,6 cm από το Μ.

2. Να σχεδιάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,6 cm και έναν κύκλο με διάμετρο την ΑΒ. Να χαράξεις τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από τα Α και Β. Να δικαιολογήσεις γιατί οι εφαπτόμενες αυτές είναι ευθείες παράλληλες.

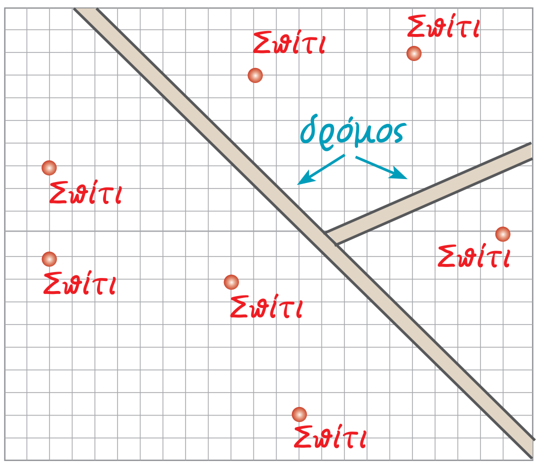
3. Παίρνουμε έναν κύκλο (Ο, ρ) και μια ευθεία ε. Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε. Να βρεις τον αριθμό των κοινών σημείων του κύκλου και της ευθείας, στις περιπτώσεις: (α) Αν ρ = 5 cm και δ = 4 cm, (β) αν ρ = 2,5 cm και δ = 2,5 cm και (γ) αν ρ = 3 cm και δ = 6 cm.

4. Να σχεδιάσεις δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 και να ονομάσεις Α το σημείο τομής τους. Να πάρεις ένα σημείο Κ της ε_1, ώστε να είναι ΚΑ = 3,1 cm. Να φέρεις τους κύκλους (Κ, 2,1cm), (Κ, 3,1cm) και (Κ, 36mm). Να βρεις ποια είναι η θέση της ε_2 ως προς τους κύκλους αυτούς.

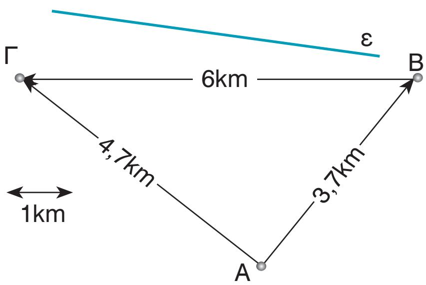
5. Να σχεδιάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=40 mm. Να πάρεις ένα σημείο Μ του ΑΒ, ώστε να είναι ΑΜ=18 mm. Να φέρεις τους κύκλους (Α, 18 mm) και (Β, 22 mm). Να χαράξεις ευθεία ε που να διέρχεται από το Μ και να είναι κάθετη στην ΑΒ. Ποια είναι η θέση της ε ως προς τον καθένα από τους κύκλους; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Μια επιχείρηση αποφάσισε να κατασκευάσει ένα εργοστάσιο σε μια αγροτική περιοχή που επιλέγει για τον σκοπό αυτό. Η πλευρά κάθε τετραγώνου του διπλανού σχήματος, αντιπροσωπεύει απόσταση 100 m. Το εργοστάσιο πρέπει να βρίσκεται τουλάχιστον σε ακτίνα 600 m μακριά από τα σπίτια (Σ). Επίσης πρέπει να απέχει το λιγότερο 300 m από την άκρη του δρόμου. Να αντιγράψεις σε τετραγωνισμένο χαρτί το σχήμα και να χρωματίσεις τις περιοχές όπου μπορεί να κατασκευαστεί το εργοστάσιο.

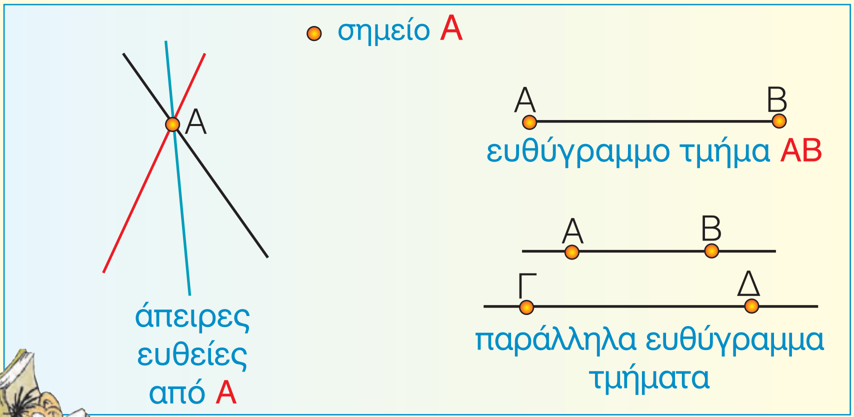


2. Η συμφωνία μεταξύ των χωριών Α, Β και Γ για την κατασκευή μιας γεώτρησης σε μια θέση Μ περιλαμβάνει τους εξής τρεις όρους:
α) ΑΜ>2 km, β) ΒΜ=3 km και γ) ΓΜ=4 km. Να αντιγράψεις το παρακάτω σχήμα και να βρεις τη θέση του σημείου Μ, καθώς και την απόσταση της θέσης αυτής από τον δρόμο ε.

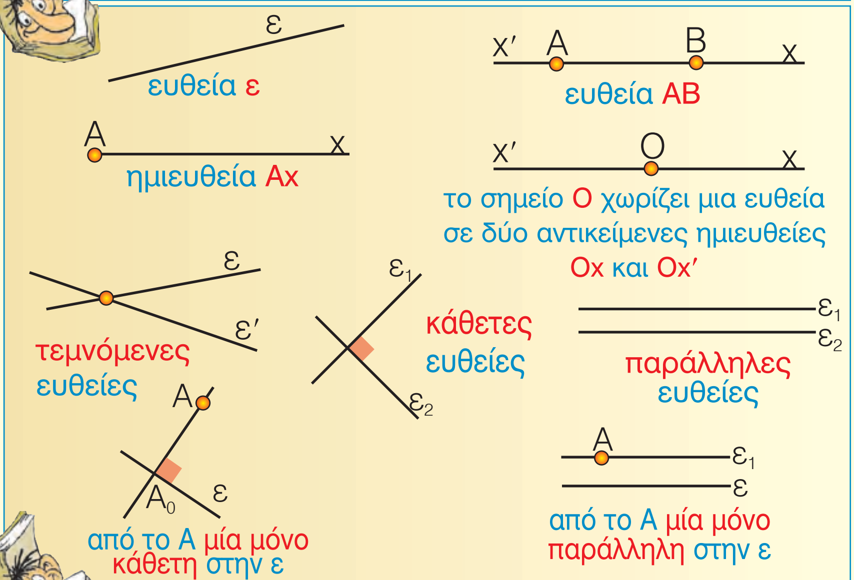


Ανακεφαλαίωση

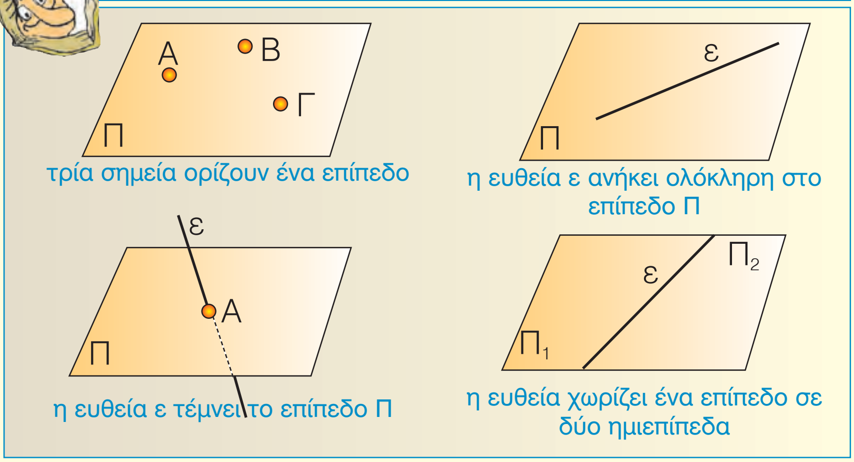
- ΣΗΜΕΙΟ
- ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ



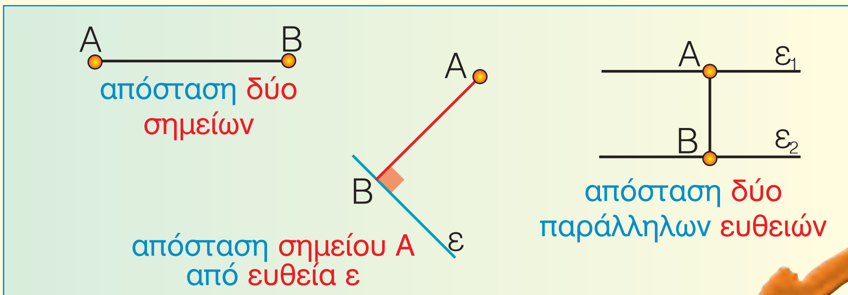
- ΕΥΘΕΙΑ
- ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ



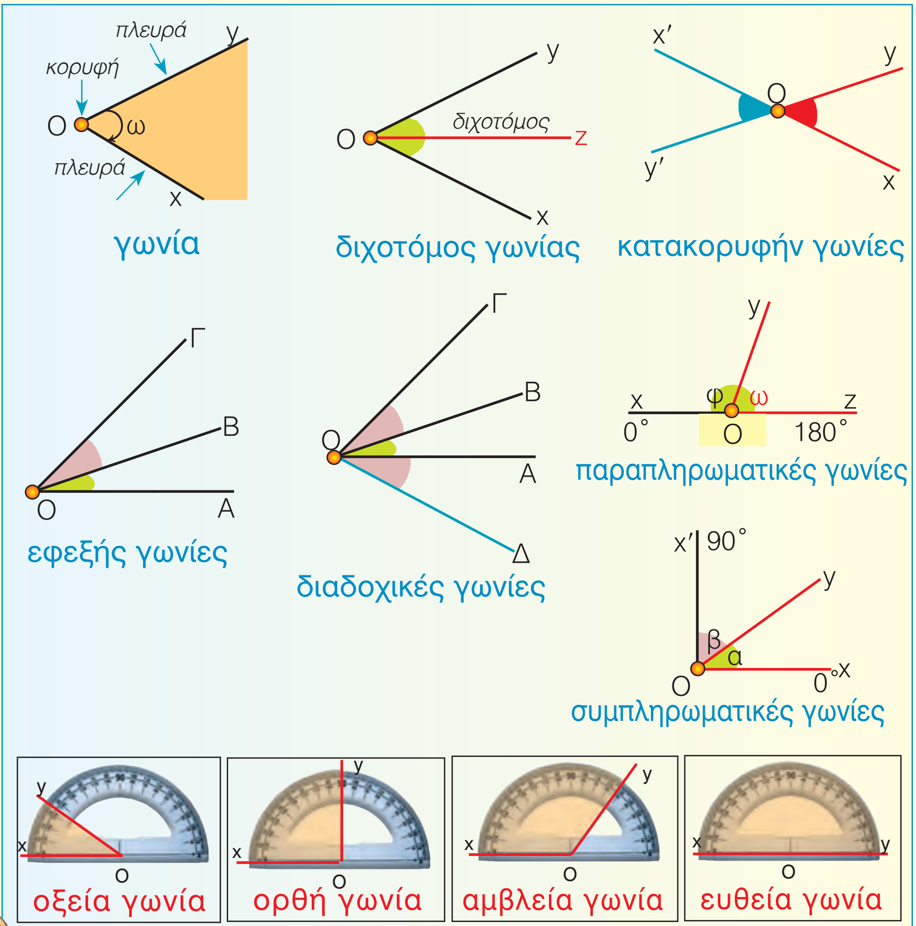
- ΕΠΙΠΕΔΟ
- ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ



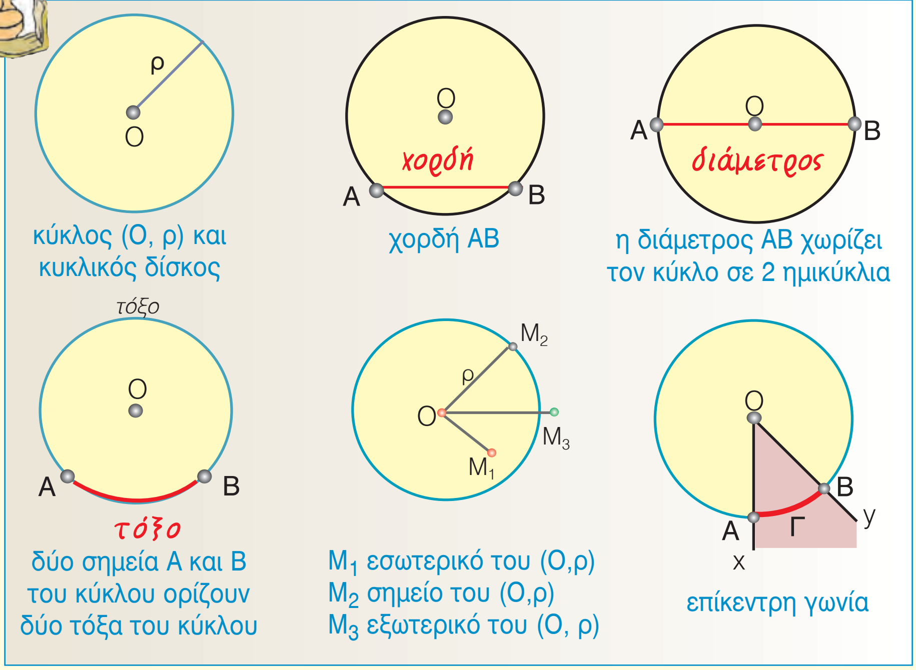
- ΑΠΟΣΤΑΣΗ



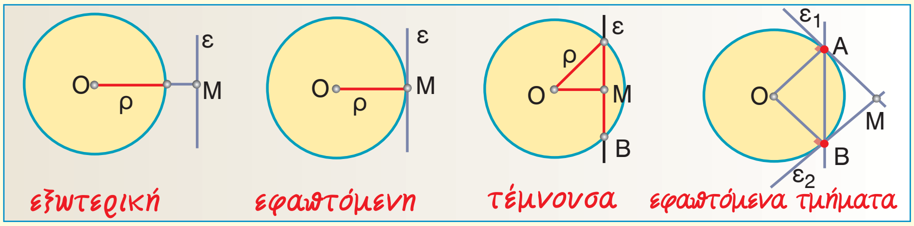
● ΓΩΝΙΑ



● ΚΥΚΛΟΣ



● ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ



ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Πολύ συχνά, σ' αυτά που διαβάζουμε, σε ό,τι ακούμε, αλλά και σε εκείνα που γράφουμε ή λέμε, υπάρχουν λέξεις που την αρχική τους προέλευση ή τη βασική τους σημασία την αντλούν από τη γεωμετρία ή γενικότερα από τα μαθηματικά.

Είναι λέξεις που τις χρησιμοποιούμε με την ίδια περίπου έννοια όπως και στα μαθηματικά, π.χ. "στο μέσο της διαδρομής" ή "το μισό του προϋπολογισμού" κ.λπ.

Σε αρκετές όμως περιπτώσεις, με αυτές τις λέξεις εκφραζόμαστε μεταφορικά, αποδίδοντάς τους ένα ευρύτερο νόημα. Λέμε π.χ. "Όλες οι χώρες της Ευρώπης δε βρίσκονται στο ίδιο οικονομικό επίπεδο" ή "το φεστιβάλ συνεχίστηκε με παράλληλες εκδηλώσεις".

Στο κείμενο που ακολουθεί, υπάρχουν πολλές τέτοιες λέξεις.
Προσπάθησε να τις εντοπίσεις και να τις υπογραμμίσεις με την πρώτη ανάγνωση.

"Το κρίσιμο σημείο"

... Η μπάλα έχει τοποθετηθεί στο σημείο του "πέναλτι". Οι φίλαθλοι στις κερκίδες έχουν παγώσει. Οι παίκτες των δύο ομάδων βρίσκονται, ήδη, έξω από τις γραμμές της μεγάλης περιοχής. Ο τερματοφύλακας, στο μέσον ακριβώς της εστίας του, κοιτάζει κατευθείαν στα μάτια τον αντίπαλό του, που ετοιμάζεται να εκτελέσει την εσχάτην των ποινών αυτού του αγώνα. Για ένα κλάσμα του δευτερολέπτου οι δύο παίκτες και η μπάλα βρίσκονται ακριβώς στην ίδια ευθεία και αμέσως μετά η σφαιρική μάγισσα διαγράφει μια καμπύλη τροχιά και καρφώνεται στη δεξιά γωνία της εστίας, τη στιγμή που ο τερματοφύλακας πέφτει προς την αντίθετη πλευρά.
"Γκοοοοοοόλ", φωνάζει με όλη τη δύναμή του ο Μιχάλης, τρέχοντας προς το κέντρο του κατάφωτου από τους προβολείς γηπέδου, ενώ οι οπαδοί της ομάδας του τον αποθεώνουν, αφού έδωσε λύση στο πιο κρίσιμο σημείο του αγώνα.
Ταυτόχρονα, ανοίγει η πόρτα του δωματίου και η μητέρα του Μιχάλη, μισοξυπνημένη, τρέχει ανήσυχη να δει τι συμβαίνει στον ύπνο του γιού της.

- Αυτό το παιδί, μουρμουρίζει, δε θα μάθει ποτέ να σβήνει το φως πριν κοιμηθεί...

- *Μπορείς στα νεοελληνικά κείμενα, αλλά και στα άλλα μαθήματα π.χ. στην ιστορία, τη Γεωγραφία, τη Βιολογία κ.λπ., να εντοπίσεις τέτοιες λέξεις;*
- *Να ελέγξεις σε ποιες περιπτώσεις έχουν σημασία κυριολεκτική και σε ποιες μεταφορική.*
- *Προσπάθησε να συλλέξεις φράσεις, από λογοτεχνικά κείμενα, όπου οι λέξεις χρησιμοποιούνται κυρίως με μεταφορική σημασία, όπως π.χ. "βίοι παράλληλοι", "του κύκλου τα γυρίσματα" κ.λπ.*
- *Τέλος, προσπάθησε να γράψεις κι εσύ ένα κείμενο ή μια ιστορία, στην οποία να χρησιμοποιήσεις τέτοιες λέξεις ή εκφράσεις, με κυριολεκτική ή και μεταφορική σημασία.*

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1. *Αντικείμενες ημιευθείες λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή.*		
2. *Παράλληλες λέγονται δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου, που δεν έχουν κοινό σημείο.*		
3. *Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών λέγεται το μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του σ' αυτές.*		
4. *Αντίστοιχα στοιχεία των ίσων σχημάτων λέμε αυτά που συμπίπτουν όταν τοποθετήσουμε τα σχήματα το ένα πάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.*		
5. *Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο Μ του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.*		
6. *Τόξο λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β του κύκλου.*		
7. *Διάμετρος του κύκλου λέγεται η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου.*		
8. *Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες, με άθροισμα 90°.*		
9. *Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα 180°.*		
10. *Κατακορυφήν γωνίες λέγονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή.*		
11. *Από ένα σημείο διέρχεται μία μόνο ευθεία.*		
12. *Από δύο σημεία μπορούν να περάσουν άπειρες ευθείες.*		
13. *Μια ευθεία επεκτείνεται απεριόριστα.*		
14. *Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.*		
15. *Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε άπειρα ημιεπίπεδα.*		
16. *Δύο ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο είναι πάντα παράλληλες.*		
17. *Από ένα σημείο Α μπορούμε να φέρουμε άπειρες ευθείες κάθετες σε μια ευθεία.*		
18. *Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι μεταξύ τους κάθετες.*		
19. *Οι τεθλασμένες γραμμές διακρίνονται σε κλειστές ή μη κυρτές.*		
20. *Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.*		
21. *Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή με τα ίδια άκρα Α και Β.*		
22. *Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ που ενώνει ένα σημείο Α του κύκλου με το κέντρο του Ο είναι διάμετρος του κύκλου.*		
23. *Δύο κύκλοι με ακτίνες άνισες είναι ίσοι.*		
24. *Η διάμετρος είναι τριπλάσια από την ακτίνα του κύκλου.*		
25. *Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.*		
26. *Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.*		
27. *Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι συμπληρωματικές.*		
28. *Ημικύκλιο λέγεται ένα από τα δύο τόξα, στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από μια διάμετρό του.*		

ΜΕΡΟΣ Β΄

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συμμετρία

2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

- *Γνωρίζω πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς ευθεία*
- *Γνωρίζω πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς ευθεία και ότι τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα*
- *Βρίσκω το συμμετρικό σημείο ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, τριγώνου, γωνίας και κύκλου ως προς μία ευθεία και γνωρίζω τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή*

2.2. Άξονας συμμετρίας

- *Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας*

2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

- *Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με τη βοήθεια βαθμολογημένου κανόνα και γνώμονα*
- *Γνωρίζω τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος*
- *Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με κανόνα και διαβήτη*

2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

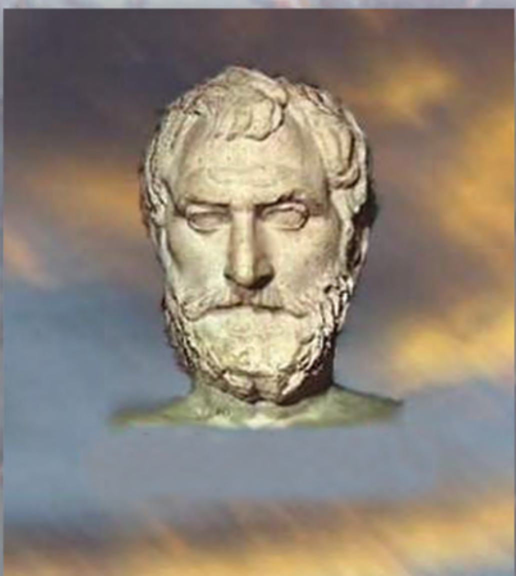
- *Γνωρίζω ότι η συμμετρία ως προς κέντρο Ο είναι μια στροφή γύρω από το Ο κατά γωνία 180°*
- *Γνωρίζω πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς σημείο*
- *Γνωρίζω πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς σημείο και ότι αυτά τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα*
- *Κατασκευάζω το συμμετρικό σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, γωνίας, τριγώνου, πολυγώνου και κύκλου ως προς σημείο*

2.5. Κέντρο συμμετρίας

- *Αναγνωρίζω σχήματα με κέντρο συμμετρίας*
- *Γνωρίζω τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας και τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή*

2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

- *Γνωρίζω πώς ονομάζονται τα ζεύγη των γωνιών που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων με μία τέμνουσά τους*
- *Διαπιστώνω ότι όλες οι οξείες (ή οι αμβλείες) γωνίες, που σχηματίζουν δύο παράλληλες οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία, είναι ίσες*
- *Διαπιστώνω ότι μία οξεία και μία αμβλεία γωνία από τις γωνίες που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων από την τρίτη ευθεία είναι παραπληρωματικές*



ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ
(640 - 546 π.Χ.)

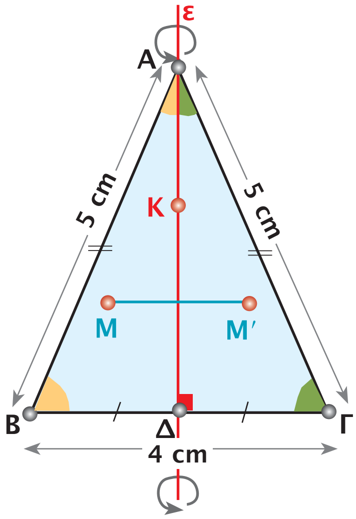
Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

Τι είναι συμμετρία; Ο ποιητής θα έλεγε: ό,τι φοριέται από την ανάποδη. Ό,τι διπλώνει και ταιριάζει, ό,τι στρίβει και «συμπίπτει». Μόνο η φαντασία δεν έχει καθόλου συμμετρία. Γι' αυτό η συμμετρία χρειάζεται και λίγη φαντασία. Αν αυτή ακριβώς τη φαντασία τη φορέσουμε ανάποδα, θα μας βγει όλη η Γεωμετρία.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατασκεύασε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 4 cm και τη διάμεσό του ΑΔ.
Δίπλωσε το σχήμα κατά μήκος της ευθείας ε που ανήκει η ΑΔ.

➢ *Τι παρατηρείς;*



Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΓΔ** συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει, ότι κάθε σημείο του ενός τριγώνου συμπίπτει με ένα σημείο του άλλου τριγώνου. Για παράδειγμα, το **Β** συμπίπτει με το **Γ**. Τα σημεία αυτά λέγονται **συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε**.

Με τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας **ε**, κάθε σημείο της συμπίπτει με τον εαυτό του. Επομένως συμμετρικό του **Α** είναι το **Α**, του **Δ** το **Δ** και ενός οποιουδήποτε σημείου **Κ** της **ε** το ίδιο το **Κ**.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Συμμετρικό σημείου **Β** ως προς ευθεία **ε**, είναι το σημείο **Γ** με το οποίο συμπίπτει το **Β**, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας **ε**.

► **Κάθε σημείο μιας ευθείας ε είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ε.**

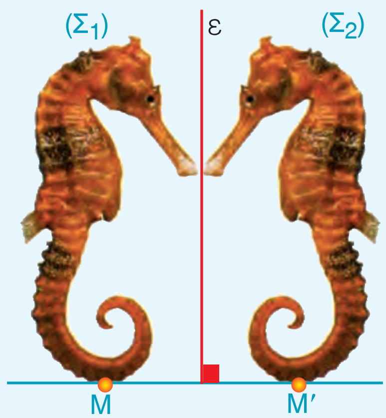
Όπως είδαμε, με τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας **ε** κάθε σημείο του τριγώνου **ΑΒΔ** συμπίπτει με ένα σημείο του τριγώνου **ΑΓΔ**. Αυτό σημαίνει ότι καθένα από τα τρίγωνα αυτά αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων του άλλου τριγώνου ως προς την ευθεία **ε**.

Γι' αυτό λέμε ότι:

◆ Τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΓΔ** είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία **ε**.

Γενικότερα:

- Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία **ε**, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την **ε**.



Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της **ε** συμπίπτει το (Σ_1) με το (Σ_2), γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα. Επομένως:

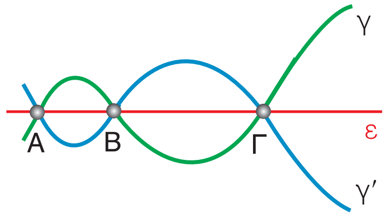
◆ **Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Μια γραμμή γ τέμνει την ευθεία ε στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρεθεί ο λόγος για τον οποίο και η συμμετρική γ′ της γ, ως προς την ευθεία ε, θα περνάει από τα ίδια σημεία.*

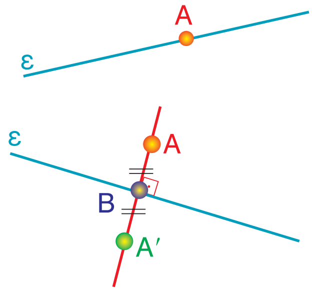
Λύση

Η συμμετρική γραμμή **γ′** της **γ** ως προς την **ε**, αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων της **γ**. Επομένως στη **γ′** ανήκουν και τα συμμετρικά σημεία των **Α, Β** και **Γ**. Επειδή όμως τα **Α, Β** και **Γ** είναι σημεία της **ε** τα συμμετρικά τους είναι τα ίδια τα σημεία. Άρα τα **Α, Β** και **Γ** ανήκουν και στη **γ′**.



2. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′ σημείου Α ως προς μια ευθεία ε.*

Λύση

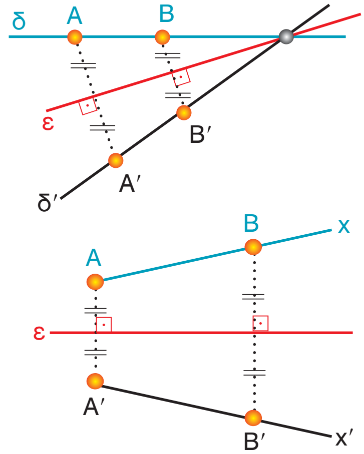


Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το σημείο **Α ανήκει** στην ευθεία **ε**. Τότε, όπως είδαμε, το συμμετρικό του είναι το **ίδιο το σημείο Α**.
- Το σημείο **Α δεν ανήκει** στην ευθεία **ε**. Τότε, για να βρούμε το συμμετρικό του, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία: Φέρνουμε το κάθετο τμήμα **ΑΒ** από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε** και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα, ώστε να είναι ΒΑ′ = ΑΒ. Το σημείο **Α′** είναι το συμμετρικό του **Α** ως προς την ευθεία **ε**.

3. *Να κατασκευαστεί η συμμετρική ως προς ευθεία ε: (α) ευθείας δ και (β) ημιευθείας Αx.*

Λύση

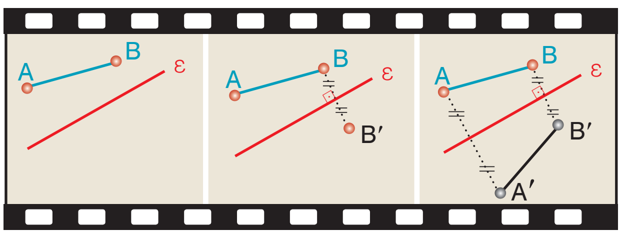


(α) Παίρνουμε δύο σημεία **Α** και **Β** πάνω στην ευθεία **δ** και βρίσκουμε, όπως περιγράφεται στην εφαρμογή 3, τα συμμετρικά τους **Α′** και **Β′**, ως προς την **ε**. Η ευθεία **δ′** που ορίζουν τα **Α′** και **Β′** είναι η συμμετρική της ευθείας **δ**.

(β) Παρόμοια παίρνουμε, εκτός του **Α**, ένα δεύτερο σημείο **Β** πάνω στην ημιευθεία **Αx** και βρίσκουμε, όπως πριν, τα συμμετρικά τους **Α′** και **Β′** ως προς την **ε**. Η ημιευθεία **Α′x′** που ορίζουν τα **Α′** και **Β′** είναι η συμμετρική της ημιευθείας **Αx**.

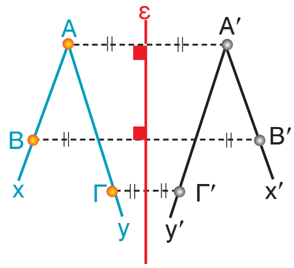
4. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ως προς μια ευθεία ε.*

Λύση



Βρίσκουμε με τον τρόπο που είδαμε στην εφαρμογή 3, τα συμμετρικά **Α′** και **Β′**, ως προς την **ε**, των **Α** και **Β** αντίστοιχα. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα **Α′Β′** θα είναι το συμμετρικό του **ΑΒ**, ως προς την ευθεία **ε**.
Τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα θα είναι μεταξύ τους ίσα, δηλαδή: **Α′Β′ = ΑΒ**.

5. *Να κατασκευαστεί η συμμετρική γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς μία ευθεία ε.*



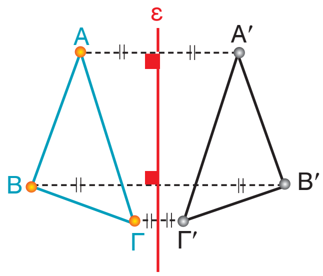
Λύση

Για να κατασκευάσουμε τη γωνία $x'\hat{A}'y'$ αρκεί να βρούμε το συμμετρικό **Α′** της κορυφής **Α** καθώς και τα συμμετρικά **Β′** και **Γ′** δύο ακόμα σημείων **Β** και **Γ**, που ανήκουν το καθένα σε μια από τις πλευρές της αντίστοιχα.
Γνωρίζουμε ότι θα είναι: $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.

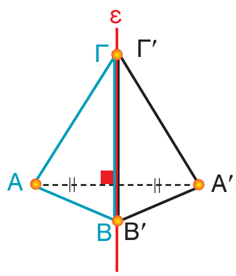
6. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′Γ′ ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς μία ευθεία ε, η οποία (α) δεν τέμνει τις πλευρές του, (β) διέρχεται από δύο κορυφές του και (γ) τέμνει τις δύο πλευρές του.*

Λύση

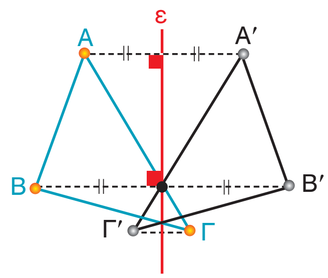
Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε τα συμμετρικά **Α′**, **Β′**, **Γ′**, ως προς την **ε**, των κορυφών **Α**, **Β**, **Γ** του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει συμμετρικό το τρίγωνο **Α′Β′Γ′**, που είναι ίσο με το **ΑΒΓ**.



(Η ε δεν τέμνει τις πλευρές)

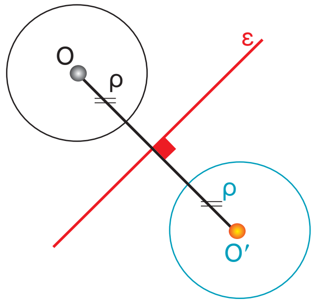


(Η ε διέρχεται από τα Β και Γ)



(Η ε τέμνει τις πλευρές)

7. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό κύκλου (Ο, ρ) ως προς ευθεία ε.*



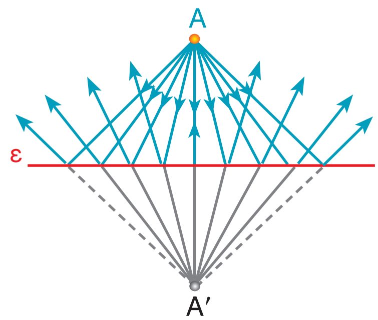
Λύση

Το συμμετρικό του κύκλου **(Ο, ρ)** ως προς την ε είναι κύκλος **(Ο′, ρ)** ίσος με τον **(Ο, ρ)**, με **Ο′** συμμετρικό του **Ο** ως προς την **ε**. Όπως όλα τα συμμετρικά σχήματα, οι κύκλοι **(Ο, ρ)** και **(Ο′, ρ)** είναι **ίσοι**, δηλαδή έχουν ίσες ακτίνες.

8. *Να χαραχθεί η πορεία των ακτίνων του φωτός, που εκπέμπονται από ένα φωτεινό σημείο Α και ανακλώνται σ' έναν επίπεδο καθρέφτη (ο οποίος στο σχήμα φαίνεται ως μία ευθεία ε).*

Λύση

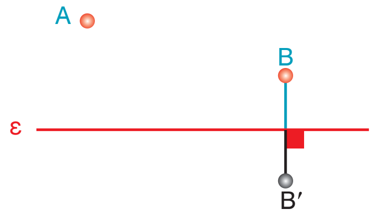
Βρίσκουμε το συμμετρικό **Α′** του σημείου **Α** ως προς την ευθεία **ε**.



Οι ακτίνες ανακλώνται στον καθρέφτη και ακολουθούν την πορεία, που θα είχαν, αν η πηγή του φωτός ήταν το σημείο **Α′**. Επειδή οι γωνίες που σχηματίζουν οι ακτίνες με την **ε** είναι συμμετρικές, θα είναι και ίσες.
Άρα, η γωνία με την οποία μια ακτίνα πέφτει στον καθρέφτη είναι ίση με τη γωνία με την οποία ανακλάται.

9. *Στο σχήμα τα σημεία Β και Β′ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Να βρεθεί με τη βοήθεια μόνο του χάρακα το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.*

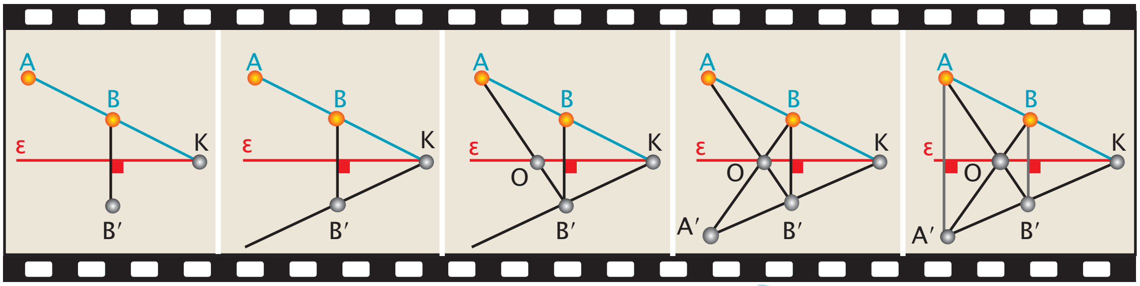
Λύση



Επειδή με τον χάρακα μπορούμε να φέρουμε μόνο ευθείες γραμμές, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα:

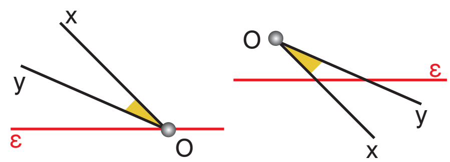
- Φέρνουμε την ευθεία **ΑΒ** και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει τον άξονα **ε** στο σημείο **Κ**.
- Φέρνουμε την ευθεία **ΚΒ′**, η οποία είναι συμμετρική της **ΚΒ**, αφού ενώνει δύο συμμετρικά σημεία αυτής, τα **Κ** και **Β′**.
- Φέρνουμε την **ΑΒ′**, που τέμνει την **ε** στο **Ο**.
- Τέλος, φέρνουμε την **ΒΟ**, που η συμμετρική της είναι η **ΟΒ′**.

Οι ευθείες **ΚΒ′** και **ΒΟ** είναι συμμετρικές των **ΚΒ** και **Β′Ο** αντίστοιχα και οι τομές τους θα είναι συμμετρικά σημεία, τα **Α** και **Α′**.

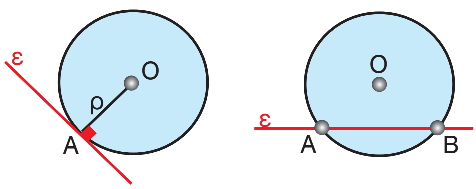


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

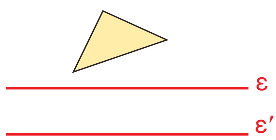
1. *Να βρεις τη συμμετρική της γωνίας $x\hat{O}y$ ως προς την ευθεία ε, σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις.*



2. *Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου (Ο, ρ) ως προς την ευθεία ε σε καθεμιά από τις δύο περιπτώσεις.*



3. *Να βρεις το συμμετρικό του σχήματος ως προς την ευθεία ε και το συμμετρικό του νέου σχήματος ως προς την ευθεία ε′, η οποία είναι παράλληλη με την ε. Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο σχήμα; Να επαναλάβεις το ίδιο και με μια τρίτη παράλληλη. Τι παρατηρείς;*



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. *Βρες το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια ευθεία ε και το συμμετρικό του νέου τριγώνου ως προς μία άλλη ευθεία ζ. Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο τρίγωνο; Να επαναλάβεις το ίδιο και με τρίτη ευθεία.*

2. *Προσπάθησε να δείξεις, ότι το συμμετρικό σχήμα ως προς άξονα δ μιας ευθείας ε παράλληλης προς τη δ, είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ε.*

Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σχεδίασε σ' ένα διαφανές χαρτί μια ευθεία. Τοποθέτησε το διαφανές αυτό χαρτί πάνω σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα. Εξέτασε αν υπάρχει θέση τέτοια που τα δύο μέρη, στα οποία η ευθεία "χωρίζει" το σχήμα, συμπίπτουν, όταν το διπλώσεις κατά μήκος της ευθείας, ακριβώς στη θέση αυτή.

➢ *Προσπάθησε να βρεις αν υπάρχει και άλλη θέση στην οποία μπορείς να παρατηρήσεις το ίδιο φαινόμενο για το ίδιο σχήμα.*

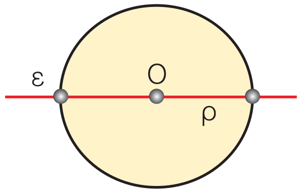
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Άξονας συμμετρίας** σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας** την ευθεία αυτή.

  ► **Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι άξονες συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου (Ο,ρ).



Λύση

Με δίπλωση διαπιστώνουμε ότι η ευθεία **ε** πάνω στην οποία βρίσκεται μια οποιαδήποτε διάμετρος του κύκλου **(Ο,ρ)** είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Επομένως:

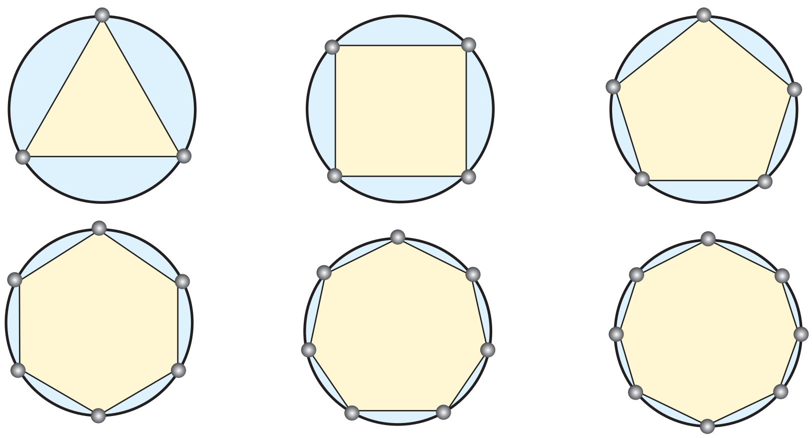
► **Οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση:*
Κάθε κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος έχουν:
- *Έναν άξονα συμμετρίας.*
- *Άπειρους άξονες συμμετρίας.*
- *Κανένα άξονα συμμετρίας.*

2. *Εξέτασε αν τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου* **Α, Γ, Ι** *και* **Θ** *έχουν: (α) κανένα, (β) ένα, (γ) περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας.*

3. *Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.*



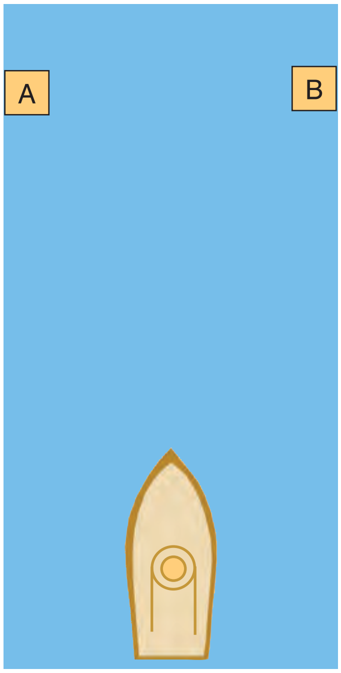
4. *Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους.*

5. *Βρες τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο κύκλους με διαφορετικές ακτίνες, όταν: (α) έχουν το ίδιο κέντρο και (β) έχουν διαφορετικά κέντρα.*

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καπετάνιος του πλοίου προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά από τις βάσεις Α και Β της γέφυρας, επειδή η στενότητα του περάσματος, ο αέρας και η γνωστή παλίρροια του Ευβοϊκού κόλπου επιδρούν στην πορεία των καραβιών και κάνουν τη διέλευση επικίνδυνη.
Μπορείς να υποδείξεις την πορεία που πρέπει να έχει ένα πλοίο για να περάσει με ασφάλεια το στενό του Ευρίπου;



- *Τι είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;*
- *Τι είναι τα σημεία Α και Β μεταξύ τους σε σχέση με την πορεία του πλοίου;*
- *Ποια σημαντική ιδιότητα πρέπει να έχουν τα σημεία της πορείας αυτής;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος** λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.
- Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.

Κατά τον Ευκλείδη *οι Κατασκευές, στηρίζονται σε* τρεις κανόνες (“αιτήματα”).
- Από δύο σημεία να διέρχεται μία μόνο ευθεία.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα.
- Ο κύκλος ορίζεται με ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα).

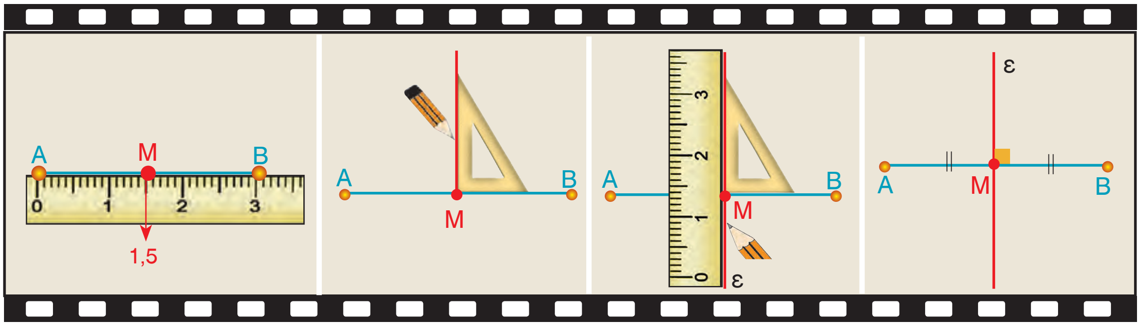
Με βάση τους παραπάνω κανόνες (“αιτήματα”) μπορούν να γίνουν οι κατασκευές όλων των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση “του κανόνα και του διαβήτη”. (“Κανόνας” είναι ένας χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις για να χαράζουμε ευθείες και όχι για να κάνουμε μετρήσεις μηκών). Οι κατασκευές αυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδεξιότητα και γνώση, δίνουν όμως ακριβέστερα αποτελέσματα και βοηθούν να αποφεύγονται λάθη, που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούμε στην πράξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα.*

Λύση

Προσδιορίζουμε το μέσον **Μ** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** με το υποδεκάμετρο και στη συνέχεια με τον γνώμονα σχεδιάζουμε την ευθεία **ε**, που διέρχεται από το **Μ** και είναι κάθετη στο **ΑΒ**.



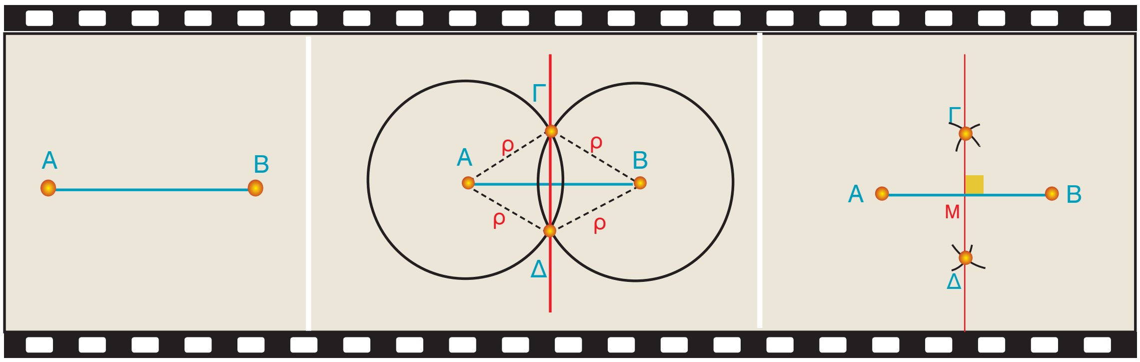
2. *Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα, αλλά μόνο με τη χρήση “του κανόνα και του διαβήτη”.*

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετος, όπως κάθε ευθεία, ορίζεται από δύο σημεία και ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Για να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** πρέπει να βρούμε δύο σημεία που να ισαπέχουν από τα **Α** και **Β**. Γράφουμε, λοιπόν, δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα άκρα **Α** και **Β** του ευθυγράμμου τμήματος και με ακτίνα **ρ** (μεγαλύτερη από το μισό μήκος του **ΑΒ**, για να τέμνονται).

Τα σημεία **Γ** και **Δ**, στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, διότι δύο σημεία της, τα **Γ** και **Δ**, απέχουν εξίσου από τα άκρα **Α** και **Β**, αφού είναι ΓΑ = ΓΒ = ρ και ΔΑ = ΔΒ = ρ.

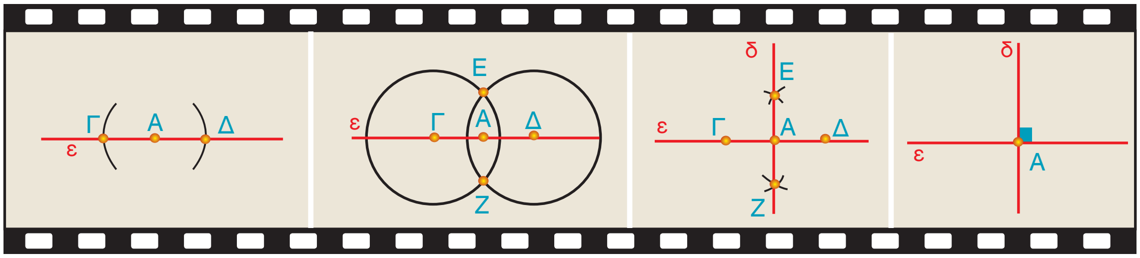


◆ Με την κατασκευή της **μεσοκαθέτου** του ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ**, βρήκαμε με ακρίβεια και το μέσο **Μ**, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

3. *Να κατασκευαστεί ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της Α.*

Λύση

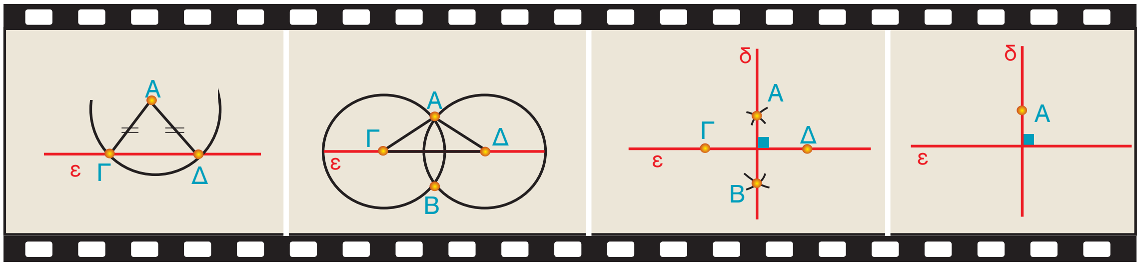
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και τυχαία ακτίνα, που τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** είναι μέσο του **ΓΔ,** αρκεί να φέρουμε τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το μέσο του **Α** και είναι κάθετη στην **ε**.



4. *Να κατασκευαστεί η κάθετη δ μιας ευθείας ε από σημείο Α εκτός αυτής.*

Λύση

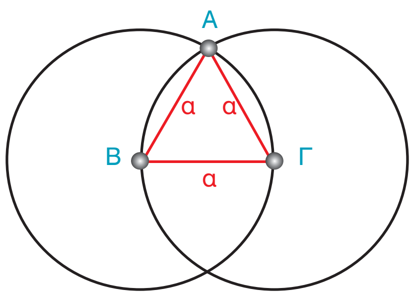
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το **Α** και ακτίνα τέτοια ώστε να τέμνει την **ε** σε δύο σημεία **Γ** και **Δ**. Επειδή το **Α** ισαπέχει από τα **Γ** και **Δ**, θα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος **ΓΔ**. Επομένως, αρκεί να φέρουμε, με τον τρόπο που μάθαμε στην εφαρμογή 2, τη μεσοκάθετο του **ΓΔ** που διέρχεται από το **Α**.



5. *Να κατασκευαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α.*

Λύση

Γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = α.
Με κέντρα τα άκρα **Β** και **Γ** και ακτίνα ίση με **α** γράφουμε δύο κύκλους. Έστω **Α** το ένα σημείο από τα δύο που τέμνονται οι κύκλοι αυτοί.
Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι το ζητούμενο ισόπλευρο, διότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες με **α**, ως ακτίνες ίσων κύκλων ακτίνας **α**.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη ....

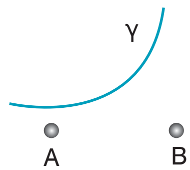
(β) Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, βρήκαμε με ακρίβεια και το .... του, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

(γ) Δύο σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς ευθεία ε, όταν η ε είναι .... του τμήματος ΜΜ'.

2. Να χαράξεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη να το χωρίσεις σε δύο ίσα τμήματα και στη συνέχεια σε τέσσερα ίσα τμήματα.

3. Σχεδίασε έναν κύκλο και μια ακτίνα του ΚΑ. Βρες δύο σημεία του κύκλου, που το καθένα να ισαπέχει από τα Κ και Α.

4. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη γραμμή γ παριστά τμήμα της διαδρομής του αστικού λεωφορείου. Οι κάτοικοι των οικισμών Α και Β αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια στάση, που να απέχει εξίσου από τους δύο οικισμούς. Βρες το κατάλληλο σημείο της διαδρομής και δικαιολόγησε τη λύση που θα δώσεις.



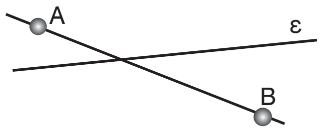
5. Να βρεις το σημείο της όχθης ενός ποταμού το οποίο ισαπέχει από δύο χωριά Α και Β.

6. Σχεδίασε ένα τρίγωνο και βρες με ακρίβεια τα μέσα των πλευρών του.

7. Σχεδίασε έναν κύκλο με κέντρο Κ και μια χορδή του ΑΒ. Να κατασκευάσεις τη μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ και να ονομάσεις Μ και Ν τα σημεία στα οποία τέμνει τον κύκλο. (α) Σύγκρινε τις χορδές ΜΑ και ΜΒ και δικαιολόγησε το αποτέλεσμα της σύγκρισης, (β) κάνε το ίδιο και για τις χορδές ΝΑ και ΝΒ, (γ) βρες εάν το κέντρο Κ του κύκλου είναι σημείο της μεσοκαθέτου και δικαιολόγησε την απάντησή σου.

8. Σχεδίασε τις μεσοκάθετες τριών χορδών ενός κύκλου και εξέτασε αν υπάρχει σημείο στο σχήμα σου, από το οποίο να διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετες.

9. Στο διπλανό σχήμα βρες εκείνο το σημείο της ε, που να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

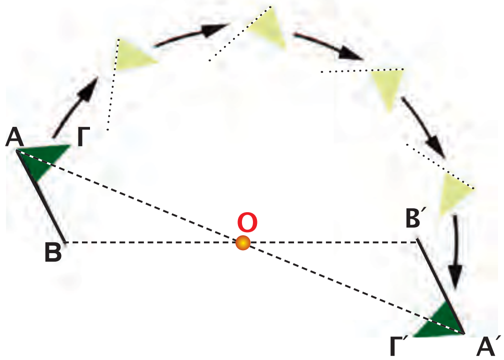
1. Σχεδίασε έναν κύκλο με ένα νόμισμα. Πώς μπορείς να βρεις το κέντρο του;

2. Τρεις οικογένειες κατασκήνωσαν σ' ένα κάμπινγκ και τοποθέτησαν τις σκηνές τους $Σ_1$, $Σ_2$ και $Σ_3$ έτσι ώστε: $Σ_1Σ_2 = 3{,}8$ m, $Σ_1Σ_3 = 2$ m και $Σ_2Σ_3 = 3{,}5$ m. Να σχεδιάσεις τη διάταξη των σκηνών σε σχέδιο με κλίμακα 1:100 και να βρεις το σημείο Ν, που πρέπει να τοποθετηθεί ένα ντους, ώστε και οι τρεις σκηνές να απέχουν εξίσου απ' αυτό. Υπάρχουν πολλές τέτοιες θέσεις; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν περιστραφεί το σχήμα ΑΒΓ, γύρω από το σημείο Ο κατά 180°, παίρνει μια νέα θέση την Α′Β′Γ′.



➢ *Τι συμπεραίνεις για τα σχήματα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′;*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι όταν ολοκληρωθεί η στροφή αυτή, κάθε σημείο του **ΑΒΓ** συμπίπτει με ένα σημείο του **Α′Β′Γ′**. Για παράδειγμα, θα συμπέσουν τα σημεία **Α** και **Α′**.

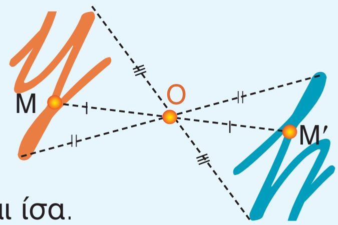
◆ Τα **σημεία** αυτά λέγονται **συμμετρικά**, ως προς κέντρο **Ο**. Δηλαδή:

● Συμμετρικό σημείου **Α** ως προς κέντρο **Ο**, είναι το σημείο **Α′**, με το οποίο συμπίπτει το **Α**, αν περιστραφεί περί το **Ο** κατά **180°**.

Ισχύει ότι:

▶ Δύο σημεία **Μ** και **Μ′** είναι **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**, όταν το **Ο** είναι **μέσο** του τμήματος **ΜΜ′**.

● Δύο σχήματα λέγονται **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το **Ο**.

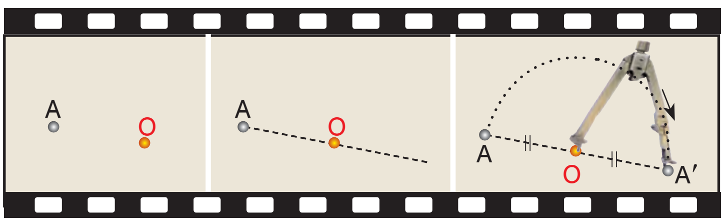


▶ **Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να βρεθεί το συμμετρικό Α′ του σημείου Α, ως προς σημείο Ο.*

Λύση



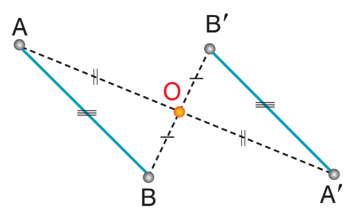
Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό **Α′** ενός σημείου **Α** ως προς σημείο **Ο**, φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΟ** και στην προέκτασή του (με το υποδεκάμετρο ή με τον διαβήτη) παίρνουμε ίσο τμήμα **ΟΑ′**, όπως δείχνουν οι παραπάνω εικόνες.

2. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′ ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο.*

Λύση

Το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος **ΑΒ** ως προς σημείο **Ο**, είναι ευθύγραμμο τμήμα **Α′Β′**. Για να το κατασκευάσουμε αρκεί να βρούμε τα σημεία **Α′** και **Β′**, που είναι τα συμμετρικά των **Α** και **Β** ως προς **Ο**.

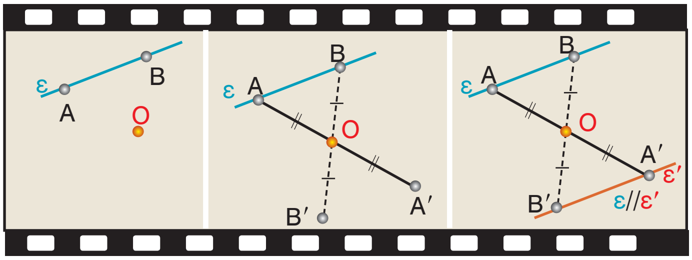
Παρατηρούμε ότι είναι: Α′Β′ = ΑΒ και Α′Β′ // ΑΒ.

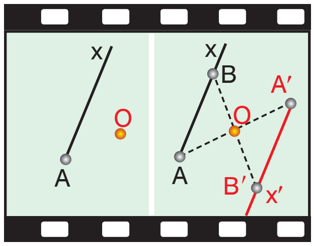


3. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό ως προς σημείο Ο: (α) μιας ευθείας ε και (β) μιας ημιευθείας Αx.*

Λύση

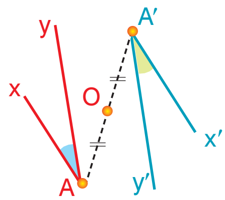
Παίρνουμε δύο σημεία **Α** και **Β** πάνω στην ευθεία **ε** ή την ημιευθεία **Αx** και βρίσκουμε, όπως παραπάνω, τα συμμετρικά ως προς το **Ο**. Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος **Α′Β′** είναι η **ε′** ή η **Α′x′**, που είναι συμμετρική της ευθείας **ε** ή της ημιευθείας **Αx** αντίστοιχα.

(α) 

(β) 

4. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα μιας γωνίας $x\hat{A}y$ ως προς σημείο Ο.*

Λύση

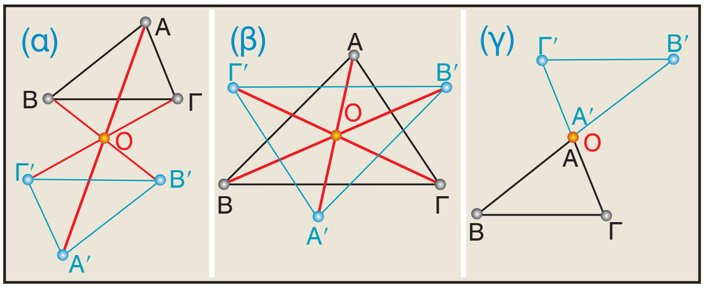


Βρίσκουμε το συμμετρικό **Α′** της κορυφής **Α** και τις συμμετρικές ημιευθείες **Α′x′** και **Α′y′** των δύο πλευρών της **Αx** και **Αy** αντίστοιχα ως προς το **Ο**, όπως μάθαμε προηγουμένως. Τότε, η γωνία $x'\hat{A}'y'$ είναι συμμετρική της $x\hat{A}y$ και είναι ίση μ' αυτή.

5. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό Α′Β′Γ′ ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο, το οποίο (α) είναι εκτός τριγώνου, (β) βρίσκεται εντός του τριγώνου και (γ) είναι μία κορυφή του.*

Λύση

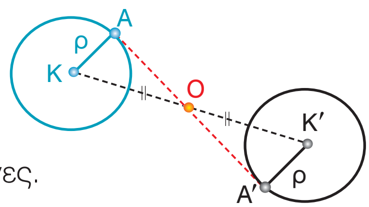
Και στις τρεις περιπτώσεις, βρίσκουμε τα συμμετρικά **Α′**, **Β′**, **Γ′**, ως προς το **Ο**, των κορυφών **Α**, **Β**, **Γ** του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει συμμετρικό το τρίγωνο **Α′Β′Γ′**, που είναι ίσο με το **ΑΒΓ**.



6. *Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα ενός κύκλου (Κ, ρ) ως προς σημείο Ο.*

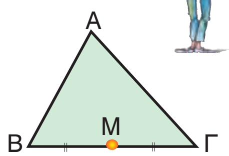
Λύση

Βρίσκουμε το συμμετρικό ως προς το **Ο** του κέντρου **Κ** και ενός σημείου του κύκλου **Α,** που είναι τα σημεία **Κ′** και **Α′** αντίστοιχα. Γράφουμε τον κύκλο (**Κ′**, **ρ=Κ′Α′**) που είναι ο ζητούμενος. Οι δύο κύκλοι είναι ίσοι διότι έχουν ίσες ακτίνες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να κατασκευάσεις τα συμμετρικά Β′, Μ′ και Γ′ των Β, Μ και Γ αντίστοιχα ως προς το Α και να δικαιολογήσεις ότι το Μ′ είναι μέσο του Β′Γ′. (Το Μ είναι το μέσο της ΒΓ).*



2. *Να σχεδιάσεις τρίγωνο ΑΒΔ και το συμμετρικό Γ της κορυφής του Α ως προς το μέσον Ο της πλευράς ΒΔ. Πώς μπορείς να χαρακτηρίσεις το τετράπλευρο ΑΒΓΔ;*

Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Βρες ένα σημείο, σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, γύρω από το οποίο προσπάθησε να περιστρέψεις το σχήμα αυτό κατά 180° και να παρατηρήσεις εάν συμπίπτει ή όχι με τον εαυτό του, μετά την ολοκλήρωση της περιστροφής αυτής.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του **Ο**, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά **180°,** συμπίπτει με το αρχικό.
Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας** το σημείο **Ο**.

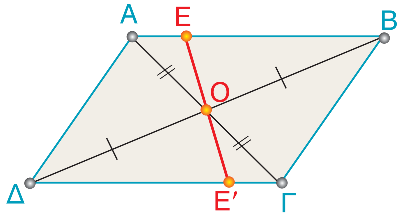
- Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Το συμμετρικό παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του, είναι το ίδιο το παραλληλόγραμμο.*

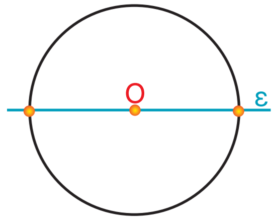
Λύση

Παρατηρούμε, ότι ένα σημείο **Ε** του παραλληλογράμμου, με στροφή κατά **180°** γύρω από το **Ο**, θα συμπέσει με ένα άλλο σημείο **Ε′** του ίδιου του παραλληλογράμμου. Αυτό συμβαίνει για όλα τα σημεία του **ΑΒΓΔ**, επομένως το συμμετρικό του ως προς το **Ο** είναι πάλι το ίδιο το παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ**.



2. *Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός κύκλου;*

Λύση

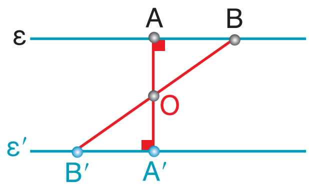


Με στροφή κατά **180°** γύρω από το κέντρο **Ο** του κύκλου, διαπιστώνουμε ότι αυτός συμπίπτει με τον εαυτό του. Επομένως:

► **Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του καθώς και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.**

3. *Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό σχήμα μιας ευθείας ε, ως προς κέντρο Ο, είναι ευθεία ε′//ε.*

Λύση



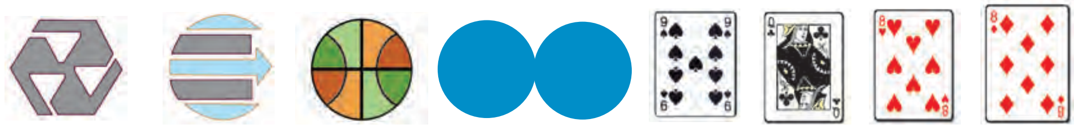
Φέρνουμε την απόσταση **ΟΑ** του **Ο** από την **ε**. Έστω **Β** ένα άλλο σημείο της **ε**. Βρίσκουμε τα συμμετρικά **Α′** και **Β′** των σημείων **Α** και **Β** ως προς το **Ο** και ονομάζουμε **ε′** την ευθεία που διέρχεται από τα **Α′**και **Β′**. Η ευθεία **ε′** είναι συμμετρική της **ε** ως προς κέντρο συμμετρίας το **Ο**.
Η γωνία $O\hat{A}'B'$ θα είναι συμμετρική της γωνίας $O\hat{A}B$.
Επειδή οι συμμετρικές γωνίες είναι ίσες, θα είναι: $O\hat{A}'B' = O\hat{A}B = 90°$. Άρα, οι ευθείες **ε** και **ε′** είναι κάθετες στην ίδια ευθεία **ΑΑ′**, συνεπώς μεταξύ τους παράλληλες.

► **Οι συμμετρικές ως προς σημείο ευθείες, είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Αφού γράψεις τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου, εξέτασε αν έχουν κέντρο συμμετρίας.*

2. *Να βρεις στα παρακάτω σχήματα το κέντρο συμμετρίας, αν υπάρχει.*



3. *Τοποθέτησε ένα "Χ" στις κατάλληλες θέσεις, για τη θετική σου απάντηση.*

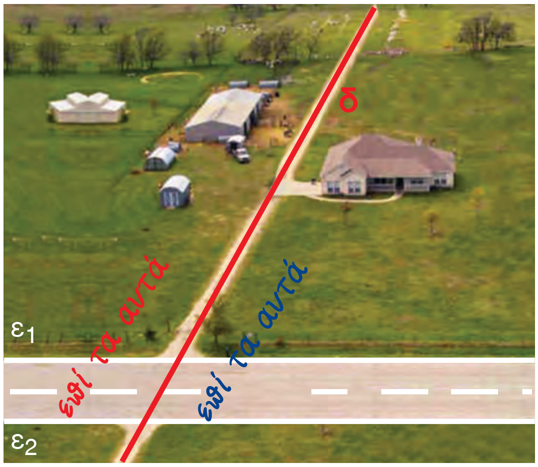
	Άξονες συμμετρίας						Έχει Κέντρο Συμμετρίας
	Κανένα	Ένα	Δύο	Τρεις	Τέσσερις	Περισσότερους	
Ευθύγραμμο τμήμα							
Ισοσκελές τρίγωνο							
Ισόπλευρο τρίγωνο							
Παραλληλόγραμμο							
Ορθογώνιο							
Ρόμβος							
Τετράγωνο							
Κύκλος							

Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στη διπλανή εικόνα βλέπουμε έναν δημόσιο δρόμο να διασχίζει δύο αγροκτήματα.

Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 ορίζουν τα όρια του δρόμου αυτού και χωρίζουν τη γη σε τρεις ζώνες.

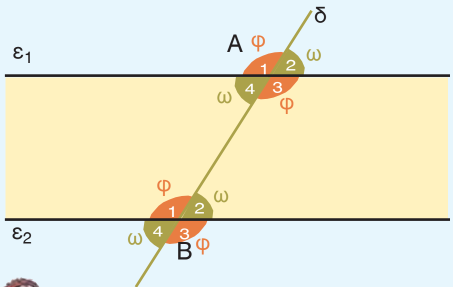


Δώσε μια συγκεκριμένη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται στην άσφαλτο του δρόμου, δηλαδή στη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες ε_1 και ε_2, καθώς και μία άλλη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω απ' αυτή, δηλαδή στα χωράφια.

Στην ίδια εικόνα υπάρχει ένας χωματόδρομος που χωρίζει τα δύο αγροκτήματα και ορίζει μια ευθεία δ που είναι το σύνορο μεταξύ τους.

- *Πώς μπορείς να δώσεις μια κοινή ονομασία σε όλα τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο και μόνο αγρόκτημα;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες **ε_1** και **ε_2** ονομάζονται "**εντός**" (των ευθειών) και όλες οι άλλες "**εκτός**".

  $\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ είναι "εντός" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$ είναι "εκτός"

- Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας **δ** ονομάζονται "**επί τα αυτά**" (μέρη της ευθείας).

  $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ είναι "επί τα αυτά" και

  $\hat{A}_1, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_4$ είναι "επί τα αυτά"

- Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας **δ**, λέγονται μεταξύ τους "**εναλλάξ**".

  π.χ. η $\hat{A}_4$ με την $\hat{B}_2$ είναι "εναλλάξ" αλλά και η $\hat{A}_2$ με την $\hat{B}_1$ είναι "εναλλάξ" κ.ο.κ.

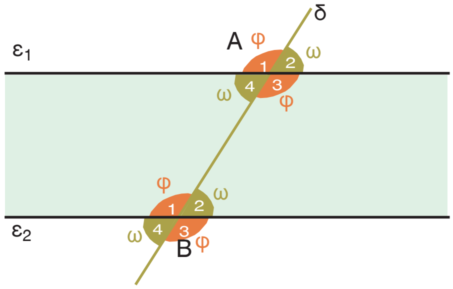
◆ Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε τις παρακάτω έξι ονομασίες για τα 16 διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

(α) εντός εναλλάξ	και	(β) εκτός εναλλάξ
(γ) εντός και επί τα αυτά	και	(δ) εκτός και επί τα αυτά
(ε) εντός - εκτός εναλλάξ	και	(στ) εντός - εκτός επί τα αυτά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συγκριθούν μεταξύ τους οι γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία Α και Β, στα οποία τέμνει μια ευθεία δ δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.*

Λύση



Μπορούμε να διαπιστώσουμε (μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο) ότι οι γωνίες που σχηματίζονται και στα δύο σημεία τομής Α και Β, είναι δύο ειδών:

- Οι οξείες γωνίες $\widehat{\omega}$, που είναι μεταξύ τους ίσες και
- Οι αμβλείες γωνίες $\widehat{\varphi}$, που είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **οξείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις "εντός εναλλάξ": $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_2$
- Από τις "εκτός εναλλάξ": $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_4$
- Από τις "εντός - εκτός επί τα αυτά": $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ και $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_4$

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες **αμβλείες και ίσες** μεταξύ τους είναι:

- Από τις "εντός εναλλάξ": $\widehat{A}_3 = \widehat{B}_1$
- Από τις "εκτός εναλλάξ": $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_3$
- Από τις "εντός - εκτός επί τα αυτά": $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και $\widehat{A}_3 = \widehat{B}_3$

Επειδή όμως οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{A}_2$ είναι **παραπληρωματικές**, θα ισχύει γενικά:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 180^\circ.$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα ζευγάρια των γωνιών είναι ζευγάρια **παραπληρωματικών** γωνιών, τα οποία και είναι τα εξής:

- Οι "εντός επί τα αυτά": $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ και $\widehat{A}_4 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$
- Οι "εκτός επί τα αυτά": $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_4 = 180^\circ$ και $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_3 = 180^\circ$
- Οι "εντός-εκτός εναλλάξ": $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ και $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$
  και $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_4 = 180^\circ$ και $\widehat{A}_4 + \widehat{B}_3 = 180^\circ$

2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι $\hat{\alpha} = 40^\circ$.*

Λύση

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 40^\circ$

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$, από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 140^\circ$.

Αλλά επειδή $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και η ε_3 τέμνουσα των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι:

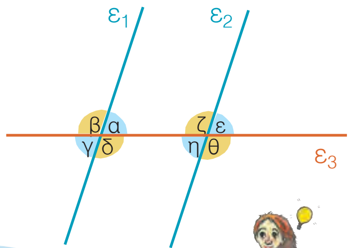
$\hat{\varepsilon} = \hat{\alpha}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{\varepsilon} = 40^\circ$

$\hat{\zeta} + \hat{\alpha} = 180^\circ$, ως εντός επί τα αυτά,

άρα: $\hat{\zeta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\hat{\eta} = \hat{\alpha}$, ως εντός εναλλάξ, επομένως: $\hat{\eta} = 40^\circ$ και

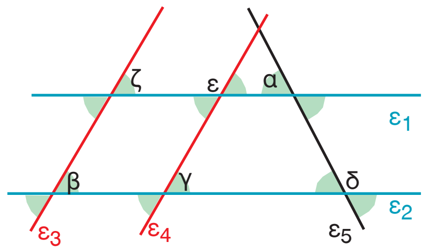
$\hat{\theta} = \hat{\delta}$, ως εντός - εκτός επί τα αυτά, άρα: $\hat{\theta} = 140^\circ$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

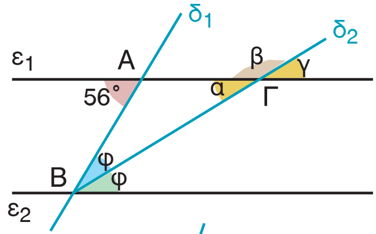
1. *Σχεδίασε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2, οι οποίες να απέχουν 4 cm. Φέρε μία ευθεία που να σχηματίζει με την ε_1 γωνία 72° και υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.*

2. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογίσεις τις σημειωμένες γωνίες του σχήματος, αν είναι $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 70^\circ$.*

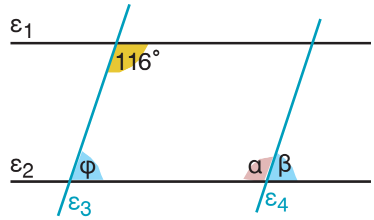


3. *Να σχηματίσεις μια γωνία $x\hat{A}y = 63^\circ$. Να πάρεις ένα σημείο Β της πλευράς Αx, ώστε να είναι ΑΒ=5 cm και ένα σημείο Δ της Αy, ώστε να είναι ΑΔ=2,9 cm. Να φέρεις από το Β την παράλληλη προς την Αy και από το Δ την παράλληλη προς την Αx. Να ονομάσεις Γ το σημείο τομής των παράλληλων αυτών. Να υπολογίσεις τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.*

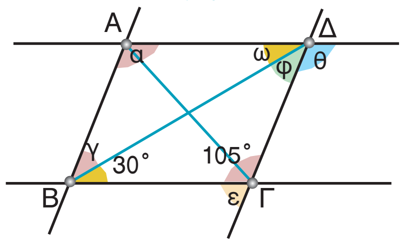
4. *Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και η ημιευθεία $B\delta_2$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ του σχήματος.*



5. *Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.*



6. *Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι: ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ. Να υπολογίσεις όλες τις σημειωμένες γωνίες.*



ΜΕΡΟΣ Β΄

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

- *Γνωρίζω τα στοιχεία του τριγώνου*
- *Γνωρίζω τα είδη των τριγώνων*

3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

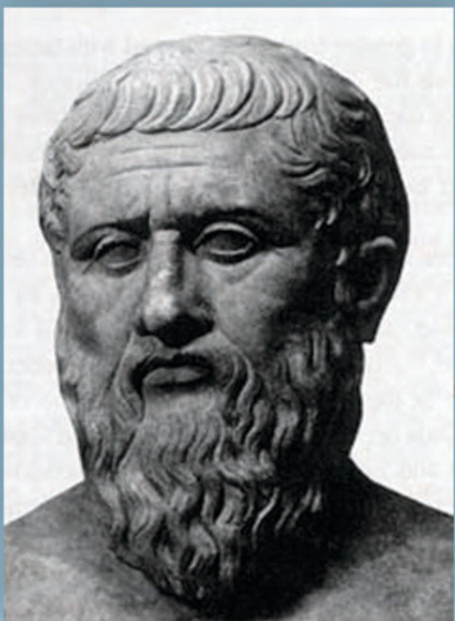
- *Γνωρίζω ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και του ισοπλεύρου τριγώνου*

3.3. Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπέζιο Ισοσκελές τραπέζιο

- *Γνωρίζω ποιο τετράπλευρο ονομάζεται παραλληλόγραμμο, ποιο ορθογώνιο, ποιο ρόμβος, ποιο τετράγωνο και ποιο τραπέζιο*
- *Χαράσσω τα ύψη του παραλληλογράμμου και του τραπεζίου*

3.4. Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραπεζίου

- *Γνωρίζω τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του ισοσκελούς τραπεζίου*



ΠΛΑΤΩΝ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ
(427 - 347 π.Χ.)

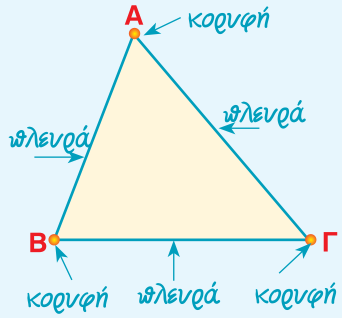
Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Κύρια στοιχεία τριγώνου

- Κάθε τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει τρεις **κορυφές Α, Β, Γ**, τρεις **πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ** και τρεις **γωνίες** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.

- Τα **ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ**, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.



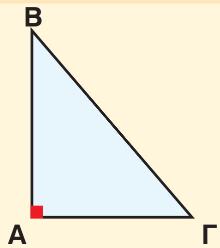
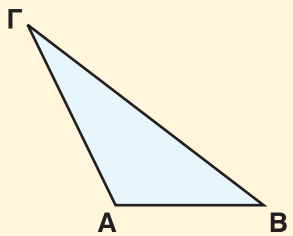
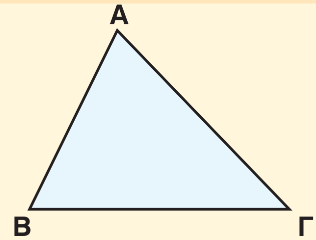
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Παρακάτω βλέπουμε την κατάταξη των τριγώνων με βάση δύο συγκεκριμένα κριτήρια.

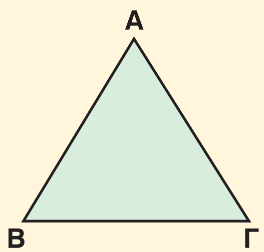
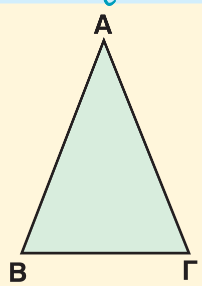
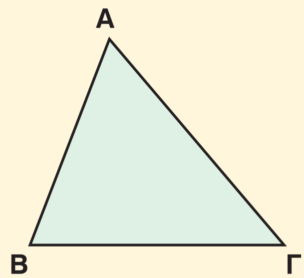
➢ *Μπορείς να εκφράσεις με λόγια τα κριτήρια με τα οποία έγινε αυτή η κατάταξη;*

Σκεφτόμαστε

Με βάση **το 1ο κριτήριο** διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Πλευρές κάθετες	Όχι κάθετες πλευρές	
Μία γωνία ορθή	Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής	Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής
		
Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο	Οξυγώνιο

Με βάση **το 2ο κριτήριο** διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

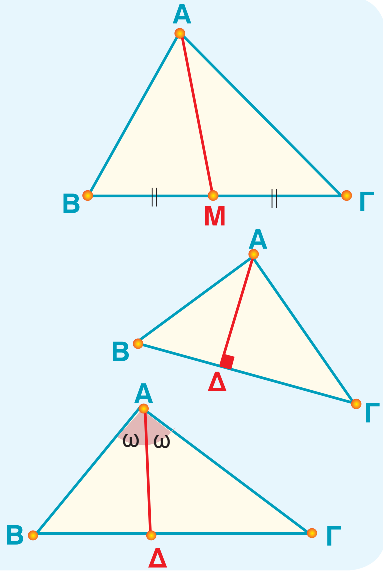
Ισότητα πλευρών		Ανισότητα πλευρών
Τρεις πλευρές ίσες	Δύο πλευρές ίσες	Όλες οι πλευρές άνισες
		
Ισόπλευρο	Ισοσκελές	Σκαληνό

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται **διάμεσος**.

- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται **ύψος** του τριγώνου.

- Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται **διχοτόμος** του τριγώνου.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να σχεδιαστούν τα ύψη σε τρίγωνο που είναι: (α) οξυγώνιο, (β) αμβλυγώνιο και (γ) ορθογώνιο.

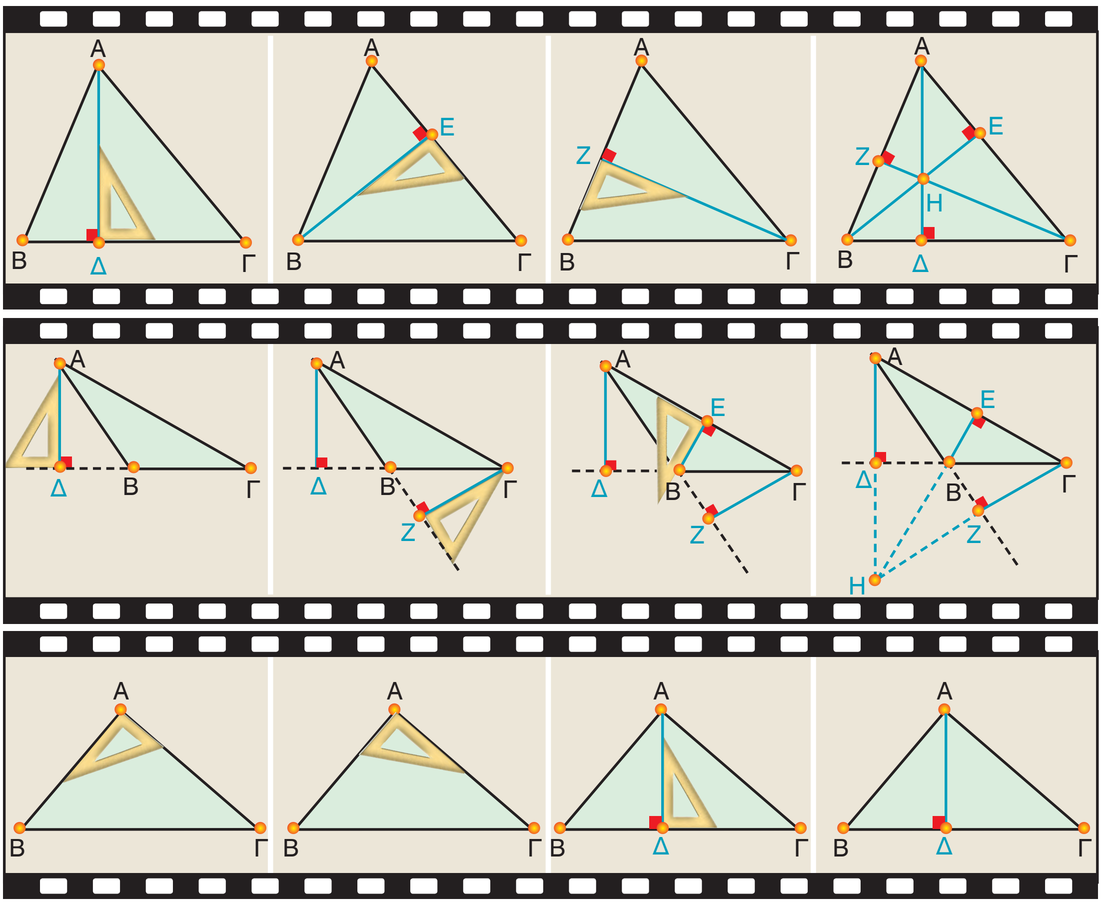
Λύση

Από την κορυφή π.χ. την Α του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε την κάθετο στην απέναντι πλευρά του. Τότε η απόσταση του Α από την πλευρά ΒΓ είναι το ύψος ΑΔ του τριγώνου. Αυτήν τη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε και από τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου για να βρούμε και τα τρία ύψη του, τα οποία παρατηρούμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο Η, που λέγεται ορθόκεντρο.

(α)

(β)

(γ)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια ορθή γωνία.		
(β)	Το αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει δύο αμβλείες γωνίες.		
(γ)	Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.		
(δ)	Το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.		
(ε)	Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισόπλευρο.		
(στ)	Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισοσκελές.		
(ζ)	Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.		
(η)	Ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο.		

2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρά ΒΓ = 4,4 cm, φέρε τη διάμεσο ΑΜ. Μετά φέρε τις διαμέσους ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΓΜ και βρες το μήκος των ΚΜ και ΛΓ.

3. Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Βρες το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ, το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ και το μέσο Ζ της πλευράς ΓΑ. (β) Σχεδίασε τη διάμεσο ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει τη ΖΔ στο σημείο Μ. Σύγκρινε με τον διαβήτη τα τμήματα ΔΜ και ΜΖ. Τι παρατηρείς;

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Φέρε τις διαμέσους ΑΜ και ΒΝ και ονόμασε με το γράμμα Θ το σημείο στο οποίο τέμνονται. (β) Μετά σχεδίασε την ευθεία ΓΘ και ονόμασε με το γράμμα Ρ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΓΘ τέμνει την πλευρά ΑΒ. (γ) Σύγκρινε με τον διαβήτη τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΡ και ΒΡ. Τι παρατηρείς;

5. Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, πάρε το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και χάραξε από το σημείο Μ μια ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ του τριγώνου. Αν το σημείο στο οποίο τέμνει την πλευρά ΑΓ το ονομάσεις Ν, να συγκρίνεις με τον διαβήτη τα τμήματα ΑΝ και ΝΓ. Τι παρατηρείς;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

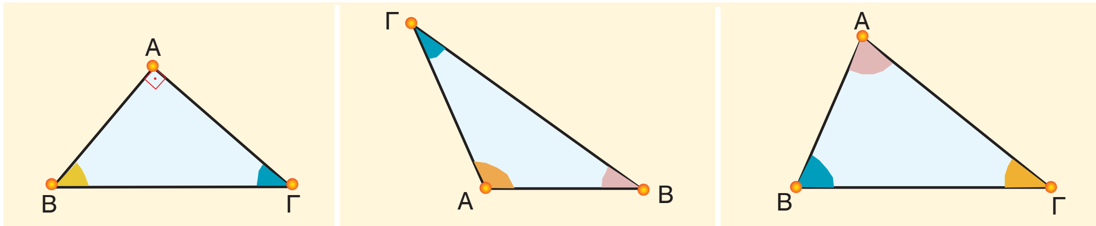
Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των αντίστοιχων τριγώνων.

ΤΡΙΓΩΝΑ	Οξυγώνιο	Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο
Σκαληνό			
Ισοσκελές			
Ισόπλευρο			

Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σχεδίασε διάφορα τυχαία ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα, όπως π.χ. αυτά που φαίνονται πιο κάτω. Μέτρησε τις γωνίες τους με το μοιρογνωμόνιο και υπολόγισε το άθροισμά τους. Μπορείς να διατυπώσεις κάποιο συμπέρασμα;



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

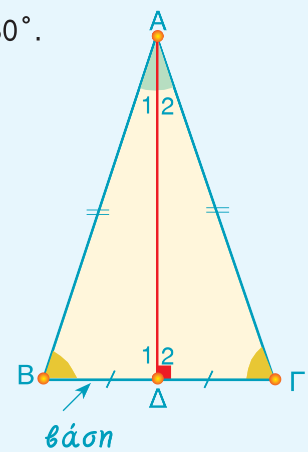
Προσπάθησε να διαπιστώσεις ποια διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι άξονας συμμετρίας του και γιατί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Δικαιολόγησε γιατί οι διάμεσοι του ισόπλευρου είναι διχοτόμοι και ύψη του.

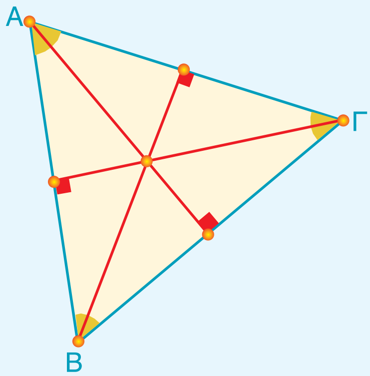
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.



Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

- Η ευθεία της **διαμέσου**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **άξονας συμμετρίας** του **ισοσκελούς** τριγώνου.
- Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **ύψος** και **διχοτόμος**.
- Οι **προσκείμενες γωνίες** στη βάση του ισοσκελούς είναι **ίσες**.



Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

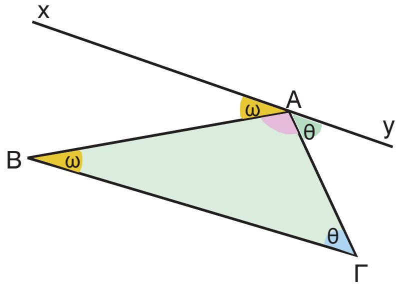
- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.*

Λύση

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο **ΑΒΓ** και μία ευθεία **xAy**, που διέρχεται από το **Α** και είναι παράλληλη προς την ευθεία **ΒΓ**.



Παρατηρούμε ότι:

$\widehat{xAB} = \hat{\omega} = \hat{B}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ, των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΒ**.

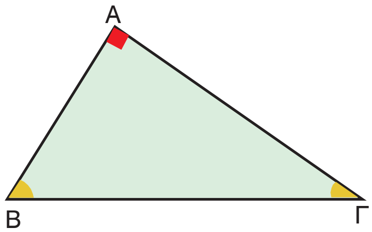
$\widehat{yA\Gamma} = \hat{\theta} = \hat{\Gamma}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΓ**.

Οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{A}$ και $\hat{\theta}$ σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.
Επομένως θα είναι: $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180°$.
Επειδή όμως είναι: $\hat{\omega} = \hat{B}$ και $\hat{\theta} = \hat{\Gamma}$, θα έχουμε: $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180°$.

2. *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.*

Λύση

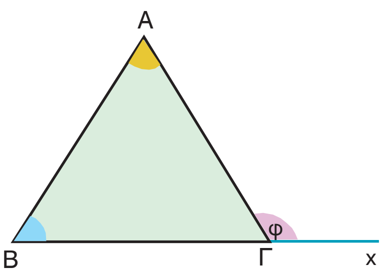
Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{A} = 90°$.
Επειδή είναι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ θα έχουμε:
$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° - 90° = 90°$.
Γνωρίζουμε, ότι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° λέγονται **συμπληρωματικές**. Άρα, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.



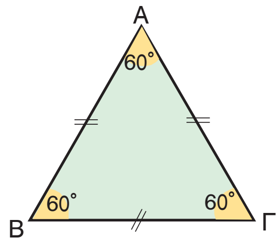
3. *Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A\Gamma x}$, που σχηματίζεται από την ΑΓ και την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ, ονομάζεται εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$).*

Λύση

Η εξωτερική γωνία $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματική της εσωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου, δηλαδή θα είναι $\hat{\varphi} = 180° - \hat{\Gamma}$.
Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$,
άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\varphi}$.
Άρα, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου.



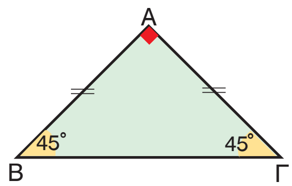
4. *Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με 60°.*



Λύση

Γνωρίζουμε ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$. Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, θα είναι $\hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180°$, δηλαδή $3 \cdot \hat{A} = 180°$, συνεπώς: $\hat{A} = 180° : 3 = 60°$. Άρα, όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με 60°.

5. *Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.*



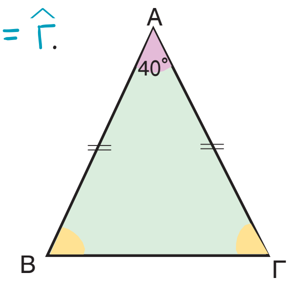
Λύση

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$. Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή, δηλαδή $\hat{A} = 90°$, θα είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$.

Επειδή το τρίγωνο είναι και ισοσκελές θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα θα είναι $\hat{B} + \hat{B} = 90°$, από την οποία προκύπτει ότι: $2 \cdot \hat{B} = 90°$, δηλαδή θα έχουμε $\hat{B} = 90° : 2 = 45°$ και επομένως και $\hat{\Gamma} = 45°$.

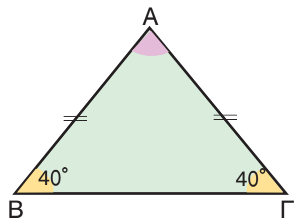
6. *Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν είναι γνωστό μόνο ότι το μέτρο μιας γωνίας του είναι 40°.*

Λύση



Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Τότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Επειδή είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(α) Αν είναι $\hat{A} = 40°$.
Συνεπώς θα είναι $40° + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, επομένως $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° - 40°$. Επομένως θα είναι $\hat{B} + \hat{B} = 140°$, από την οποία προκύπτει ότι: $2 \cdot \hat{B} = 140°$, δηλαδή $\hat{B} = 140° : 2 = 70°$ άρα και $\hat{\Gamma} = 70°$.



(β) Αν είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40°$.
Θα είναι $\hat{A} + 40° + 40° = 180°$, δηλαδή $\hat{A} + 80° = 180°$, συνεπώς θα έχουμε: $\hat{A} = 180° - 80° = 100°$.
Παρατηρούμε ότι με τα ίδια ακριβώς δεδομένα προκύπτουν δύο τελείως διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία όμως ικανοποιούν αυτά τα δεδομένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

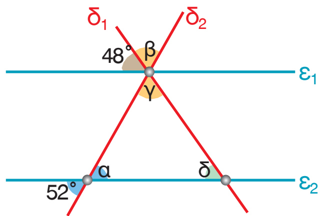
1. Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.		
(β) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$.		
(γ) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες ίσες με $30°$.		
(δ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία μιας διαμέσου είναι άξονας συμμετρίας.		
(ε) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και διχοτόμος.		
(στ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας.		
(ζ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των υψών είναι άξονες συμμετρίας.		
(η) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι και ύψος.		
(θ) Σε κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι $60°$.		

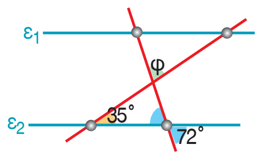
2. Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να είναι $\hat{B} = 75°$ και $\hat{\Gamma} = 35°$ και υπολόγισε τη γωνία $\hat{A}$.

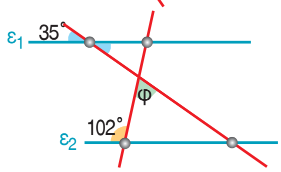
3. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο να είναι $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 60°$ και $AB = 4{,}2$ cm. (α) Υπολόγισε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (β) Μέτρησε την πλευρά ΒΓ και σύγκρινε το μήκος της με το μήκος της πλευράς ΑΒ.

4. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.

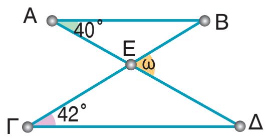


5. Στα διπλανά σχήματα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\varphi}$.





6. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ//ΓΔ. Υπολόγισε τη γωνία $\hat{\omega}$.



7. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι $74°$.
Να υπολογίσεις τις υπόλοιπες γωνίες.

8. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 36°$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια από τη $\hat{\Gamma}$.
Υπολόγισε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

9. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια από τη $\hat{B}$ και η $\hat{\Gamma}$ τριπλάσια από τη $\hat{B}$. Να υπολογίσεις τις γωνίες του τριγώνου.

10. Να σχεδιάσεις ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, να πάρεις ένα σημείο Ο στο εσωτερικό του και να φέρεις τις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ. Να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$ και στη συνέχεια το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓΔ.

Β.3.3. Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπέζιο - Ισοσκελές τραπέζιο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η υπηρεσία οδικής ασφάλειας αποφάσισε να βάψει το οδόστρωμα σε όλες τις διασταυρώσεις με έντονο κίτρινο χρώμα. Για να κάνει τους υπολογισμούς της, πρέπει να βρεθεί το ακριβές σχήμα του οδοστρώματος στο κοινό μέρος δύο δρόμων, σε κάθε διασταύρωση.

➢ *Με την προϋπόθεση ότι οι δρόμοι που διασταυρώνονται είναι ευθείες, προσπάθησε να βρεις όλες τις περιπτώσεις των τετραπλεύρων που σχηματίζουν οι δρόμοι:*

(α) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται καθέτως.

(β) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται καθέτως.

(γ) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται πλαγίως.

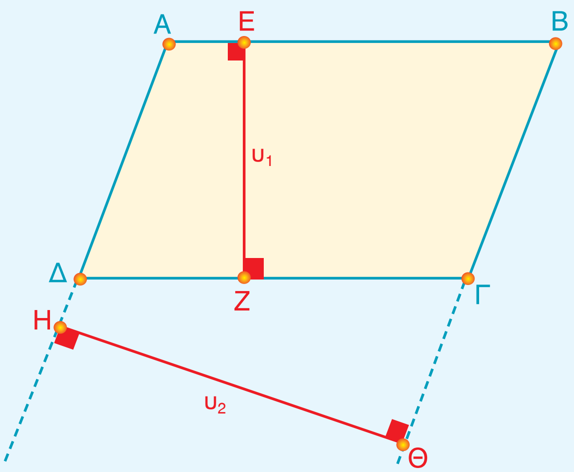
(δ) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται πλαγίως.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.

- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.

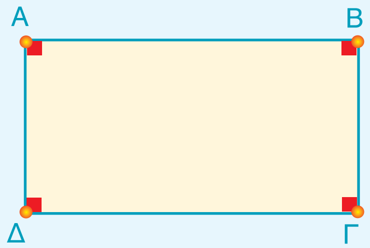
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



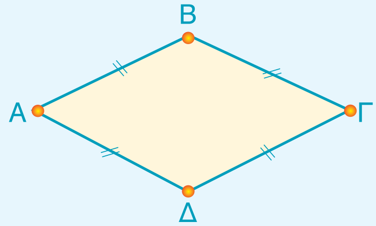
Για τις βάσεις **ΑΒ** και **ΓΔ** ύψος είναι το **ΕΖ**, ενώ για τις βάσεις **ΑΔ** και **ΒΓ** ύψος είναι το **ΗΘ**.

Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

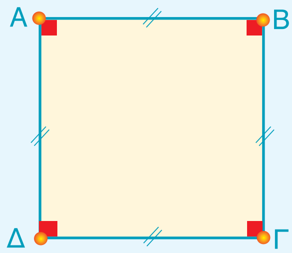
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο**.



- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **ρόμβος**.



- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο**.

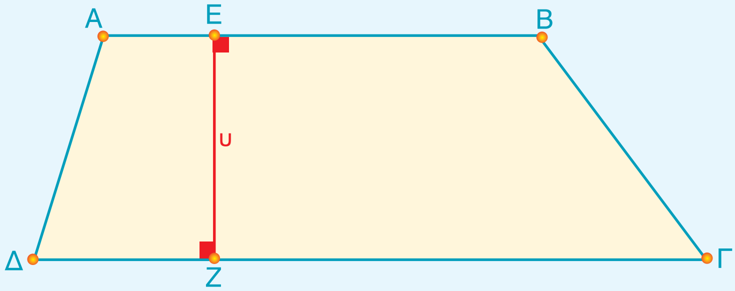


Τραπέζιο

- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο**.

- Οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

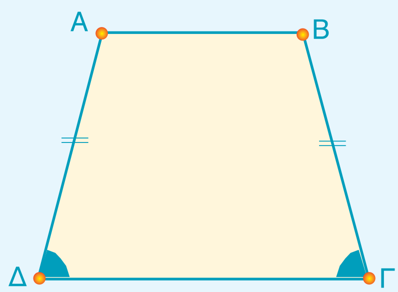
- Η απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.



Η απόσταση των βάσεων ΑΒ και ΓΔ είναι το ύψος ΕΖ.

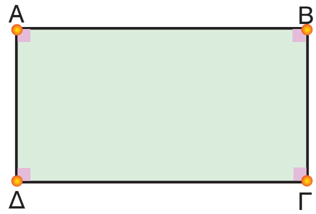
- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**.

Είναι ΑΔ = ΒΓ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

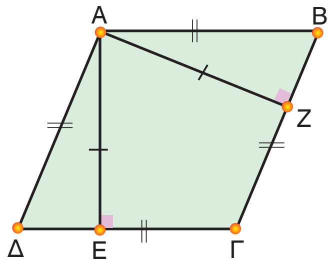
1. *Να εξηγήσετε γιατί οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.*



Λύση

Επειδή όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές, οι διαδοχικές πλευρές του θα είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.

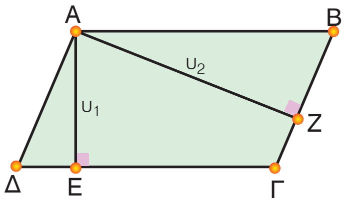
2. *Να συγκριθούν τα ύψη του ρόμβου που άγονται από μία κορυφή.*



Λύση

Συγκρίνουμε με τον διαβήτη ή με διαφανές χαρτί τα ύψη **ΑΕ** και **ΑΖ** του ρόμβου και διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα, δηλαδή: **ΑΕ = ΑΖ**.

3. *Να σχεδιαστούν τα ύψη του παραλληλογράμμου που άγονται από μία κορυφή.*



Λύση

Τα ύψη του παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** που φέρνουμε από την κορυφή **Α** στις πλευρές **ΔΓ** και **ΒΓ** είναι τα **ΑΕ** και **ΑΖ** αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.*

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.		
(β) Ένας ρόμβος είναι τετράγωνο.		
(γ) Κάθε διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.		
(δ) Κάθε διαγώνιος ρόμβου τον χωρίζει σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα.		
(ε) Κάθε διαγώνιος ισοσκελούς τραπεζίου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.		

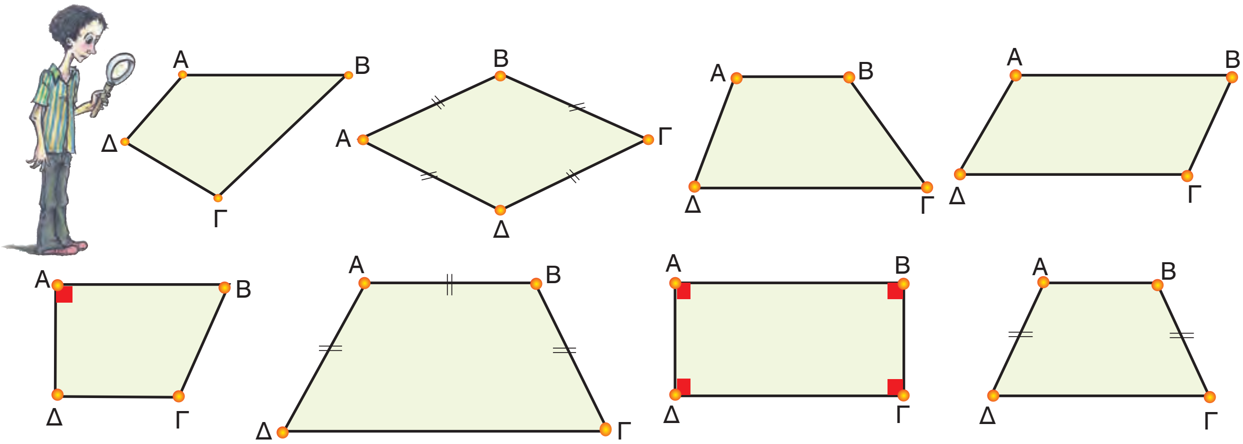
2. *Πόσα ισοσκελή τρίγωνα σχηματίζονται σ' ένα ισοσκελές τραπέζιο, που έχει τρεις πλευρές ίσες, όταν φέρουμε τις δύο διαγώνιές του; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

3. *Με τέσσερα σπίρτα (ολόκληρα και ίσα) ποια τετράπλευρα μπορείς να κατασκευάσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

4. *Με δύο ολόκληρα και δύο μισά σπίρτα μπορείς να κατασκευάσεις παραλληλόγραμμα και ποια; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- *Προσπάθησε να χωρίσεις τα πιο κάτω τετράπλευρα σε ομάδες.*
- *Δώσε από ένα όνομα στο καθένα.*
- *Προσπάθησε να δικαιολογήσεις τον χωρισμό σε ομάδες που έκανες.*

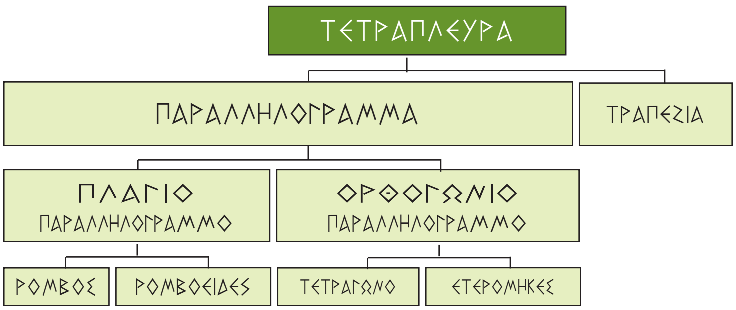


ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο **Ευκλείδης** *στα "Στοιχεία" του προτείνει μια ταξινόμηση (Διάγραμμα 1), που δεν χρησιμοποιεί ως κριτήριο την παραλληλία, την οποία εισάγει αργότερα. Τραπέζιο ονομάζει, όχι εκείνο που λέμε εμείς σήμερα, δηλαδή το τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Τον όρο τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, τον συναντάμε αργότερα στον* **Αρχιμήδη**. *Επίσης το τετράπλευρο που ονομάζει ρομβοειδές εκφράζει το σημερινό παραλληλόγραμμο.*

Διάγραμμα 1.
Η Ευκλείδεια ταξινόμηση

Μια προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται τον 16ο αιώνα στη "Γεωμετρία" (1569) του **Petrus Ramus** *ή* **Pierre de la Ramée**.

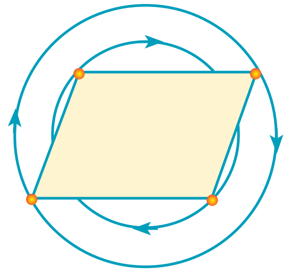


Διάγραμμα 2.
Η ταξινόμηση του Ramus

Β.3.4. Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραπεζίου

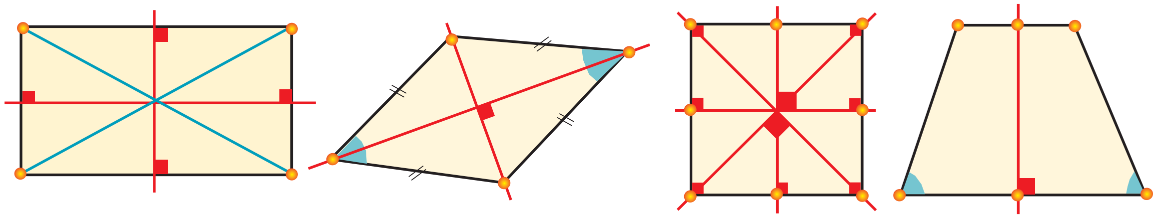
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Προσπάθησε να διαπιστώσεις εάν το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

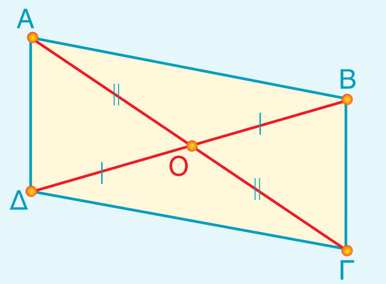
Προσπάθησε να βρεις τους άξονες συμμετρίας:
(α) του ορθογωνίου, (β) του ρόμβου, (γ) του τετραγώνου και (δ) του ισοσκελούς τραπεζίου.



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

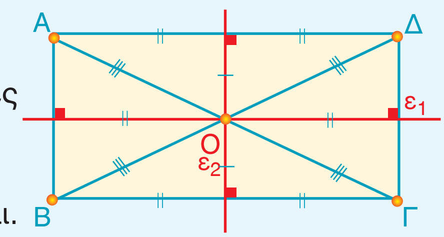
Ιδιότητες του ορθογώνιου και πλάγιου παραλληλογράμμου

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- **Οι διαγώνιές του διχοτομούνται** (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- Οι **απέναντι πλευρές** είναι **ίσες**.
- Οι **απέναντι γωνίες** είναι **ίσες**.



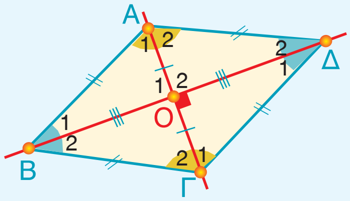
Στο ορθογώνιο:

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται.



Ιδιότητες του ρόμβου

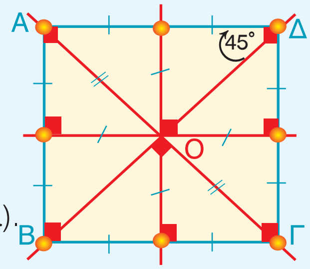
Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:



- Οι **ευθείες των διαγωνίων** είναι **άξονες συμμετρίας**.
- Οι **διαγώνιες** είναι **κάθετες** (και **διχοτομούνται**).
- Οι **διαγώνιές** του είναι και **διχοτόμοι των γωνιών του**.

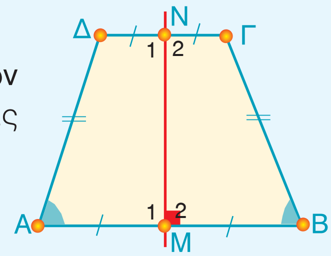
Ιδιότητες του τετραγώνου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:



- Οι **ευθείες των διαγωνίων** του και οι **μεσοκάθετοι των πλευρών** του είναι **άξονες συμμετρίας**.
- Οι **διαγώνιές** του είναι **ίσες, κάθετες** (και **διχοτομούνται**).
- Οι **διαγώνιές** του είναι και **διχοτόμοι των γωνιών** του.

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου

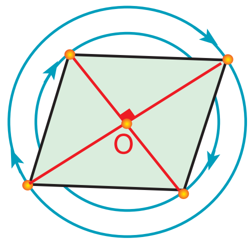


- Η **ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων** είναι **άξονας συμμετρίας** και **μεσοκάθετος** στις βάσεις του.
- Οι **προσκείμενες** σε κάθε βάση **γωνίες** του είναι **ίσες**.

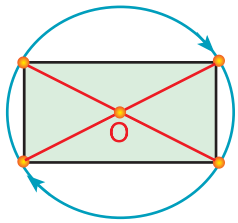
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το κέντρο συμμετρίας: (α) του ρόμβου, (β) του ορθογωνίου και (γ) του τετραγώνου.

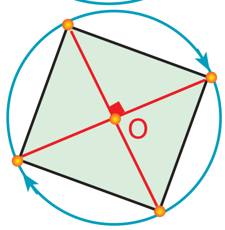
Λύση



(α) Επειδή ο **ρόμβος** είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο **Ο** τομής των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



(β) Επειδή το **ορθογώνιο** είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο τομής **Ο** των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



(γ) Επειδή το **τετράγωνο** είναι και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το σημείο τομής **Ο** των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο, έναν ρόμβο και ένα τετράγωνο με τις διαγώνιές τους και εξέτασε εάν τα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το καθένα από τις διαγώνιες είναι ίσα.

2. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και με διάμετρο τη διαγώνιό του ΑΓ γράψε έναν κύκλο. Δικαιολόγησε το γεγονός ότι ο κύκλος αυτός περνάει από όλες τις κορυφές του ορθογωνίου.

3. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρε τη διαγώνιο ΒΔ και μετά σύγκρινε τις αποστάσεις των κορυφών Α και Γ απ' αυτή.

4. Σχεδίασε ένα παραλληλόγραμμο και από τις κορυφές του φέρε παράλληλες ευθείες προς τις διαγωνίους του. Τι παρατηρείς;

5. Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός πλαγίου παραλληλογράμμου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές, εάν προεκταθούν;

6. Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές εάν προεκταθούν; Επίσης, τις διχοτόμους των γωνιών (α) ενός τετραγώνου και (β) ενός ρόμβου. Τι παρατηρείς;

7. Σχεδίασε τα ύψη των τριγώνων ΑΒΔ και ΔΒΓ, τα οποία σχηματίζονται, όταν φέρεις τη διαγώνιο ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Μέτρησε τα ύψη των δύο αυτών τριγώνων με το υποδεκάμετρο. Τι παρατηρείς; (Δικαιολόγησε την απάντησή σου).

8. Πάνω σε δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy, πάρε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε ΟΑ = ΟΒ. Από το Α φέρε $Ay'//Oy$ και από το Β την $Bx'//Ox$. Ονόμασε Κ το σημείο τομής των Ay' και Bx'. Φέρε τις διαγώνιες του ΑΟΒΚ και διαπίστωσε τη σχετική τους θέση. Επίσης, σύγκρινε μεταξύ τους τις αποστάσεις του Ο από τις ευθείες Ay' και Bx' και του Κ από τις Οx και Οy.

9. Σχεδίασε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έτσι, ώστε ανά δύο οι διαδοχικές πλευρές του να είναι κάθετες. Αν ΑΒ = 3 cm και ΒΓ = 4 cm. Να βρεις: (α) το μήκος των ΓΔ και ΑΔ και (β) το μήκος των ΒΔ και ΑΓ, με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου. Τι παρατηρείς;

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Τοποθέτησε ένα "x" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΖΕΥΓΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ	ΣΧΕΣΗ ΙΣΕΣ	ΣΧΕΣΗ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ
"ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ"		
"ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ"		
"ΕΝΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ"		
"ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ"		
"ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ"		
"ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ"		

Β. Τοποθέτησε ένα "x" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Υπάρχουν και περιπτώσεις που περισσότερες από μία απαντήσεις είναι σωστές).

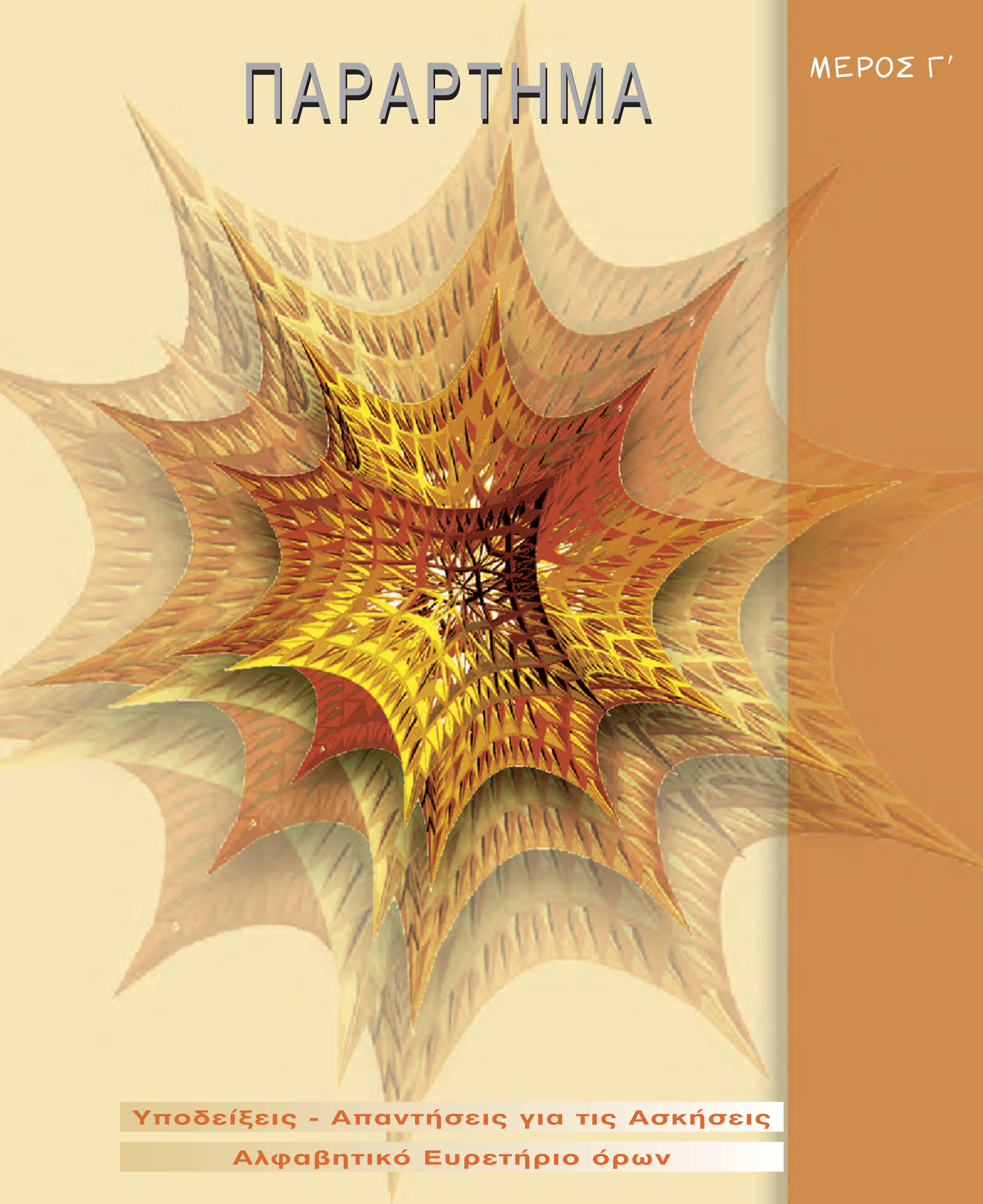
1. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι: ☐ 270° ☐ 180° ☐ 90°.
2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και:
   ☐ Άξονας συμμετρίας ☐ Ύψος ☐ Διχοτόμος.
3. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι εξωτερικές του γωνίες είναι ίσες με:
   ☐ 145° ☐ 270° ☐ 120°.
4. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες οι:
   ☐ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του ☐ Όλες οι πλευρές του ☐ Οι διαγώνιοί του.
5. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιές του είναι:
   ☐ Άξονες συμμετρίας ☐ Κάθετες και διχοτομούνται ☐ Διχοτόμοι των γωνιών του.
6. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άξονες συμμετρίας είναι:
   ☐ Οι διαγώνιές του ☐ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ☐ Οι πλευρές του.
7. Σε κάθε τετράγωνο οι ευθείες των διαγωνίων του είναι:
   ☐ Διχοτόμοι των γωνιών του ☐ Μεσοκάθετοι των πλευρών του ☐ Άξονες συμμετρίας.
8. Σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι:
   ☐ Κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του
   ☐ Οι διαγώνιές του άξονες συμμετρίας ☐ Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

Γ. Τοποθέτησε ένα "x" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ														
ΓΩΝΙΑ														
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ														
ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ ΓΩΝΙΕΣ														
ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ														
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ														
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ														
ΤΡΑΠΕΖΙΟ														
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ														
ΤΥΧΑΙΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ														
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ														
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ														
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ														
ΡΟΜΒΟΣ														

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ



Υποδείξεις - Απαντήσεις για τις Ασκήσεις

Αλφαβητικό Ευρετήριο όρων

Υποδείξεις - Απαντήσεις για τις Ασκήσεις

Μέρος Α′ Κεφάλαιο 1ο - Οι Φυσικοί Αριθμοί

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση

3. 286, 287, 288 και 290, 291.
4. $3.508<3.515<3.620<4.800<4.801$.
5. (α) $45=45$, (β) $38>36$, (γ) $456<465$, (δ) $8.765<8.970$, (ε) $90.876>86.945$, (στ) $345<5.690$.
6. Β (3), Γ (5), Δ (6), Ε (7).
7. (α)Σ, (β)Σ, (γ)Λ, (δ)Σ, (ε)Σ, (στ)Σ, (ζ)Σ, (η)Λ, (θ)Σ, (ι)Λ, (ια)Λ.
8. 300, 800, 700, 2.600, 9.500, 123.600, 34.600, 31.500, 8.800.
9. (α) 7.568.350, (β) 7.568.300, (γ) 7.568.000 (δ) 7.570.000, (δ) 7.600.000.

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

2. (α) $52 \cdot 100=5200$, (β) $37 \cdot 10=370$, (γ) $490 \cdot 10.000=4.900.000$.
3. (α) $3.582+7.591=11.173$, (β) $485+525=1.010$, (γ) $3.565+528=4.093$.
4. $1+2+3+4=10$, $1+2+3 \cdot 4=15$, $1 \cdot 2+3 \cdot 4=14$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$.
5. (α) 190, (β) 225, (γ) 462, (δ) 2726, (ε) $60-18+2$, (στ) όλες, (ζ) 230, (η) 9700, (θ) 879000.
6. (α) 39, (β) 77, (γ) 540, (δ) 1.212, (ε) 550, (στ) 444, (ζ) 3.366, (η) 5.684.
7. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι 40.
8. (α) Όχι, (β) 1.025.
9. Ναι ακριβώς.
10. 57 κιλά.
11. (α) Ο Άρης το 2004 είναι 21 χρονών, (β) Ο πατέρας γεννήθηκε το 1958.
12. Στα 12 πατώματα του γκαράζ υπάρχουν: 400 θέσεις. Στο γκαράζ έχουν μπει 199 οχήματα. Άρα οι θέσεις επαρκούν.

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

1.

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
$α^2$	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625
$α^3$	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000	15625

2. (α) 5^6, (β) $8^6 \cdot 6^3$, (γ) 1^6, (δ) $α^4$, (ε) x^3, (στ) $2^4 \cdot α^3$.
3. 2, 4, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
4. $10^2=100$, $20^2=400$, $30^2=900$, $40^2=1.600$, $50^2=2.500$, $60^2=3.600$, $70^2=4.900$, $80^2=6.400$, $90^2=8.100$.
5. $10^3=1000$, $20^3=8.000$, $30^3=27.000$, $40^3=64.000$, $50^3=125.000$.
6. (α) 75, (β) 77, (γ) 79, (δ) 19, (ε) 147.
7. (α) 60, (β) 14.686.
8. (α) $(6+5)^2=121$ και $6^2+5^2=61$ (β) $(3+6)^2=81$ και $3^2+6^2=45$.
9. (α) $3 \cdot α$, (β) $α^3$, (γ) $4 \cdot x$, (δ) x^4.
10. (α) $34.720= 3 \cdot 10^4+4 \cdot 10^3+7 \cdot 10^2+2 \cdot 10^1$, (β) $123.654=10^5+2 \cdot 10^4+3 \cdot 10^3+6 \cdot 10^2+5 \cdot 10^1+4 \cdot 10^0$, (γ) $890.650=8 \cdot 10^5+9 \cdot 10^4+6 \cdot 10^2+5 \cdot 10^1$.
11. $(1+2) \cdot (3+4)=21$, $1 \cdot (2+3 \cdot 4)=14$, $(1 \cdot 2+3) \cdot 4=20$, $1+(2+3) \cdot 4=21$.
12. $2+2 \cdot 2=6$, $3+3 \cdot 3=12$, $4+4 \cdot 4 \cdot 4=68$, $5+5 \cdot 5+5 \cdot 5=55$, $5 \cdot 5+5 \cdot 5 \cdot 5=150$, $4+4 \cdot 4-4=16$.

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

1. (α) $4002:69=58$, (β) $1445:17=85$, (γ) $925:37=25$, (δ) $3621:213=17$, (ε) $35280:2940=12$, (στ) $5082:77=66$.
2. (α) $65:5=13$, (β) $30:3=10$, (γ) $46.592:52=896$.
3. (α) Ναι, (β) Όχι, (γ) Ναι, (δ) Ναι.
4. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
5. $9 \cdot 73+4=661$.
6. Θα είναι η Πέμπτη.

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

2. (α) 684, (β) 9504 ή 9594, (γ) 6012. **3.** (α) 15, (β) 66, (γ) 10, (δ) 30, (ε) 18, (στ) 120. **4.** 2031. **5.** 105.
6. Στις 9 Μαΐου. Ο Γιάννης 5 φορές και ο Νίκος 4 φορές. **7.** (α) 1, (β) 8, (γ) 15, (δ) 10, (ε) 2.
8. $α=24 \cdot κ$, $β=24 \cdot λ$, κ και λ φυσικοί αριθμοί. Κάθε αριθμός που διαιρεί το 24 διαιρεί και τους δύο αριθμούς.
9.

Του 10 είναι:	1, 2, 5, 10	Του 14 είναι:	1, 2, 7, 14	Του 18 είναι:	1, 2, 3, 6, 9, 18
Του 11 είναι:	1, 11	Του 15 είναι:	1, 3, 5, 15	Του 19 είναι:	1, 19
Του 12 είναι:	1, 2, 3, 4, 6, 12	Του 16 είναι:	1, 2, 4, 8, 16	Του 20 είναι:	1, 2, 4, 5, 10, 20
Του 13 είναι:	1, 13	Του 17 είναι:	1, 17	Οι σύνθετοι:	10, 12, 14, 15, 16, 18, 20

10. Έστω α ο πρώτος αριθμός. Το διπλάσιο του αριθμού α γράφεται: $2 \cdot α$. Δηλαδή διαιρείται με το 2, άρα είναι σύνθετος αριθμός.
11.

(α)	Του 28 είναι:	1, 2, 4, 7, 14, 28	(ε)	Του 124 είναι:	1, 2, 4, 31, 62, 124
(β)	Του 82 είναι:	1, 2, 41, 82	(στ)	Του 345 είναι:	1, 3, 5, 15, 23, 69, 115, 345
(γ)	Του 95 είναι:	1, 5, 19, 95	(ζ)	Του 1232 είναι:	1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 22, 28, 44, 56, 77, 88, 112, 154, 176, 308, 616, 1232
(δ)	Του 105 είναι:	1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105	(η)	Του 3999 είναι:	1, 3, 31, 43, 93, 129, 1333, 3999

12. (α)$78=2 \cdot 3 \cdot 13$, (β) $348=2^2 \cdot 3 \cdot 29$, (γ) $1210=2 \cdot 5 \cdot 11^2$, (δ) $2344=2^3 \cdot 293$.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Μέρος Α' Κεφάλαιο 2ο Τα κλάσματα

Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

5. $\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{8}, \frac{1}{3}, \frac{5}{8}$. **6.** 14. **7.** (α) $\frac{100}{1000}$, (β) $\frac{250}{1000}$, (γ) $\frac{500}{1000}$, (δ) $\frac{600}{1000}$. **8.** (α) $\frac{15}{30}$, (β) $\frac{15}{180}$, (γ) $\frac{15}{365}$.

9. 36 €, 54 €. **10.** 32 μαθητές. **11.** 84 cm. **12.** 4cm, 6 cm.

Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

2. (α) Είναι, (β) Δεν είναι, (γ) Είναι, (δ) Είναι.

3. (α) $\frac{75}{100}$, (β) $\frac{160}{100}$, (γ) $\frac{20}{100}$, (δ) $\frac{250}{100}$, (ε) $\frac{80}{100}$.

4. (α) $\frac{5}{3}$, (β) $\frac{5}{3}$, (γ) $\frac{2}{3}$. **5.** (α) $\frac{4}{6}$, (β) $\frac{10}{15}$.

6. (α) 33, (β) 3, (γ) 70, (δ) 32.

7. (α) $\frac{5}{6}$, (β) $\frac{4}{3}$, (γ) $\frac{4}{7}$.

8. (α) Δεν είναι, (β) Είναι, (γ) Είναι, (δ) Δεν είναι.

9. (α) $\frac{27}{45}$ και $\frac{35}{45}$, (β) $\frac{35}{40}$ και $\frac{12}{40}$, (γ) $\frac{44}{12}$ και $\frac{7}{12}$.

10. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ, (η) Λ, (θ) Σ, (ι) Σ, (ια) Σ.

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

2. (α) $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$, (β) $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$, (γ) $\frac{4}{5} > \frac{8}{12}$.

3. $\frac{31}{10} > \frac{31}{11} > \frac{31}{12} > \frac{31}{13} > \frac{31}{14}$.

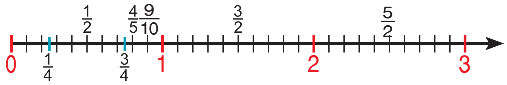
4. (α) $\frac{5}{8} < 1$, (β) $\frac{9}{10} < 1$, (γ) $\frac{12}{11} > 1$, (δ) $\frac{16}{16} = 1$, (ε) $\frac{109}{120} < 1$.

5. $\frac{5}{10} < \frac{8}{15} < \frac{3}{5} < \frac{20}{15} < \frac{7}{5}$.

6. (α) $1 < \frac{5}{3} < 2$, (β) $3 < \frac{7}{2} < 4$, (γ) $0 < \frac{8}{9} < 1$, (δ) $12 < \frac{63}{5} < 13$,

(ε) $12 < \frac{125}{10} < 13$.

7.



8. (α)

Α	Β	Γ	Δ	Ε
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$

(β)

Α	Β	Γ	Δ
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$

9.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η
$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{540}{720}$	$\frac{528}{720}$	$\frac{540}{720}$	$\frac{495}{720}$	$\frac{360}{720}$	$\frac{560}{720}$	$\frac{480}{720}$	$\frac{360}{720}$

$\frac{560}{720} > \frac{540}{720} > \frac{528}{720} > \frac{495}{720} > \frac{480}{720} > \frac{360}{720}$

ΣΤ > Α = Γ > Β > Δ > Ζ > Ε = Η

Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

1. (α) $\frac{7}{3}$, (β) 1, (γ) $\frac{10}{9}$, (δ) $\frac{4}{3}$, (ε) $\frac{21}{20}$, (στ) $\frac{5}{2}$.

2. (α) 1, (β) $\frac{5}{9}$, (γ) $\frac{1}{2}$, (δ) $\frac{10}{27}$, (ε) $\frac{41}{24}$, (στ) $\frac{12}{77}$.

3. (α) $\frac{29}{8}$, (β) $\frac{41}{10}$, (γ) $\frac{19}{9}$. **4.** (α) $3\frac{3}{4}$, (β) $2\frac{1}{2}$, (γ) $3\frac{2}{12}$.

5. (α) $\frac{19}{8}$, (β) $\frac{9}{5}$, (γ) $\frac{61}{10}$. **6.** (α) $\frac{4}{5}$, (β) $1\frac{5}{6}$, (γ) $\frac{13}{15}$.

7. $\frac{13}{72}$. **8.** $\frac{1}{30}$.

9. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Λ, (δ) Σ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

2. (α) $\frac{9}{4}$, (β) 5, (γ) 4, (δ) $\frac{1}{2}$.

3. (α) $\frac{7}{20}$, (β) 16, (γ) $\frac{20}{81}$, (δ) $\frac{1}{5}$.

5. (α) $\frac{1}{3}$, (β) $10\frac{1}{2}$, (γ) $31\frac{1}{4}$, (δ) $2\frac{1}{2}$.

4.

•	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$	1	$\frac{21}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{21}{20}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{21}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{21}$	2	$\frac{4}{3}$	1

6. (α) $\frac{7}{4}$, (β) $\frac{1}{72}$, (γ) $\frac{8}{5}$, (δ) 3, (ε) $\frac{8}{739}$.

(στ) 1. **7.** 1 λίτρο.

8. (α) $\frac{27}{20}$, (β) $\frac{9}{20}$, (γ) $\frac{3}{20}$.

9. (α) $\frac{37}{40}$, (β) $\frac{33}{40}$, (γ) $\frac{137}{60}$.

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

2. (α) $\frac{3}{2}$, (β) 1, (γ) $\frac{1}{2}$, (δ) 3. **3.** (α) 6, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{5}{8}$, (δ) $\frac{123}{400}$.

4. (α) $\frac{3}{2}$, (β) $\frac{2}{3}$, (γ) $\frac{1}{3}$, (δ) 3. Είναι ανά δύο αντίστροφοι.

5. (α) $\frac{3}{16}$ και (β) $\frac{3}{4}$. Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

7. $\frac{3}{10} : \frac{4}{10} = \frac{3}{4}$, $\frac{5}{9} : \frac{4}{9} = \frac{5}{4}$, $\frac{45}{90} : \frac{15}{9} = \frac{3}{10}$, $\frac{16}{3} : \frac{8}{9} = 6$.

8. (α) $\frac{15}{32}$, (β) $\frac{5}{4}$, (γ) 16. **9.** (α) $\frac{3}{5}$, (β) $\frac{55}{42}$, (γ) 8.

6.

:	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$	1	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{28}{15}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{7}$	1	2	$\frac{8}{3}$
1	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	1

Μέρος Α' Κεφάλαιο 3ο - Δεκαδικοί αριθμοί

Α.3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

3. (α) 0,43 & 0,437, (β) 1,23 & 1,235, (γ)0,21 & 0,210. **4.**(α) 5,8, (β) 0,03, (γ) 50,25, (δ) 1,024.

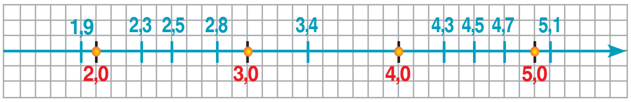
5. (α) $\frac{35}{10}$, (β) $\frac{4525}{100}$, (γ) $\frac{3004}{1000}$. **6.** Ψηφίο χιλιοστών: (α) 0, (β) 0, (γ) 5. Δεκάκις χιλιοστών: (α) 9, (β) 5, (γ) 6.

7. (α) 45,345 < 45,413 (β) 980,19 > 899,01 (γ) 7,534 = 7,5340.

8.

Στο δέκατο:	(α) 9876	(β) 67,9	(γ) 0	(δ) 8,2	(ε) 23,7
Στο εκατοστό:	(α)9876,01	(β) 67,90	(γ) 0	(δ) 8,24	(ε) 23,70
Στο χιλιοστό:	(α) 9876,008	(β) 67,896	(γ) 0,001	(δ) 8,239	(ε) 23,705

9.



10. 34,952>34,925>34,592>34,529>34,295>34,259. **11.** 25,47.

12. (α) 0,345=$\frac{345}{1000}$, (β) 3,45=$\frac{345}{100}$, (γ) 0,0345=$\frac{345}{10000}$, (δ) 34,5=$\frac{345}{10}$.

13. (α) $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$=0,4, (β) $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$=0,3, (γ) $\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$=0,9, (δ) $\frac{15}{5}=\frac{30}{10}$=3, (ε) $\frac{10}{4}=\frac{25}{10}$=2,5, (στ) $\frac{19}{1}=\frac{190}{10}$=19.

Α.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς - Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

1. (α) 58,565, (β) 18,915.
2. Α=212,66 m, Β=174,53 m, Γ=366,58 m.
3. (α) 11,042, (β) 1,3995, (γ) 7,4995.
4. (α)12,0625, (β)12,56, (γ)101,16732, (δ)7,05.
5. (α) 84, (β) 8,2391. **6.** (α) 42,5, (β) 9793,215.
7. 20,2 : 4=5,05.
8. (48,52 –10,7) : 2=37,82 : 2 =18,91.
9. (α) 133, (β) 58,05.
10. (α) 9,61, (β)49,1401, (γ)20,25, (δ)0,25, (ε)0,04, (στ) 0,027.
11. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ.

Α.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

(7,28 : 5,2 – 0,4) · 5,8 + 4,2 + (2,4+ 7,1) : 5 + 0,1 – (2,03 + 0,47) · 3,2 = 10 + 2 – 8 = 4.

7,28 / 5,2 − 0,4 = 1 * 5,8 + 4,2 = 10 M+

2,4 + 7,1 = 9,5 / 5 = 1,9 + 0,1 = 2 M+

2,03 + 0,47 = 2,5 * 3,2 = 8 M− MR 4 MC 0

Α.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

1. (α) 5,83 ·10^5,(β) 4,3 ·10^6,(γ)7,96 ·10^6,(δ)3,42 ·10^9,(ε)4,8 ·10^3, (στ) 7,310 ·10^3,(ζ)2,819 ·10^5,(η)5,18 ·10^8,(θ)1,31 ·10^5,(ι)6,75 ·10^5

2. (α) 3.100.000, (β) 482.000, (γ) 32.500, (δ) 7.400, (ε) 920.

Α.3.5. Μονάδες μέτρησης

1. (α) 23dm=230 cm, (β) 3,1m=0,0031 km, (γ) 45,83 cm=0,4583 m, (δ) 67,2 km=67.200.000 mm, (ε) 95,5 mm=9,55 cm.
2. α=3,1·10^3 mm, β=4,2 ·10^3 mm και γ=2,3 ·10^3 mm.
3. 45,6dm < 230dm < 678dm < 9860dm.
4. 1.035cm^2 και 103.500mm^2.
5. (α) 56.000.000m^2, (β) 987m^2, (γ) 350.000m^2.
6. 44.100m^2, 44,1 στρέμματα.
7. 225 πλάκες.
8. 15.029cm^3=0,015029m^3=15.029.000mm^3.
9. 90m^3=90.000lt, 90.000lt· 4€/lt=360.000€.
10. 9h 10min.
11. (α) 4 h 52 min=292 min=17.520 s, (β) 3 h 12 min=192 min=11.520 s (γ) 5 h 20 min 30 s=320,5 min=19.230 s, (δ) 56 min 45 s=56,75 min=3.405 s.
12. (α) 6 min, (β) 12 min και (γ) 10 min.
13.

Στη μία πλάστιγγα	Στην άλλη πλάστιγγα
(α) 3,6kg	2 του 1kg+3 των 500g+2 των 50g
(β) 2,45kg+1 των 50g	2 του 1kg+1 των 500g

14.

Στη μία πλάστιγγα	Στην άλλη πλάστιγγα
(α) 5kg+1 των 3kg+1 των 1kg	1 των 9kg
(β) 3kg+1 των 5kg+2 των 1kg	1 των 10kg

15. (α) **5lt** 2 των 2lt + 2 των 0,5lt, (β) **2,8lt** 1 των 2lt + 1 των 0,5lt + 3 των 0,1lt, (γ) **2,4lt** 1 των 2lt + 4 των 0,1lt.
16. Η δεξαμένη έχει όγκο 3.600lt=3,6m^3. Το ύψος είναι 3,6m^3:(2,5m·1m)=1,44m=144cm. Στο 1cm αντιστοιχούν 3600lt:144cm=25lt/cm.
17. 'Ογκος δεξαμενής=1,2m·0,8cm·0,8cm=0,768m^3=768lt 1cm ύψους αντιστοιχεί σε 768lt: 120cm= 6,4 lt/cm.
(α) Ο χρόνος για να κατέβει η στάθμη 10cm είναι: (10cm·6,4lt/cm):8lt/min=8min
(β) Η δεξαμενή θα αδειάσει σε 768lt:8lt/min=96min.
(γ) Σε μισή ώρα θα αντληθούν 8lt/min·30min=240lt.
Η στάθμη του νερού θα κατέβει κατά: 240lt:6,4lt/cm=37,5cm.
18. (α) 105min:75min=$\frac{7}{5}$ και (β) 75min:105min=$\frac{5}{7}$.
Είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

Μέρος Α' Κεφάλαιο 4ο - Εξισώσεις και προβλήματα

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης - Οι εξισώσεις: α+x=β, x–α=β, α–x=β, αx=β, α:x=β, x:α=β

1. (α) 3x, (β) 10x,(γ) x+12, (δ) x–5, (ε) x–y>20, (στ) xy= 32.
2. (α) $3\cdot x+25$ το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 25
   (β) $\frac{1}{2}\cdot x-7=2$ το μισό ενός αριθμού μειωμένο κατά 7 ισούται με 2
   (γ) $\alpha-2\cdot\beta$ ένας αριθμός μειωμένος κατά το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού
   (δ) $4\cdot\kappa+7\cdot\kappa=88$ το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το επταπλάσιο του ίδιου του αριθμού ισούται με το 88.
3. Π=4α, $Ε=α^2$.
4. (α) 2x, (β) 3α, (γ) 55·α, (δ) 3·β+5·α, (ε) 9·x, (στ) ω.
5. $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot z)\cdot z = \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2\cdot 3}{9\cdot 5} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.
6. x = 3.
7. 12 + 13 = 25.
8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
x – 2 = 4						x		
1 + y = 4			x					
18 – ω = 10								x
2 – α = 1	x							
93 – β = 86							x	

9. (α) 10,93, (β) 52,79, (γ) 49,214, (δ) 30,9.
10. (α) 5, (β) 21, (γ) 7, (δ) 9.
11. (α) 2, (β) 2, (γ) 2.
12. (α) v=1, (β) x=10, (γ) t=17, (δ) x=1.
13. $\frac{1}{5}$.
14. 308.
15. (α) 20, (β) Π=4v, (γ) v=128:4=32.

Α.4.3. Παραδείγματα Επίλυσης προβλημάτων

1. Αν x είναι η ηλικία της μητέρας, θα είναι: x – 18 = 25, επομένως x = 43.
2. $\frac{2}{8}\cdot x = 60$, επομένως x= 240 και $\frac{7}{10}\cdot 240 = 168$.
3. (x–1) + x + (x+1) = 1533, επομένως x=511, άρα είναι: 510, 511, 512.
4. 15 + x = πολλαπλάσιο του 9 (0, 9, 18, 27, 36, 45, ...). Επομένως, ψηφίο x = 3 και ο αριθμός είναι ο 7533.
5. Αν x είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, τότε θα είναι: 3x + (100 – x) = 220, επομένως x = 60.
6. Αν x είναι η ηλικία του γιου, θα είναι: x + 4x = 50, Επομένως, x = 10.
7. Αν x είναι η αξία του χωραφιού, θα είναι: x + 600 =15.000, επομένως x=14.400 €. Αν y είναι η αξία του διαμερίσματος, θα είναι: y–15.600=15.000, επομένως y = 30.600 €.
8. (α) Α = 2 και Β = 6, (β) Γ = 4, Δ = 3.
9. 95lt και 11 δοχεία.
10. 133 δοχεία και 0,25lt.
11. Τρεις ημέρες.
12. Αν x είναι η αξία του υπολογιστή, θα είναι: $\frac{80}{100}\cdot x+230=1070$, επομένως x=1050€.
13. 35=7·5, 36=9·4 ή 98=7·14, 99=9·11.

Μέρος Α' Κεφάλαιο 5ο - Ποσοστά

Α.5.1. Ποσοστά

1. (α) 20%, (β) 150%, (γ) 25%, (δ) 75%, (ε) 60%.
2. (α) 52%, (β) 341%, (γ) 19%, (δ) 3%, (ε) 7%.
3. (α) $\frac{3}{20}$, (β) $\frac{7}{100}$, (γ) $\frac{12}{25}$, (δ) $\frac{1}{2}$.
4. (α) 300€, (β) 27min, (γ) $200cm^3$, (δ) 250g, (ε) 250g.
5. (α) 5%, (β) 82,2%, (γ) 2%, (δ) 3%.
6. 0,1342lt.
7. (α) 6.400km, (β) Φλοιός: 0,78125%, Μανδύας: 45,3125%, Πυρήνας: 53,90625%.
8.

	Ενοίκιο	Διατροφή	Σπουδές	Αυτοκίνητο	Βιβλία	Διασκέδαση
(α)	324 €	345,6 €	194,4 €	32,4 €	75,6 €	108 €
(β)	27%	28,8%	16,2%	2,7%	6,3%	9%

Α.5.2. Προβλήματα Ποσοστών

1. (α) 50,715€, (β) 286€ κέρδος, (γ) 1,43%.
2. (α) 3.600€, (β) 3.762€.
3. (α) 14.000€, (β) 56%, (γ) από τον πρώτο.
4. (α) Όχι, (β) 150 κ.ε. στα 300 κ.εκ.
5. 980,39 €.
6. 151,13€.
7. (α) 450€, (β) 1,5%.
8. 1.330€.
9. (α) 828€, (β) 118€, 115€, 112€, 109€, 106€, 103€. (γ) 1.491€.
10. (α) 66,5€, (β) 546,5€, (γ) Μετρητοίς.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ

Β. Άσκηση Αντιστοίχησης: Παντελόνι 30%, Φούστες 40%, Φορέματα 15%, Μπλούζες 20%, Φόρμες 10%.

Μέρος Α΄ Κεφάλαιο 6ο Ανάλογα ποσά - Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Α.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

1. Το Ι (6,0) βρίσκεται στον άξονα Οx ενώ το Κ(0,5) στον άξονα Οy.
2. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Το σημείο Κ έχει συντεταγμένες (2,2).
3. Τα σημεία βρίσκονται πάνω σε ευθεία που είναι διχοτόμος της γωνίας των ημιαξόνων Οx και Οy.
4. (α) Ε5, (β) Οι δικαιολογημένες απουσίες του Αντωνίου για το 2ο Τρίμηνο, (γ) 6 και 27.

Α.6.2. Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

1. (α) $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{4}{1}$, $\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{5}{2}$, $\frac{ΚΛ}{ΑΒ}=\frac{3}{4}$, $\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{4}{3}$,

   $\frac{ΗΘ}{ΕΖ}=\frac{2}{5}$, $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{4}$.

   (β) $\frac{ΓΔ}{ΕΖ}=\frac{1}{5}$, $\frac{ΗΘ}{ΚΛ}=\frac{2}{3}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΒ}=1$, $\frac{ΕΖ}{ΓΔ}=\frac{5}{1}$, $\frac{ΚΛ}{ΗΘ}=\frac{3}{2}$, $\frac{ΓΔ}{ΓΔ}=1$.
2. Αν α και β οι διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου α=9 cm και β=5 cm.
3. 44 φορές.
4. 6 φορές.
5. Το βάρος των νημάτων του πολυεστέρα είναι 164 gr.
6. Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

Κλίμακα	Μήκος σε σχέδιο	Πραγματικό μήκος
1 : 5	4 cm	20 cm
3 : 8	9 cm	24 cm
1 : 30	12 cm	360 cm
1 : 500	2 cm	10 cm
1 : 100	3,5 cm	350 cm

7. (α) Π = 4(x+1), (β) Δεν είναι ανάλογα,
   (γ) Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

x	0	1	2	3	4
Π	4	8	12	16	20

8. 750 Χ 1250. 9. Δεν θα πάρουμε την ίδια απόχρωση.

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

1. (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Λ (στ) Λ (ζ) Λ (η) Λ.
3. (α) Δεν είναι ανάλογα (β) Είναι ανάλογα.
4. Ο συντελεστής αναλογίας τους είναι 100 : 201 και ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο εξής:

x	5	0	1	0,99	0,062	3,7	0,61	0,273
y	10,05	0	2,01	2	0,125	7,437	1,2261	0,55

5. Ο συντελεστής αναλογίας τους είναι 7:4. Άρα η συνταγή θα γίνει: 7 αυγά, $1\frac{3}{4}$ πακέτα φαρίνα του μισού κιλού, 437,5gr βούτυρο, $3\frac{1}{2}$ φλιτζάνια ζάχαρη, $1\frac{3}{4}$ φλιτζάνια βανίλια και $1\frac{3}{4}$ φλιτζάνια γάλα.
6. Από την αναλογία έχουμε x = 1. Ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{1}{3}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{x}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
7. Ισχύει η σχέση: Κεφάλαιο μετά από έναν χρόνο = επιτόκιο • Αρχικό Κεφάλαιο.
   Δηλαδή τα δύο ποσά είναι ανάλογα και θα έχουμε ότι:

Αρχικό Κεφάλαιο	100	150.000
Κεφάλαιο μετά από έναν χρόνο	109,5	x

   Άρα x = 164.250€.

Α.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

1. Ο πίνακας τιμών των δύο ποσών που περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών είναι:

x	1	2
y	1,5	3

2. Για να σχεδιάσουμε τις γραφικές αναπαραστάσεις των σχέσεων αναλογίας απαιτούνται δύο σημεία. Επειδή το ένα είναι πάντα το (Ο,Ο) αρκεί να βρούμε ένα τυχαίο σημείο κάθε μίας σχέσης αναλογίας π.χ. (α) το (2,1), (β) το (1,3), (γ) το (2,11), (δ) το (1,10) και (ε) το (100,1).
3. Η αντιστοίχηση δίνει τα εξής:

(Α)	(Β)	(Γ)	(Δ)	(Ε)	(Ζ)	(Η)	(Θ)
(4)	(6)	(1)	(3)	(8)	(5)	(2)	(7)

4. (α) x=40•φ, x=20•μ, x=50•π, (β) Το ποσό για κάθε είδος θα είναι το ένα τρίτο του συνολικού ποσού, δηλαδή 4.000€. Από την τιμή αυτή, στον άξονα των χρημάτων φέρουμε κάθετη, η οποία τέμνει τις τρεις γραφικές παραστάσεις στα σημεία Α, Β και Γ αντίστοιχα. Η τετμημένη του Α είναι 100, του Β είναι 200 και του Γ είναι 80. Δηλαδή θα αγοράσει 100 φόρμες, 200 μαγιό και 80 ζευγάρια παπούτσια.

Α.6.5. Προβλήματα αναλογιών

1.

	πάσσαλος	δέντρο
ύψος	1,2	x
σκιά	3	14

Άρα το ύψος του δένδρου θα είναι 5,6 m.

2.

	Αστροναύτης	Παιδί
Βάρος στη γη	78	52
Βάρος στο φεγγάρι	13	x

Άρα το παιδί ζυγίζει στο φεγγάρι 8,6 κιλά.

3. Ο αμπελουργός χρειάζεται 2.100 kg μούστο.

σταφύλια	100	x
μούστος	80	2.100

Πρέπει να πατηθούν 2.625 kg σταφύλια.

4. Αν είναι x τα χρήματα που θα πάρει ο ένας εργάτης.

Εργάτης που δούλεψε 4 μέρες	x	4
Εργάτης που δούλεψε 5 μέρες	270– x	5

Βρίσκουμε ότι ο ένας πήρε 120 € και ο δεύτερος 150 €.

Α.6.5. Προβλήματα αναλογιών

5. Έστω τα x κιλά περιέχουν 60 κιλά αλάτι.

Νερό	100	x
Αλάτι	3	60

Άρα πρέπει να εξατμιστούν 2.000 kg νερό.

6. Καλλιεργήθηκαν συνολικά 15 στρέμματα. Η παραγωγή του χωραφιού του γείτονα είναι τα $\frac{8}{15}$ των 14 t.
Το 15% αυτής είναι: 1,12 t, που θα πάρει ο γείτονας και 12,88 t καλαμπόκι που θα πάρει ο γεωργός.

7. (α) Η απώλεια κατά το ψήσιμο είναι: 2,5–1,9=0,6 κιλά. Άρα το ποσοστό της απώλειας είναι: 24%.
(β) Έστω x κιλά ωμό κρέας που πρέπει να ψήσουμε. Τα ποσά *κιλά ωμό κρέας* και *κιλά ψημένο κρέας* είναι ανάλογα. Έτσι από την σχέση αναλογίας βρίσκουμε: x=3,02 κιλά κρέας.

8. Η αύξηση της κάρτας θα είναι 75%•12€=9€. Άρα η μηνιαία κάρτα θα κοστίζει 21€. Η αύξηση του εισιτηρίου θα είναι 50%•0,7€=0,35€. Άρα το εισιτήριο θα κοστίζει 1,05€. Ο εργαζόμενος πηγαίνει και έρχεται 20 φορές το μήνα με το λεωφορείο στη δουλειά του, δηλαδή κάνει 40 διαδρομές με το λεωφορείο. Συνολικά θα πληρώσει το μήνα 40•1,05€=42€. Άρα τον συμφέρει να αγοράσει κάρτα απεριόριστων διαδρομών.

9. Γνωρίζουμε ότι τα ποσά *κεφάλαιο* και *τόκος* είναι ανάλογα. Έτσι για επιτόκιο 10% και κεφάλαιο x, θα έχουμε:

Κεφάλαιο	100	x
Τόκος	10	1.000

Δηλαδή: x=10.000€. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20% θα γίνει ίσο με το 80% του 10%, δηλάδή 8%. Με το νέο επιτόκιο θα έχουμε τον ίδιο τόκο για κεφάλαιο x, για το οποίο θα ισχύει:

Κεφάλαιο	100	x
Τόκος	8	1.000

Δηλαδή: x =12.500€. Το ποσοστό αύξησης που πρέπει να γίνει στο αρχικό κεφάλαιο για να αποδώσει τον ίδιο τόκο με μικρότερο επιτόκιο θα είναι 25%.

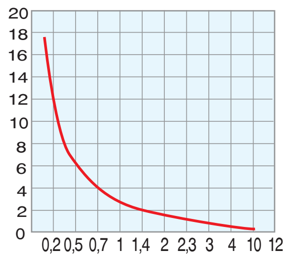
10. Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

	Σύνολο	Με 0 παιδιά	Με 1 παιδί	Με 2 παιδιά	Με 3 παιδιά	Με 4 παιδιά	Πάνω από 4 παιδιά
Οικογένειες	200	10	40	80	50	15	5
Ποσοστά	100%	5%	20%	40%	25%	7,5%	2,5%

Α.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

1. (α) Λ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Σ, (στ) Λ.
3. Οι πίνακες (α), (β) και (γ) είναι πίνακες αντιστρόφως αναλόγων ποσών διότι το γινόμενο των αντιστοίχων ποσών είναι σταθερό. Ο πίνακας (δ) δεν είναι πίνακας αντιστρόφως αναλόγων ποσών.
4. (α) Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, άρα το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους θα είναι σταθερό και ίσο με 1•3,5=3,5.

x	0,2	0,5	0,7	1	1,4	2	2,3	3	4	10	12
y	17,5	7	5	3,5	2,5	1,75	1,521	1,166	0,875	0,35	0,291



5. Τα ποσά *εργάτες* και *ημέρες* είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα αν x εργάτες χρειάζονται για να αναδασώσουν την ίδια έκταση σε οκτώ ημέρες θα έχουμε x =25.
6. Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό. Έτσι αν x ο αριθμός που δείχνει τα καφάσια των 20 κιλών, έχουμε x=30. Η συσκευασία σε καφάσια των 12 κιλών θα στοιχίσει: 50•0,28=14€. Η συσκευασία σε καφάσια των 20 κιλών θα στοιχίσει: 30•0,46=13,8€. Συμφέρει να χρησιμοποιήσουν τα καφάσια των 20 κιλών γιατί το κόστος συσκευασίας είναι μικρότερο.
7. Η αύξηση της κατανάλωσης είναι 16lt την ημέρα, δηλαδή η ημερήσια κατανάλωση θα είναι 96 lt. Έστω x οι ημέρες για τις οποίες επαρκεί το πετρέλαιο, με αυτή την κατανάλωση. Τα ποσά lt πετρελαίου (κατανάλωση) και ημέρες (χρόνος επάρκειας) είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα x =25 ημέρες.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους 1. Σ, 2. Λ, 3. Σ, 4. Σ, 5. Λ, 6. Λ, 7. Λ.

Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

6.

x	2	4	8	12	16
y	7,5	15	30	45	60

8.

x	2	1	1/2	4	8
y	8	16	32	4	2

9.

x	1	2	3
y	2	3	4

y=x+1

x	1,5	3	4,5
y	1	2	3

$y=\frac{2}{3}x$

Μέρος Α' Κεφάλαιο 7ο Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

Α.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

3. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ.
4. ΟΜΟΣΗΜΟΙ: (α), (β), (γ), (ζ), (θ), (ι) και ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ: (δ), (ε), (στ), (η).
5. (α) +50000, (β) –78000, (γ) +500, (δ)–1, (ε) –30.
6. ΜΥΣΤΙΚΟ.
7. (α) +6,5, (β) –8,5.

Α.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

3. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ.
4. (α) 7,25, (β) 2,5, (γ) 16, (δ) 20,05, (ε) 58.
5. (α)–100, +100, (β) –21,7, +21,7, (γ) 0, (δ) –7,03, +7,03, (ε) –5,2, +5,2.
6.

Αριθμός	1	–2	+2	–19	+8	–12	–7	+7
Αντίθετος	–1	+2	–2	+19	–8	12	+7	–7
Απόλυτη τιμή	1	2		19	8	12	7	

9. (α)+41>+38, (β) 9<11, (γ)–3<–2, (δ) –9>–16 (ε) 7>–8, (στ) 0>–3, (ζ) 0<+4.
10. (α)–11<11=|11|, (β) –3<+3=|–3|.
11. –10<–8<–4<–3<–2<0<+5<+7<+15.
12. (α) – 3>–8, (β) –4<10, (γ) 0>–1, (δ) +3>0, (ε) –5=–|–5|, (στ)–5=–(+5), (ζ) |+7|=|–7|, (η) – (– 8)>–8, (θ) +3>–(+4), (ι) 0>–|–4|.
13. (α) –12, –11,–10,–9, (β) κανένα, (γ)–1,0,+1,+2,+3,+4.

Α.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

1. (α) Λ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ.
2. (α)+10,2, (β) +9,1, (γ) +100, (δ) +14, (ε) +16, (στ) –6, (ζ) –6,5, (η) –12, (θ) –15, (ι) –20.
3. (α) –2,1, (β) +0,96, (γ) +94,6, (δ) +8,8, (ε)–1,5, (στ) +1, (ζ) +3,9, (η) +2,2, (θ) +4,5, (ι) +7,4.
5. (α) (+6)+(–8)= –2, (β) (+5)+(–5)=0, (γ) (+7)+(+9)=+16, (δ)(–9)+(–8)=–17, (ε) (+6)+(+5)=+11.

4.

+	+4	–8	–11	+17
–5	–1	–13	–16	+12
+9	+13	+1	–2	+26
–4	0	–12	–15	+13
–21	–17	–29	–32	–4

6. Το πρώτο ΝΑΙ, το δεύτερο ΟΧΙ.
7. (α) +1,8, (β) +4. **8.** (α) –1, (β) 0.

Α.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

1. (α) Λ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ.
2. (α) 12, (β) –16, (γ) +13,2, (δ) –3,9, (ε) 0.
3. (α) 14, (β) 20, (γ) 0.
4. (α)+10, (β)–19, (γ) +22.
6. (α)–10, (β)–26, (γ) –0,375, (δ) 3,25.
7. (α) –8, (β) 7,4, (γ) –0,75.

5.

α	β	α+β	α–β
+3	–8	–5	+11
+18	–8	+10	+26
–2	–5	–7	+3
–9	+15	+6	–24

7.

α	β	α–β	β–α
7	3	4	–4
11/4	13/4	–1/2	1/2
–5,55	–2,45	–3,1	3,1
3	–2,1	5,1	–5,1

9.

x	3,5	2	1,89	0,75
y	–1,5	4,3	–4,78	–0,25
z	–2	–2,3	3,11	0
x+y+z	0	4	0,22	0,5
x– y– z	7	0	3,56	1

Α.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

2. (α) +1, (β) 30, (γ) 0,6, (δ) 0, (ε) –20015, (στ) –725, (ζ) –0,3.
3. (α) –81, (β) –500, (γ) +6.

4.

•	–1	–0,5	0	+2	+3
–2	+2	+1	0	–4	–6
–3,2	+3,2	+1,6	0	–6,4	–9,6
+1,5	–1,5	–0,75	0	+3	+4,5
+10	–10	–5	0	+20	+30

5. (α) +21, (β) 0,025, (γ)–11.
6. (α) 10+2α+5β +αβ, (β) αα–49, (γ) αβ–3α–3β+9, (δ) γδ+5γ+8δ+40.
7. (α) +1, (β) –1, (γ)+1.
8. Α=40 , Β=+210, Γ=0.

9.

x	y	z	ω	A=xyz	B=yxω	Γ=xA–B	AB+Γ
–2	0,5	+1	–3	–1	+3	–1	–4
–0,5	+6	–4	–0,3	+12	+0,9	–6,9	+3,9
–2	+1,5	0,2	–7	–0,6	+21	–19,8	–32,4

Α.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

2. (α) +5,05, (β) 3, (γ) –90, (δ) –7.

3.

x	y	x+y	x–y	xy	x:y
$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{-6}$	$-\frac{19}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{35}{8}$	$+\frac{14}{5}$
1,7	2,3	4	–0,6	+3,91	$\frac{17}{23}$
$-\frac{4}{5}$	–1	$-\frac{9}{5}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{4}{5}$	$+\frac{4}{5}$

4. (α) +40, (β) +1,5, (γ) +6, (δ) $\frac{6}{5}$.
5. (α) $-24\frac{2}{3}$, (β)+350, (γ) –6, (δ) –1.
6. (α) $\frac{2}{15}$, (β) –1, (γ) $+\frac{4}{9}$.
7. +32.

Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

1. (α) –1,5, (β) 0,625, (γ) $0,\overline{9285714}$ (δ), $1,\overline{81}$ (ε) $1,\overline{032258064516129}$.
2. (α) $\frac{1448}{25}$, (β) $\frac{26}{9}$, (γ) $\frac{380}{99}$, (δ) $\frac{24829}{3330}$, (ε) $\frac{77}{5}$.
3. (α) 3, (β) 7,7, (γ) 7,326.

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

2.

$3+5^2$	$(3+5)^2$	$3\cdot5^2$	$(3\cdot5)^2$	$3-5^2$	$(3-5)^2$	$\frac{3^2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$
Άθροισμα των 3 και 5^2	Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5	Γινόμενο των 3 και 5^2	Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5	Διαφορά των 3 και 5^2	Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5	Πηλίκο των 3^2 και 5	Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5
28	64	75	225	–22	4	1,8	0,36

3. Α =–1, Β=0, Γ=8.

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

1.

α	β	γ	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha\beta)^2$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$	$(-\alpha)^{-2}$	$(\gamma\beta)^{-1}$
$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{5}$	$+2{,}25$	$+1$	$+0{,}0625$	$+4$	$+2{,}5$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+2{,}25$	$+0{,}25$	$+0{,}25$	$+1$	$-\frac{4}{3}$
10	-10	$0{,}01$	0	$+10000$	$+1$	$+0{,}01$	-10

2. $A = 0$, $B = \frac{1105}{81}$, $\Gamma = -8$.

3. $10^3 + 10^2 = 1.100$.

4.

x	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	-10	-100	$2\cdot10^4$	$5\cdot10^{-3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$
x^{-3}	10^9	10^6	10^3	-10^{-3}	-10^{-6}	$0{,}125\cdot10^{-12}$	$8\cdot10^6$	8	$\frac{8}{27}$	-125
x^3	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	-10^3	-10^6	$8\cdot10^{12}$	$125\cdot10^{-9}$	$0{,}125$	$\frac{27}{8}$	$-0{,}008$
x^{-1}	10^3	10^2	10	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}5\cdot10^{-4}$	200	2	$\frac{2}{3}$	-5

5.

$\cdot$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
10^{-3}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
10^{-2}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10
10^{-1}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2
10^0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3
10^1	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4
10^2	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
10^3	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Α.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

1. (α) $3{,}844\cdot10^8$ m, (β) $4{,}5\cdot10^9$ έτη, (γ) $1{,}496\cdot10^{11}$m. **2.** $6\cdot10^{26}$ άτομα. **3.** (α) 10^{-14} cm, (β) $9{,}7\cdot10^{-23}$ gr.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1. (α) $(+8)+(-3)+(-6)+(+5)=+4$, (β) $(-8)+(-3)+(+6)+(-5)=-10$,
(γ) $(+3{,}7)+(-14{,}8)+(-5{,}2)+(+16{,}3)=0$, (δ) $(-3{,}7)+(+14{,}8)+(-5{,}2)+(-16{,}3)=-10{,}4$.

2. Ε>Γ>Α>Β>Δ. **3.** (α)–25, (β) 100. **4.** ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ. **5.** (α) 3 τρόποι, (β) +15,75.

6.

–27000
–300 90
–20 15 –6
4 –5 –3 2

7.

1 –1 2
–1 –2
+2

–2 0,5 –8
–1 –4
+4

–3 5 –0,2 –1
–15 –1 +0,2
+15 –0,2
–3

Γ. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

(α)

–3	–20
–20	0
+2	–3
+20	+2
0	+20

(β)

+31	–4
+8	0
–30	–30
0	+8
–4	+31

(γ)

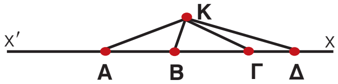
–90	+900
+90	–900
–900	+9
+900	–90
+9	+90

Μέρος Β′ Κεφάλαιο 1^{ο} Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Β.1.1. Επίπεδο - Σημείο - Ευθύγραμμο τμήμα - Ευθεία - Ημιευθεία - Ημιεπίπεδο

3. ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ.

4. x′Α, Αx και x′Β, Βx.



5. Η αντικειμενική ημιευθεία του ΑΒx είναι Αx′, του ΒΓy ή Βy′ και του ΓΑz η Γz′.

Β.1.2. Γωνία - Γραμμή - Επίπεδα σχήματα - Ευθύγραμμα σχήματα - Ίσα σχήματα

1. (α) $\widehat{\Gamma B A}$, (β) $\widehat{ZK A}$, $\widehat{AKB}$, $\widehat{BKH}$ και $\widehat{HKZ}$, (γ) $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A\Delta}$ και $\widehat{BA\Delta}$, (δ) $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{BA\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma\Delta}$.
2. (α) Η γωνία $\widehat{B}$ περιέχεται ανάμεσα στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ. (β) Απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι η ΑΒ.
   (γ) Οι γωνίες οι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ είναι οι $\widehat{A}$ και η $\widehat{\Gamma}$.
3. Γραμμοσκιάζουμε τη γωνία στην οποία ανήκει το σημείο Α και την ονομάζουμε $x\widehat{O}y$.
4. (α) Οι γωνίες οι προσκείμενες στην πλευρά ΒΓ είναι οι $\widehat{B}$ και η $\widehat{\Gamma}$. (β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι στην πλευρά ΑΒ.
5. (α)

ΚΟΡΥΦΕΣ					ΠΛΕΥΡΕΣ				
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
x						x			
		x					x		
			x					x	
				x					x

(β)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x														
		x												
					x									
									x					
														x

Β.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων - Απόσταση σημείων - Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

3. Έμειναν 49,56 cm ύφασμα.

4. 79.500 cm. Ο πεζός θα κάνει: 1060 βήματα.

5. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι: 61,2 m. Το διαθέσιμο σύρμα έχει μήκος: 60,48 m. Άρα πρέπει να αγοράσει 72 cm σύρμα.

6.

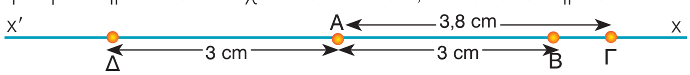
Ακτίνα	σε m	σε km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6.085.000	6.085
ΓΗ	6.378.000	6.378
ΑΡΗΣ	3.750.000	3.750
ΔΙΑΣ	71.400.000	71.400

7.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΕΑ	Περίμετρος
cm	517	420	84	1250	76	2.347
dm	51,7	42	8,4	125	7,6	234,7
m	5,17	4,2	0,84	12,5	0,76	23,47

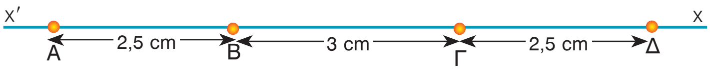
8. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε και σημειώνουμε τρία σημεία που απέχουν τα καθένα 2,7cm από το σημείο Α.

9. (α) ΑΓ>ΑΔ, (β) ΑΒ=ΑΔ.



10. ΑΓ=5,5 cm και ΒΔ=5,5 cm. Άρα ΑΓ=ΒΔ.

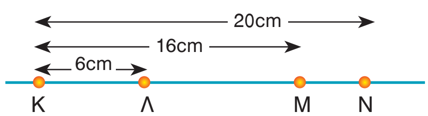
11. ΑΒ=8,4 cm.



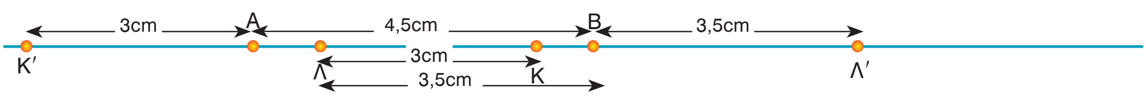
12. Με το υποδεκάμετρο επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Μ που απέχει 3,3 cm από το Α εκτός της ευθείας στην οποία βρίσκεται το ΑΒ. Βρίσκουμε το μέσον του ΑΒ έστω Ο και φέρνουμε την ΟΜ.

Β.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

1. Με κατάλληλες μετρήσεις και πρόσθεση βρίσκουμε ότι το μήκος της τεθλασμένης και το συγκρίνουμε με το μήκος του ΖΗ.
2. Η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου ισούται με 3·2,5 cm=7,5 cm. Άρα, επί της ημιευθείας με αρχή το Β παίρνουμε ένα σημείο Ε έτσι, ώστε ΒΕ=7,5cm.
3. Το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕΖ είναι ίσο με ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΖ=...=71 mm.
4. Ομοίως έχουμε: ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ=...=158 cm.
5. ΛΜ=ΚΜ–ΚΛ=10 cm, ΛΝ=ΚΝ–ΚΛ=14 cm και ΜΝ=ΚΝ–ΚΜ=4 cm.
6. (α) ΑΔ=ΑΒ+ΒΔ=8,5 cm, (β) ΒΓ=ΑΓ–ΑΒ=1,6 cm,
   (γ) ΑΓ+ΓΔ=ΑΓ+(ΒΔ–ΒΓ)=8,5 cm, (δ) ΑΔ–ΔΒ=ΑΔ–ΒΔ=ΑΒ=3 cm.



7. ΓΔ=ΑΔ–(ΑΒ+ΒΓ)=ΑΔ–ΑΒ–ΒΓ=3cm.
8. Έχουμε ότι: ΒΓ=ΑΒ+4 cm, ΒΓ=ΓΔ–3 cm και ΑΔ=14 cm. Με κατάλληλες πράξεις βρίσκουμε ότι: ΒΓ=5 cm και ΓΔ=8 cm.
9. ΒΔ=ΑΔ–ΑΒ=...3 cm, ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=...3 cm.
10. Έχουμε: ΑΔ=ΑΓ+ΓΔ=4,5 cm και ΓΕ=ΑΕ– ΑΓ=3,2 cm.
11. Επειδή το σημείο Κ, όπως και το σημείο Λ, μπορούμε να τα πάρουμε εκατέρωθεν των σημείων Α και Β αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του ΚΛ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: (1) Κ και Λ εντός του τμήματος ΑΒ. Τότε μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε ΚΛ=2 cm. (2) Κ και Λ εκτός ΑΒ στις θέσεις Κ′ και Λ′ αντίστοιχα. Τότε βρίσκουμε Κ′Λ′=11 cm. (3) Αν το Κ είναι εντός και το Λ εκτός, τότε βρίσκουμε: ΚΛ′=5 cm. (4) Αν το Κ είναι εκτός και το Λ εντός βρίσκουμε Κ′Λ=4 cm. Άρα: (α) Το ΚΛ ανάλογα με τις θέσεις που επιλέξαμε παίρνει τις τιμές: 2 cm, 3 cm, 4 cm ή 11 cm. (β) Την τιμή των 11 cm παίρνει το ΚΛ όταν και το Κ και το Λ είναι εκτός του ΑΒ. (γ) Από την παραπάνω διευρύνση προέκυψε ότι σε καμιά περίπτωση δεν υπερβαίνει την τιμή των 11 cm.

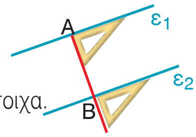


Β.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών - Διχοτόμος γωνίας

2. Φέρνουμε την Οz έτσι ώστε να σχηματίζει με την πλευρά Οx γωνία 20°.
3. Χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε περίπου το άνοιγμα των γωνιών.
4. $\hat{\alpha}=45°$, $\hat{\beta}=93°$, $\hat{\gamma}=323°$, $\hat{\delta}=82°$, $\hat{\varepsilon}=180°$, $\hat{\kappa}=324°$, $\hat{\lambda}=60°$, $\hat{\mu}=140°$.
5. Η σειρά μεγέθους είναι η ακόλουθη: $\hat{\alpha}>\hat{\delta}>\hat{\gamma}>\hat{\beta}$.
6. (α) $\hat{\omega}<\hat{\varphi}$, (β) $\hat{\varphi}<\hat{\rho}$, (γ) $\hat{\omega}<\hat{\rho}$, (δ) $\hat{\psi}>\hat{\kappa}$, (ε) $\hat{\psi}<\hat{\lambda}$, (στ) $\hat{\psi}>\hat{\mu}$, (ζ) $\hat{\rho}>\hat{\theta}$.
7. Με το μοιρογνωμόνιο σχηματίζουμε τις ζητούμενες γωνίες και κατασκευάζουμε τις διχοτόμους αυτών.

Β.1.6. Είδη γωνιών - Κάθετες ευθείες

2. Με τον κανόνα χαράσσουμε την ημιευθεία Οx και στη συνέχεια με τη βοήθεια και του γνώμονα την κάθετο ε στην Οx.
3. Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε τις κάθετες ευθείες στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.
4. Με τον κανόνα σχεδιάζουμε τις ημιευθείες Οx και Οy και με τον γνώμονα φέρνουμε τις κάθετες ευθείες ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′ στην Οy.
5. Με γνώμονα φέρνουμε στο σημείο Ο τις κάθετες ευθείες ε και ε′ στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ε και ε′ είναι ίση με τη γωνία των δύο ημιευθειών.



6. Με γνώμονα φέρνουμε από τα σημεία Α, Β και Γ κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ στις ευθείες ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

7. Με γνώμονα φέρνουμε από τα σημεία Α, Δ και Β κάθετες ευθείες στην ε, οι οποίες συμπίπτουν μόνο αν τα σημεία Α και Β βρίσκονται σε ίδια κάθετο ευθεία στην ε.

Β.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες - Άθροισμα γωνιών

2. Ονομάζουμε όλες τις γωνίες του σχήματος και βρίσκουμε σε κάθε σημείο του όλες τις εφεξής και διαδοχικές γωνίες.
3. Με κορυφή το σημείο Α έχουμε τις γωνίες $\Delta\hat{A}E$ και $E\hat{A}B$, με κορυφή το Β έχουμε τις $\Gamma\hat{B}E$ και $E\hat{B}A$ ή $E\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{B}x$ με κορυφή το Δ έχουμε τις $\Gamma\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}A$ και τέλος με κορυφή το Ε έχουμε τις $B\hat{E}A$ και $A\hat{E}\Delta$.
4. (α) Με κορυφή το σημείο Α έχουμε τις γωνίες $B\hat{A}Z$ και $E\hat{A}Z$, με κορυφή το Β έχουμε τις $A\hat{B}Z$ και $Z\hat{B}\Delta$ με κορυφή το Δ έχουμε τις $\Gamma\hat{\Delta}Z$ και $Z\hat{\Delta}B$, με κορυφή το Ε έχουμε τις $Z\hat{E}A$ και $Z\hat{E}\Gamma$, τέλος με κορυφή το Ζ έχουμε τις διαδοχικές $A\hat{Z}B$, $B\hat{Z}\Delta$, $\Delta\hat{Z}E$ και $E\hat{Z}A$ που ανά δύο αποτελούν ζεύγη εφεξής γωνιών. (β) Με κορυφή το Α έχουμε τις $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$ με κορυφή το Γ έχουμε τις διαδοχικές $A\hat{\Gamma}B$, $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}y$ που ανά δύο αποτελούν ζεύγη εφεξής γωνιών. (γ) Με κορυφή το Ο έχουμε τις διαδοχικές $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$, και $z\hat{O}v$, που ανά δύο αποτελούν ζεύγη εφεξής γωνιών. (δ) Με κορυφή το Α έχουμε τις $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$, με κορυφή το Γ έχουμε τις διαδοχικές $A\hat{\Gamma}B$, $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}y$ που ανά δύο αποτελούν ζεύγη εφεξής γωνιών, με κορυφή το Δ έχουμε τις $A\hat{\Delta}B$ και $\Gamma\hat{\Delta}B$ και τέλος με κορυφή το Κ έχουμε τις διαδοχικές $A\hat{K}B$, $B\hat{K}\Gamma$, $\Gamma\hat{K}\Delta$ και $\Delta\hat{K}A$, που ανά δύο αποτελούν ζεύγη εφεξής γωνιών.

Β.1.8. Παραπληρωματικές & Συμπληρωματικές γωνίες - Κατακορυφήν γωνίες

2. Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε μια γωνία 125° και την παραπληρωματική της που είναι $180°-125°=55°$.
3. (α) Μια γωνία παραπληρωματική μιας αμβλείας, είναι οξεία γωνία (β) Μια γωνία παραπληρωματική μιας ορθής, είναι ορθή γωνία. (γ) Μια γωνία παραπληρωματική μιας οξείας, είναι αμβλεία.
4. Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε μια γωνία 35° και την συμπληρωματική της που είναι $90°-35°=55°$.
5. Με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι $\Gamma\hat{O}A=\Delta\hat{O}A$. Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}B$ είναι παραπληρωματικές, άρα έχουν άθροισμα 180°. Επομένως $\Gamma\hat{O}B=180°-\hat{\varphi}$. Αλλά και οι γωνίες $A\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}B$ είναι παραπληρωματικές, άρα έχουν άθροισμα 180°. Επομένως $\Delta\hat{O}B=180°-\hat{\varphi}$. Συνεπώς $\Gamma\hat{O}B=\Delta\hat{O}B$.
6.

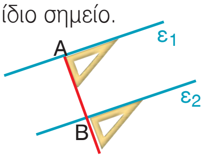
$\hat{\alpha}$	15°	18°	43°	77°	90°	116°	169°10′
$\hat{\beta}$	165°	162°	137°	103°	90°	64°	10°50′

7. Παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και 147° είναι παραπληρωματικές, επομένως θα είναι $\hat{\alpha}=180°-147°$, άρα $\hat{\alpha}=33°$. Το ίδιο και οι γωνίες $\hat{\beta}$ και 110°, οπότε έχουμε ότι $\hat{\beta}=180°-110°$, άρα $\hat{\beta}=70°$.
8. Με τη βοήθεια του μοιριγνωμονίου σχεδιάζουμε τη γωνία των 37°. Για να σχεδιάσουμε την κατακορυφήν της γωνίας φέρνουμε τις αντικειμενικές ημιευθείες των πλευρών της.
9. Τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών είναι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$, $\hat{\kappa}$ και $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$ και $\hat{v}$.
10. Η κατακόρυφήν της θα είναι και αυτή 57°. Η άλλη γωνία είναι παραπληρωματική της επομένως θα είναι $180°-57°=123°$.
11. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και 25° είναι κατακορυφήν, επομένως $\hat{\alpha}=25°$. Επίσης $\hat{\gamma}=90°$. Αλλά γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όλων είναι 360°, επομένως θα έχουμε $90°+25°+\hat{\beta}+90°+\hat{\delta}+25°=360°$, οπότε $\hat{\beta}+\hat{\delta}=360°-25°-25°-90°-90°$ συνεπώς, $2\hat{\beta}=130°$ άρα $\hat{\beta}=65°$ και $\hat{\delta}=65°$.

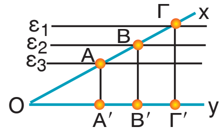
Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

3. (α) Και οι τρεις ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.
(β) Οι δύο είναι παράλληλες ενώ η τρίτη που τέμνει δεν είναι παράλληλη με καμμιά από αυτές και τις τέμνει.
(γ) Τέμνονται ανά δύο.
(δ) Διέρχονται και οι τρεις από το ίδιο σημείο.

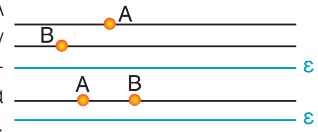
4. Με τον γνώμονα σχεδιάζουμε τις κάθετες ευθείες στα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.



5. Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 παράλληλες προς την Οy. Επομένως θα είναι: ΑΑ′// ΒΒ′// ΓΓ′// Οy.



6. Οι παράλληλες από Α και Β συμπίπτουν όταν τα σημεία Α και Β βρίσκονται σε μια ευθεία παράλληλη προς την ε.

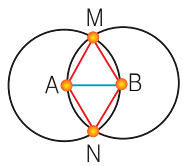


Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

2. Φέρνουμε την κάθετο ΑΒ στην ΓΒΔ, μετράμε με το υποδεκάμετρο τις ΑΓ και ΑΔ και βρίσκουμε ότι είναι ίσες με 5 cm.
3. Φέρνουμε την κάθετο ΑΒ στην ΓΒΔ, μετράμε με το υποδεκάμετρο τις ΑΓ και ΑΔ και βρίσκουμε ότι είναι άνισες και μάλιστα η μεγαλύτερη ΑΔ αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση ΔΒ και η μικρότερη ΑΓ στη μικρότερη ΒΓ.
4. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι είναι: Α′Β′=1,6 cm και Β′Γ′=1,6 cm.
5. Με τον γνώμονα και το υποδεκάμετρο βρίσκουμε τα σημεία Α,Β,Γ και Δ που απέχουν απόσταση 3,2 cm από την ε. Φέρνουμε από το καθένα παράλληλη προς την ε και παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις ευθείες που φέραμε συμπίπτουν σε μια.
6. Για να βρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε, σχεδιάζουμε σε διάφορες θέσεις τις αποστάσεις ΚΚ′, ΛΛ′, ΜΜ′, ΗΗ′, και ΘΘ′ μεταξύ των παραλλήλων ε_1 και ε_2 και βρίσκουμε τα μέσα τους. Από το ένα από αυτά, το Α, φέρνουμε παράλληλη ευθεία ε προς τις ε_1 και ε_2 και παρατηρούμε, ότι αυτή περνάει και από τα άλλα σημεία Β, Γ, Δ και Ε.
7. Προεκτείνουμε την ΒΑ κατα 1cm και φέρνουμε την παράλληλη προς την ε από αυτή την απόσταση, η οποία τέμνει την Αx στο σημείο Γ που είναι το ζητούμενο.

Β.1.11. Κύκλος και στοιχεία κύκλου

1. Με τον διαβήτη χαράσσουμε τους τρεις κύκλους με κέντρο το σημείο Μ και ακτίνες 2,4cm, 2cm και 15mm.
2. Για να σχεδιάσουμε τον κύκλο με διάμετρο ΑΒ πρέπει να βρούμε το κέντρο του που είναι το μέσο Ο της ΑΒ και η ακτίνα είναι το μισό του μήκους της ΑΒ δηλαδή 1,9cm.
3. Οι ακτίνες των ζητουμένων κύκλων θα είναι τα μισά μήκη των διαμέτρων, δηλαδή 2cm, 2,5cm και 24mm.
4. Σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα 3,4cm και ορίζουμε ένα σημείο του Μ. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρο το Μ και ακτίνες τα μήκη των χορδών 2,4cm και 4,1cm οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο (Κ,3,4cm) ο καθένας σε δύο σημεία Α και Α′, Β και Β′. Οι ζητούμενες χορδές είναι ΜΑ και ΜΑ′ (δύο λύσεις) και ΜΒ και ΜΒ′ (δύο λύσεις).
5. Γράφουμε τους κύκλους (Α, 3cm) και (Β, 2cm), που τέμνονται στα σημεία Κ και Λ. Τότε, αυτά τα σημεία απέχουν ταυτόχρονα 3cm από το Α και 2cm από το Β.
6. Επειδή το σημείο Μ είναι σημείο τομής των δύο κύκλων ανήκει ταυτόχρονα και στους δύο κύκλους επομένως η απόστασή του από το κέντρο των κύκλων ισούται με την ακτίνα του καθενός και επειδή οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες θα είναι ΜΑ=ΜΒ. Ομοίως και για το σημείο Ν θα έχουμε ΝΑ=ΝΒ.



Β.1.12. Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου - Μέτρηση τόξου

1. (α) 360°, (β) 180°, (γ) 90°.
2. Δύο των 60° και δύο των 120°.
3. Όχι, διότι ενώ έχουν το ίδιο μέτρο δεν ανήκουν σε ίσους κύκλους.
4. Αφού τα τόξα είναι ίσα θα είναι και οι επίκεντρες γωνίες ίσες, άρα θα είναι 360°: 6=60°.
5. Η επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ είναι 60° και αντιστοιχεί στο 60°: 360°= $\frac{1}{6}$ του κύκλου.
6. Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{A}$ είναι περίπου 70°, ενώ η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι περίπου 40°.

Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

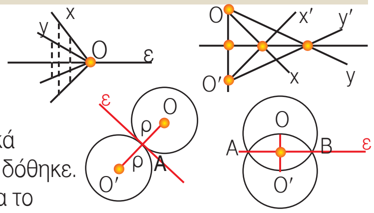
1. Σχεδιάζουμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Παίρνουμε ένα σημείο Μ πάνω στην ε_1 και με κέντρο το Μ και ακτίνα 3,6cm γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε_2 σε δύο σημεία Α και Β. Τα σημεία Α και Β είναι τα ζητούμενα.
2. Οι εφαπτόμενες του κύκλου ε_1 και ε_2 είναι κάθετες στην ΑΒ άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες.
3. (α) Γνωρίζουμε ότι η απόσταση δ=4cm του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα του ρ=5cm, η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, (β) όταν η απόσταση δ=2,5cm είναι ίση με την ακτίνα ρ=2,5cm, τότε η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο και έχει μαζί του ένα κοινό σημείο, το σημείο επαφής και (γ) όταν είναι δ=6cm >ρ=3cm, τότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
4. Το κέντρο Κ των κύκλων απέχει από την ευθεία ε_2 απόσταση ΚΑ=3,1cm. Επομένως ο κύκλος με ακτίνα ρ=2,1cm δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ε_2. Ο κύκλος με ακτίνα ρ=3,1cm έχει ένα κοινό σημείο με την ε_2, άρα εφάπτεται σ' αυτήν. Κι ο κύκλος με ακτίνα ρ=3,6cm έχει δύο κοινά σημεία με την ε_2, άρα τέμνονται.
5. Το σημείο Μ είναι αφενός σημείο του κύκλου (Α, 18mm) και αφετέρου του κύκλου (Β, 22mm). Επομένως, η κάθετη στην ΑΒ ευθεία ε, είναι κάθετη ταυτόχρονα στις άκρες των ακτίνων των δύο κύκλων άρα εφαπτόμενη και στους δύο.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Μέρος Β′ Κεφάλαιο 2ο Συμμετρία

Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα



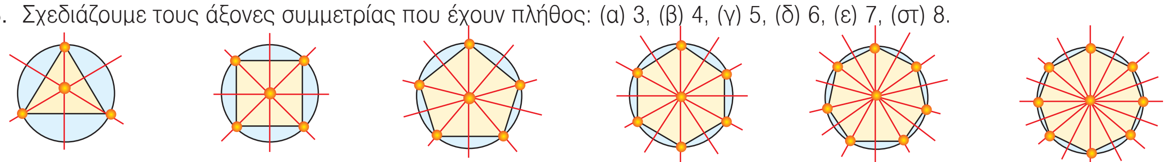
1. (α) Επειδή το Ο ανήκει στην ε έχει συμμετρικό τον εαυτό του επομένως αρκεί να πάρουμε ένα σημείο σε κάθε πλευρά της γωνίας και να βρούμε τα συμμετρικά τους. (β) Αντιθέτως εδώ βρίσκουμε το Ο′ συμμετρικό του Ο και τα άλλα δύο σημεία είναι αυτά που τέμνει η ε τις πλευρές της γωνίας.
2. Και στις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε το Ο′ συμμετρικό του Ο. Επειδή τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα η ακτίνα του συμμετρικού κύκλου είναι η ίδια με του κύκλου που δόθηκε.
3. Σχεδιάζουμε αρχικά το συμμετρικό Σ′ του σχήματος Σ ως προς την ε και στη συνέχεια το συμμετρικό Σ′′ του Σ′ ως προς την ε′ και παρατηρούμε ότι όχι μόνο είναι ίσο με το αρχικό αλλά και ομοίως κείμενο.

Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

2.

ΑΡ.ΑΞΟΝ. ΣΥΜ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
0		x	x			x				x			x				x							
1	x			x	x						x	x				x		x	x	x			x	x
2							x	x	x					x	x						x	x		

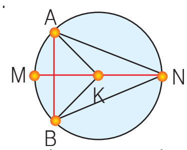
3. Σχεδιάζουμε τους άξονες συμμετρίας που έχουν πλήθος: (α) 3, (β) 4, (γ) 5, (δ) 6, (ε) 7, (στ) 8.



4. Ο άξονας συμμετρίας δύο ίσων και τεμνόμενων κύκλων είναι: (α) η ευθεία της κοινής χορδής και (β) η διάκεντρος (η ευθεία που ενώνει τα κέντρα και των δύο κύκλων).
5. (α) Όταν είναι ομόκεντροι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κοινό κέντρο είναι άξονας συμμετρίας. (β) Όταν έχουν διαφορετικά κέντρα άξονας συμμετρίας είναι η διάκεντρός τους..

Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

2. Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη την μεσοκάθετο του ΑΒ και βρίσκουμε το μέσο του Δ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις μεσοκάθετες των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ και ΔΒ και βρίσκουμε τα μέσα τους.
3. Η μεσοκάθετος της ΚΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Αυτά είναι τα ζητούμενα σημεία.
4. Για να απέχει εξίσου η στάση πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο της απόστασης των δύο οικισμών Α και Β.
5. Για να απέχει εξίσου πρέπει να βρίσκεται στη μεσοκάθετο της απόστασης των δύο χωριών Α και Β.
6. Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τις μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου.
7. (α) Συγκρίνουμε τα ΜΑ και ΜΒ και βρίσκουμε ότι είναι ίσα. Αλλά το Μ είναι το σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ επομένως ισαπέχει από τα άκρα του, άρα ΜΑ=ΜΒ. (β) Ομοίως και το Ν είναι σημείο της μεσοκαθέτου, άρα ΝΑ=ΝΒ. (γ) Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του κύκλου άρα ΚΑ=ΚΒ. Δηλαδή, το Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ.



8. Διέρχονται από το κέντρο Κ του κύκλου.
9. Η τομή της μεσοκαθέτου του ΑΒ και της ε είναι το ζητούμενο σημείο.

Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

1. Έστω ότι τα συμμετρικά των Β και Γ είναι τα Β′ και Γ′ τότε το ΒΓ θα έχει συμμετρικό το Β′Γ′ άρα τα ΒΓ και Β′Γ′ είναι ίσα και τα μέσα τους, ως αντίστοιχα στοιχεία θα είναι μεταξύ τους συμμετρικά. Αλλά το συμμετρικό του Μ, ως προς το Α, είναι το Μ′ και επειδή το Β′Γ′ έχει ένα μέσο συνεπάγεται ότι αυτό θα είναι το αντίστοιχο του Β′Γ′ δηλαδή το συμμετρικό του Μ.
2. Το Ο είναι μέσον της ΒΔ δηλαδή ΟΒ=ΟΔ. Τα Α και Γ είναι συμμετρικά ως προς το Ο επομένως θα είναι ΑΟ=ΟΓ. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

1.

ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
0	x	x	x	x	x					x	x	x				x	x	x	x	x			x	x
1						x	x	x	x				x	x	x						x	x		

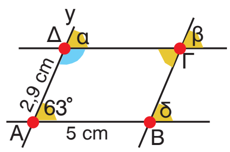
2. Τα δύο πρώτα δεν έχουν κέντρο συμμετρίας. Από τα τραπουλόχαρτα έχουν η ντάμα, το 8 κούπα και το 8 καρό.

3.

	Άξονες Συμμετρίας						
	Κανένα	Ένα	Δύο	Τρεις	Τέσσερις	Περισσότερους	Έχει κέντρο συμμετρίας
Ευθύγραμμο τμήμα			x				x
Ισοσκελές τρίγωνο		x					
Ισόπλευρο τρίγωνο				x			
Παραλληλόγραμμο	x						x
Ορθογώνιο			x				x
Ρόμβος			x				x
Τετράγωνο					x		x
Κύκλος						x	x

Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

1. Έστω $\hat{\alpha}=12^\circ$. Η γωνία $\hat{\alpha}$ και όλες οι οξείες γωνίες του σχήματος είναι ίσες με 12°. Η παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$, έστω η γωνία $\hat{\gamma}$ θα είναι ίση με $180^\circ-\hat{\alpha}=180^\circ-12^\circ=168^\circ$. Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και όλες οι αμβλείες γωνίες του σχήματος είναι ίσες με 168°.
2. $\hat{\beta}=\hat{\gamma}=70^\circ$ ως εντός–εκτός και επί τα αυτά των $\varepsilon_3//\varepsilon_4$ τεμνομένων από ε_2.
   $\hat{\beta}=\hat{\zeta}=70^\circ$ ως εντός–εκτός και επί τα αυτά των $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ τεμνομένων από ε_3.
   $\hat{\zeta}+\hat{\varepsilon}=180^\circ$ ως εντός–εκτός και επί τα αυτά των $\varepsilon_3//\varepsilon_4$ τεμνομένων από ε_1, άρα $\hat{\varepsilon}=180^\circ-\hat{\zeta}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.
   $\hat{\alpha}+\hat{\delta}=180^\circ$ ως εντός–εκτός εναλλάξ των $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ τεμνομένων από ε_5, άρα $\hat{\delta}=180^\circ-\hat{\alpha}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.
3. Θα έχουμε ότι $\hat{\alpha}=\hat{A}=63^\circ$ επειδή είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά των ΑΒ//ΔΓ τεμνομένων από την ΑΔ. Άρα $\hat{\Delta}=180^\circ-\hat{\alpha}=180^\circ-63^\circ=117^\circ$. Επίσης είναι $\hat{\beta}=\hat{\alpha}=63^\circ$ επειδή είναι εντός-εκτός και επί τα αυτά των ΒΓ//ΑΔ τεμνομένων από την ΔΓ. Άρα $\hat{\Gamma}=\hat{\beta}=63^\circ$ αφού είναι κατακορυφήν. Έχουμε και $\hat{\delta}=\hat{\beta}=63^\circ$ γιατί είναι πάλι εντός-εκτός και επί τα αυτά των ΑΒ//ΔΓ τεμνομένων από την ΒΓ. Άρα $\hat{B}=180^\circ-\hat{\delta}=180^\circ-63^\circ=117^\circ$.



4. Αφού η δ_2 είναι διχοτόμος θα είναι: $2\hat{\varphi}=56^\circ$, διότι είναι εντός εναλλάξ των $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ τεμνομένων από την ΑΒ. Άρα $\hat{\varphi}=28^\circ$. Όμως $\hat{\varphi}=\hat{\alpha}=28^\circ$, ως εντός εναλλάξ των $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ τεμνομένων από την δ_2. Επειδή $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν γωνίες θα είναι $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}=28^\circ$. Τέλος οι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι $\hat{\beta}=180^\circ-\hat{\alpha}=180^\circ-28^\circ=152^\circ$.
5. Έχουμε $\hat{\varphi}+116^\circ=180^\circ$ διότι είναι εντός και επί τα αυτά των $\varepsilon_1//\varepsilon_2$ τεμνομένων από την ε_3, άρα είναι: $\hat{\varphi}=180^\circ-116^\circ=64^\circ$. Αλλά έχουμε $\hat{\varphi}=\hat{\beta}=64^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των $\varepsilon_3//\varepsilon_4$ τεμνομένων από την ε_2. Τέλος είναι $\hat{\alpha}=180^\circ-\hat{\beta}=116^\circ$.
6. Είναι $\hat{\omega}=30^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΑΔ//ΒΓ τεμνομένων από ΒΔ. Επίσης $\hat{\theta}=105^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΑΔ//ΒΓ τεμνομένων από ΓΔ. Είναι όμως $\hat{\alpha}=\hat{\theta}=105^\circ$ ως εντός-εκτός και επί τα αυτά των ΑΒ//ΔΓ τεμνομένων από ΑΔ. Αλλά έχουμε και $\hat{\theta}+(\hat{\omega}+\hat{\varphi})=180^\circ$ επομένως $105^\circ+30^\circ+\hat{\varphi}=180^\circ$ άρα $\hat{\varphi}=45^\circ$. Είναι όμως $\hat{\gamma}=\hat{\varphi}=45^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΓΔ//ΑΒ τεμνομένων από ΒΔ. Τέλος $\hat{\varepsilon}=75^\circ$.

Μέρος Β' Κεφάλαιο 3ο - Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

1. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Σ, (ε) Λ, (στ) Σ, (ζ) Σ, (η) Λ.
2. Έχουμε ότι ΒΚ=ΚΜ, ΜΛ=ΛΓ και ΒΜ=ΜΓ οπότε ΒΚ=ΚΜ=ΜΛ=ΛΓ=1,1cm.
3. ΔΜ=ΜΖ
4. ΑΡ=ΡΒ.
5. ΑΝ=ΝΓ.

Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

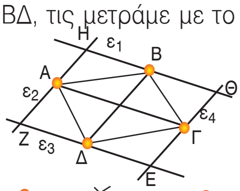
1. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Λ, (δ) Λ, (ε) Σ, (στ) Λ, (ζ) Σ, (η) Σ, (θ) Λ.
2. Σχεδιάζουμε τμήμα ΒΓ και φέρνουμε από το Β την ημιευθεία Βx έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{B}=75^\circ$. Μετά από το Γ φέρνουμε την ημιευθεία Γy έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{\Gamma}=35^\circ$. Έστω Α το σημείο που τέμνονται οι ημιευθείες Βx και Γy. Όμως $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ άρα είναι $\hat{A}=180^\circ-75^\circ-35^\circ=70^\circ$.
3. Σχεδιάζουμε τμήμα ΑΒ=4,2cm και φέρνουμε από το Β την ημιευθεία Βx έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{B}=60^\circ$. Μετά από το Α φέρνουμε την ημιευθεία Αy έτσι, ώστε να σχηματιστεί γωνία $\hat{A}=90^\circ$. Ονομάζουμε Γ το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ημευθείες Βx και Αy. Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Όμως $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ άρα είναι $\hat{\Gamma}=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Μετράμε την πλευρά ΒΓ και βρίσκουμε ότι είναι: ΒΓ=2,1 cm.
4. Είναι $\hat{\alpha}=52^\circ$ και $\hat{\varphi}=48^\circ$(κατακορυφήν). Έχουμε $\hat{\delta}=\hat{\varphi}=48^\circ$ γιατί είναι εντός εναλλάξ των $\varepsilon_1///\varepsilon_2$ τεμνομένων από δ_1. Γνωρίζουμε ότι είναι $\hat{\alpha}+\hat{\delta}+\hat{\gamma}=180^\circ$, άρα $\hat{\gamma}=180^\circ-52^\circ-48^\circ=80^\circ$. Τότε όμως θα είναι $\hat{\beta}=\hat{\gamma}=80^\circ$(κατακορυφήν).
5. (α) Έχουμε $\hat{\varphi}+35^\circ+72^\circ=180^\circ$, οπότε $\hat{\varphi}=73^\circ$. (β) Έχουμε $\hat{\varphi}+35^\circ+(180^\circ-102^\circ)=180^\circ$, οπότε $\hat{\varphi}=67^\circ$.
6. Φέρνουμε Εx//ΓΔ//ΑΒ, οπότε $\hat{\theta}=40^\circ$ και $\hat{\varphi}=42^\circ$ (εντός εναλλάξ). Επομένως $\hat{\omega}=\hat{\theta}+\hat{\varphi}=40^\circ+42^\circ=82^\circ$.
7. Έχουμε ότι $74^\circ+2x=180^\circ$, οπότε $2x=180^\circ-74^\circ$ άρα $2x=106^\circ$, επομένως $x=53^\circ$. Δηλαδή, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι 53° η καθεμιά.
8. Θα έχουμε ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, επομένως $36^\circ+2\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, συνεπώς $3\hat{\Gamma}=180^\circ-36^\circ$, άρα $\hat{\Gamma}=48^\circ$ και $\hat{B}=96^\circ$.
9. Γνωρίζουμε ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, επομένως $2\hat{B}+\hat{B}+3\hat{B}=180^\circ$, συνεπώς $6\hat{B}=180^\circ$ άρα $\hat{B}=30^\circ$, δηλαδή $\hat{\Gamma}=90^\circ$ και $\hat{A}=60^\circ$.
10. Καθένα από τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ και ΟΔΑ έχει άθροισμα γωνιών 180°.
    Επομένως, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=4\cdot180^\circ=720^\circ$. Αλλά $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=360^\circ$.
    Επομένως $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+360^\circ=720^\circ$. Άρα $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=720^\circ-360^\circ=360^\circ$.

Β.3.3. Παραλληλόγραμμο-Ορθογώνιο-Ρόμβος-Τετράγωνο-Τραπέζιο-Ισοσκελές τραπέζιο

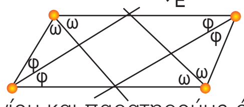
1. (α) Σ, (β) Λ, (γ) Σ, (δ) Λ, (ε) Λ.
2. Τέσσερα.
3. Ρόμβο και τετράγωνο.
4. Ορθογώνιο και πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Β.3.4. Ιδιότητες παραλληλογράμμου-ορθογωνίου-ρόμβου-τετραγώνου-τραπεζίου-ισοσκελούς τραπεζίου

1. Με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι: (α) Στο ορθογώνιο υπάρχουν τέσσερα ίσα τρίγωνα που περιλαμβάνει το καθένα από δύο πλευρές του ορθογωνίου και δύο ζεύγη ίσων τριγώνων στα οποία το καθένα τρίγωνο περιλαμβάνει μία πλευρά του. (β) Στο ρόμβο υπάρχουν τέσσερα ίσα τρίγωνα που το καθένα περιλαμβάνει από μία πλευρά του ρόμβου και δύο ζεύγη ίσων τριγώνων που το καθένα τρίγωνο περιλαμβάνει δύο πλευρές του.(γ) Στο τετράγωνο υπάρχουν δύο τετράδες ίσων μεταξύ τους τριγώνων.
2. Διότι όλες οι κορυφές του απέχουν ίση απόσταση από το κέντρο του κύκλου.
3. Φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΑ′ και ΓΓ′ των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα από την ευθεία ΒΔ, τις μετράμε με το υποδεκάμετρο και παρατηρούμε ότι είναι ίσες.
4. Σχεδιάζουμε τις παράλληλες $ε_1$ και $ε_3$ προς την ΑΓ, άρα θα είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Ομοίως και $ε_2$ και $ε_4$ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες διότι είναι οι δύο παράλληλες προς την ΒΔ. Παρατηρούμε ότι είναι παραλληλόγραμμο το σχήμα που φτιάχνουν οι $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, και $ε_4$.



5. Με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών ενός παραλληλογράμμου και παρατηρούμε ότι αυτές τεμνόμενες σχηματίζουν ένα ορθόγωνιο παραλληλόγραμμο.



6. Με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ορθογωνίου και παρατηρούμε ότι αυτές τεμνόμενες σχηματίζουν ένα τετράγωνο. (α) Με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών ενός τετραγώνου και παρατηρούμε ότι αυτές είναι οι διαγώνιές του. (β) Με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ρόμβου και παρατηρούμε ότι αυτές είναι οι διαγώνιές του.
7. Είναι ίσα, ως απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών.
8. Το ΑΟΒΚ είναι ρόμβος, επομένως οι διαγώνιες αυτού διχοτομούνται καθέτως. Είναι ίσες.
9. (α) Επειδή ΑΒ⊥ΒΓ και ΔΓ⊥ΒΓ θα είναι ΑΒ//ΔΓ και επειδή ΑΔ⊥ΑΒ και ΒΓ⊥ΑΒ θα είναι ΑΔ//ΒΓ. Επομένως είναι ΓΔ=ΑΒ=3cm ως απόσταση μεταξύ των ΑΔ//ΒΓ, αλλά και ΑΔ=ΒΓ=4cm ως απόσταση μεταξύ των ΑΒ//ΔΓ. Παρατηρούμε, ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες. (β) Μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε ΒΔ=ΑΓ=5cm.

Απαντήσεις στις Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α.

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΖΕΥΓΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ	ΣΧΕΣΗ	
ΠΑΡΑΛ. ΕΥΘ. ΤΕΜΝ. ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ	ΙΣΕΣ	ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ
‘‘ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ’’	Χ	
‘‘ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ’’	Χ	
‘‘ΕΝΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ’’		Χ
‘‘ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ’’		Χ
‘‘ΕΝΤΟΣ-ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ’’		Χ
‘‘ΕΝΤΟΣ-ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ’’	Χ	

Γ.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ													
ΣΧΗΜΑΤΑ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Έχει κέντρο συμ/τρίας
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ			x											x
ΓΩΝΙΑ		x												
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ			x											x
ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ ΓΩΝΙΕΣ	x													x
ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ	x													
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ		x												
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ				x										
ΤΡΑΠΕΖΙΟ	x													
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ		x												
ΤΥΧΑΙΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ	x													
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	x													x
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ			x											x
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ					x									x
ΡΟΜΒΟΣ			x											x

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

Αλφαβητικό ευρετήριο όρων

Κωδικός βιβλίου: 0-21-0027
ISBN 978-960-06-2670-4

ΙΤΥΕ "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο τεχνολογιας υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 21 0027 2