

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

1. Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί. Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

.	. .	. . .		...
1	3	6	10	...

- α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.
 γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_2=0$ και $a_4=4$.
 α) Να δείξετε ότι $\omega=2$ και $a_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και a_1 ο πρώτος όρος της.
 β) Να δείξετε ότι ο ν-οστός όρος είναι ο $a_n=2n-4$ και να βρείτε ποιος όρος της είναι το 98.
3. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.
 α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.
 β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
 γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;
4. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι $a_1=19$ και $a_{10}-a_6=24$.
 α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$.
 β) Να βρείτε τον a_{20} .
 γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
5. Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$ και $\Gamma=x+8$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (a_n) .
 α) Να βρείτε τη τιμή του x .
 β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) :
 i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .
 ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.
6. Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_1=2$ και $a_{25}=a_{12}+39$.
 α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$.
 β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.
7. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .
 α) Να δείξετε ότι $\frac{a_{15}-a_9}{a_{10}-a_7}=2$.
 β) Αν $a_{15}-a_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

8. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) με διαφορά $\omega=4$, ισχύει $a_6+a_{11}=40$.
α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
9. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .
α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$.
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.
10. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1=2$ και $a_5=14$.
α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$.
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77; (Δίνεται $\sqrt{1849}=43$).
11. α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\dots,n$.
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.
12. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \dots$
α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.
ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .
13. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$ και $x^2=9$.
β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:
i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (a_n) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω .
ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_n) .
14. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει: $a_4-a_2=10$.
α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$.
β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.
15. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8. α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
β) Αν είναι $\omega=3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.
16. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^η σειρά έχει 36 καθίσματα.
α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

17. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται $\alpha_1=41$ και $\alpha_6=26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n=n$.

18. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x+2$, $x+1$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Για $x=-1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

19. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-2x-3=0$, (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

20. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

21. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης.

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

22. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=x$, $\alpha_2=2x^2-3x-4$, $\alpha_3=x^2-2$, $x \in \mathbb{Z}$, τότε:

α) Να αποδειχθεί ότι $x=3$.

β) Να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\dots+\alpha_{15}$.

23. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το όρο αυτής της προόδου.

Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

24. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

25. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος

26. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_2=k^2$ και $a_3=(k+1)^2$, k ακέραιος με $k>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό k και να αποδείξετε ότι $\omega=7$.

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

27. Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x .

β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

28. Οι αριθμοί: x^2+5 , x^2+x , $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii) Το άθροισμα $S=a_{15}+a_{16}+a_{17}+\dots+a_{24}$.

29. Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , είναι $a_3=8$ και $a_8=23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $a_1=2$ και η διαφορά $\omega=3$.

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=(a_1+1)+(a_2+2)+(a_3+3)+\dots+(a_{31}+31)$.

30. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3=10$ και $a_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) ,

τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

31. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

32. Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι

$$a_1+a_2+\dots+a_n=S_n=2n^2+3n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

β) Να αποδείξετε ότι $S_{v-1}=2v^2-v-1$, $v \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $a_v=4v+1$, $v \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

33. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_v=\beta_{8-v}$, για κάθε $v=1, 2, \dots, 7$.

34. Δίνεται η ακολουθία (α_v) με γενικό τύπο $\alpha_v=10+3v$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_v) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

35. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_v το πλήθος των καθισμάτων της v -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

36. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_v), $v \in \mathbb{N}^*$ με $a_3=8$ και $a_{11}=32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_v), $v \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $a_1=2$ και $\omega=3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των $2v$ πρώτων όρων της (α_v) είναι ίσο με το άθροισμα των v πρώτων όρων της (β_v) να βρείτε τον αριθμό v .

37. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων: ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (a_n) με $a_1=5$ και να βρείτε τη διαφορά της.
β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β.
γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

38. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 €, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 €. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_n).

- α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $a_n=107n+1210$, (1).
β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία:
i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).
ii. της διαφοράς $\omega=107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.
γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

39. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;
β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;
δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

40. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά $\omega=3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta=[2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (a_n):

- α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (a_n).
β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (a_n) που υπάρχουν στο $\Delta=[2,8]$.
γ) Αν $a_6=14$:

- i. να βρείτε τον a_1 .
ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (a_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Δίνεται $\sqrt{4489}=67$).

41. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

42. Δίνονται οι αριθμοί $1-x$, $\frac{x}{2}$, $2x-1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.

43. α) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί x , $2x+1$, $5x+4$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρική προόδου.

β) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$.

44. α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

45. Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

46. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε: i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

47. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

48. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι $\alpha_n = 2^{n-3}$.

49.α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2$, k , $2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

50. Δίνεται μια πρόοδος (a_n) με πρώτους όρους 2 , $2\sqrt{2}$, 4 , $4\sqrt{2}$, ...

α) Να εξετάσετε αν η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η (a_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

51. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$, **(1)**, με $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** έχει ρίζες: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της **(1)**, να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , β , x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

52. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$, **(1)**.

β) Αν x_1 , x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης **(1)**, να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , 1 , x_2 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

53. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.;

54. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

55. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii) Να βρείτε το ποσό b_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

56. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών a , b και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί a , E , b , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

β) Αν $E=1$ και $a+b=10$:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες a και b .

ii) Να βρείτε τις διαστάσεις a και b του ορθογωνίου.

57. Δίνονται οι αριθμοί 2, x , 8 με $x>0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (a_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (b_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (a_n) .

ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (a_n) να ισχύει: $2(S_n+24)=b_7$.

58. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $a_3=4$, $a_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $(\beta_n) = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική

πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και

(β_n) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

59. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$,

να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

60. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3})^7$.

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της

γεωμετρικής προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

61. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:

α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου

έχει μήκος x , να αποδείξετε

ότι η διαγώνιός του δ έχει

μήκος $\delta = x\sqrt{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά

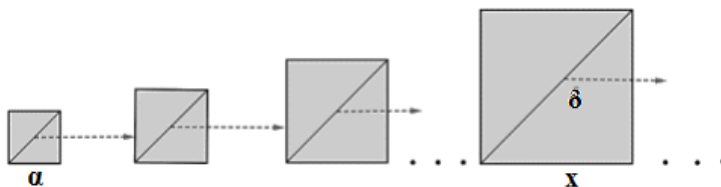
των διαδοχικών τετραγώνων

είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = a^2 \cdot 2^{n-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.



62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\mu x-2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι αριθμοί $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, ενώ ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ .

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

63. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$.

64. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

65. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει $a_4 - a_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

66. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1=1$ και $a_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $a_n > 30$.

67. Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_4 - a_9 = 15$ και $a_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $a_n = n$.

68. Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1m, με τον ακόλουθο τρόπο. Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1^ο λεπτό προχωράει 1cm, το 2^ο λεπτό προχωράει 3cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2cm μεγαλύτερη από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο a_n αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο. Το 1^ο λεπτό προχωράει 1cm, το 2^ο λεπτό προχωράει 2cm, το 3^ο λεπτό προχωράει 4cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διάνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο b_n αυτής της προόδου.

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1cm.

69. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $a_{20} - a_{10} = 10\omega$.

β) Αν $a_{20} - a_{10} = 30$ και $a_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $a_n = 3n - 2$.

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;