

ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

34393. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH=\Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ , η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

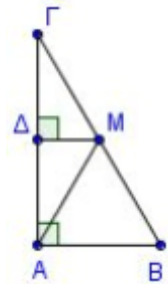
β) Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Z .

34406. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $B\Gamma=8\text{cm}$. Έστω AM είναι διάμεσος του

τρίγωνου και $M\Delta\perp A\Gamma$. Αν η γωνία $AM\Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB=4\text{cm}$.

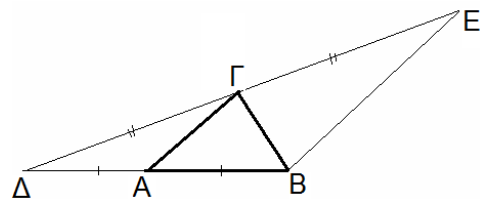
β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.



34411. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB=A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma=\Gamma E$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

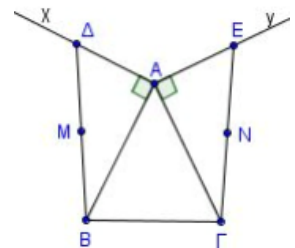
β) Να δείξετε ότι $BE\parallel A\Gamma$ και $A\Gamma=\frac{BE}{2}$.



34420. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax\perp AB$ και $Ay\perp A\Gamma$. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.

β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

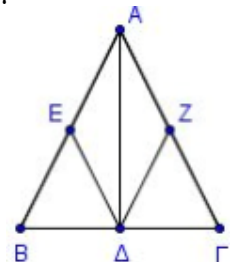


34492. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.



34495. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\Gamma = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος AD και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

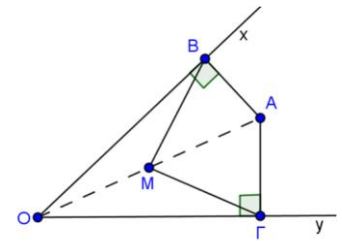
α) Να αποδείξετε ότι: $Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα DE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

34515. Δίνεται γωνία xOy και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , $A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) $\widehat{BM\Gamma} = 2 \cdot xOy$.

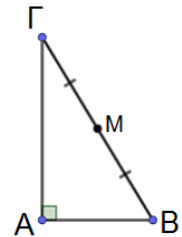


36086. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε τη γωνία $AM\Gamma$.

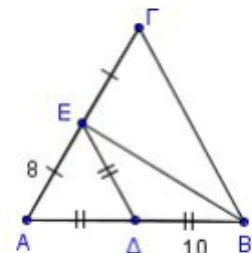


36093. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

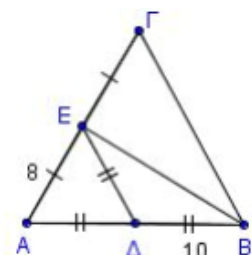


1615. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

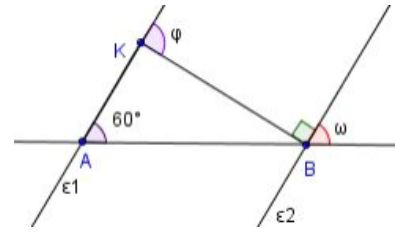


36097. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB=6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

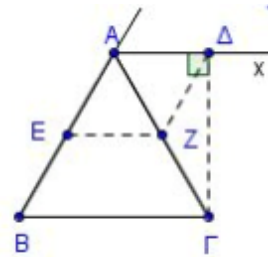
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.



36103. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας A και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



36109. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

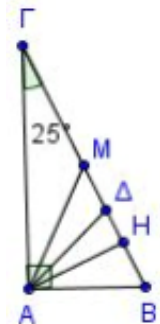
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2 \text{ cm}$ να βρείτε το μήκος της AB .

36111. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB , HAB και $A\Delta B$.

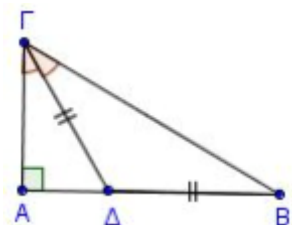
β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{H} = 20^\circ$.



36116. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2 \text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

β) $AB = 3 \text{ cm}$.



36169. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

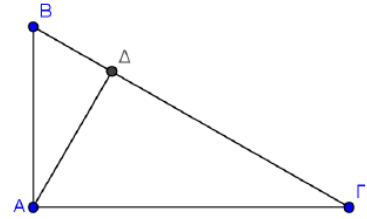
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

36171. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία BAD .

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

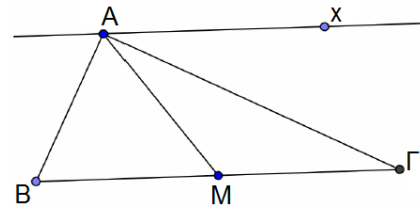


1655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{MAG} = \hat{MGA}$

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .



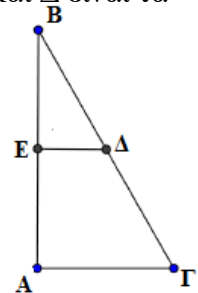
36342. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma = \dots$

β) $B\Gamma = \dots$

γ) $A\Delta = \dots$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

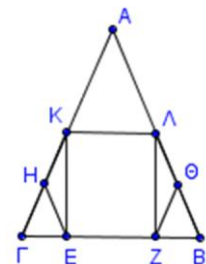


36343. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AB και $A\Gamma$

αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

β) $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα.



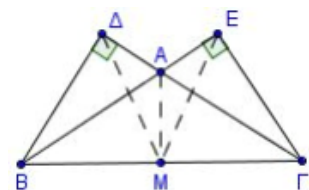
36350. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία ΔME .

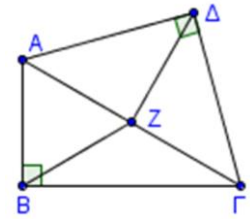


36355. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}=90^\circ$ και Z το μέσο του AG .
Με υποτείνουσα το AG

κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\hat{\Delta}=90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

β) Αν $\hat{A\Gamma B}=30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $BA\Delta$ και $B\Gamma\Delta$.



37006. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες B και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες,

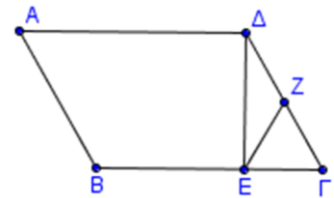
β) $AM\Delta = 2 \cdot \Gamma$.

37007. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B}=60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$.

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$,

γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.



37107. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B}=120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.
Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ=AK$.

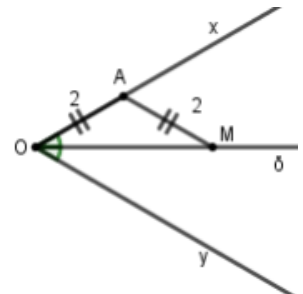
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$.

13653. Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y=60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO=2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Od της γωνίας xOy και θεωρούμε σημείο M στην Od , τέτοιο ώστε $AM=AO$.
Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta O\gamma$.

β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM .

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .



13831. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A}=90^\circ$.

- α)** Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;
- β)** Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο **α)** ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:
- Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία B και πόσες η γωνία Γ ;
 - Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

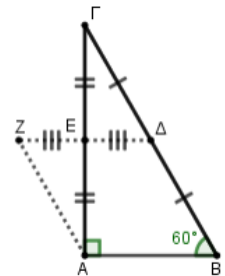
37106. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$.
- β)** η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$.

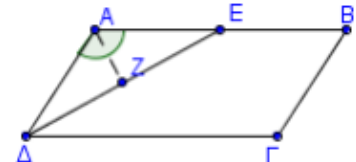
Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.
- β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.



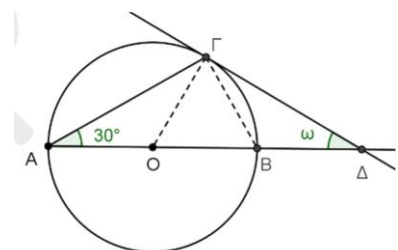
14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $A=120^\circ$ και $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη ΔE . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $\hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ$.
- β)** $AZ = \frac{AB}{4}$.



34313. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB , και χορδή του $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) σε σημείο Δ .

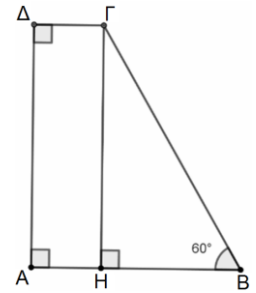
- α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\Gamma O\Delta$.
- β)** Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω .
- γ)** Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$.



34408. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 60^\circ$ και $\Gamma H \perp AB$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $HB = 2\Delta\Gamma$.

β) το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2} HB$.



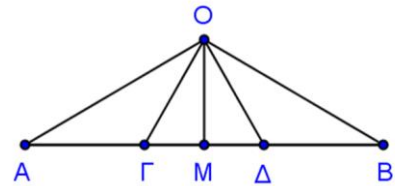
37075. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma O\Delta} = 60^\circ$.

ii. οι γωνίες $\hat{O\Delta\Gamma} = \hat{O\Gamma\Delta} = 30^\circ$.

β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.



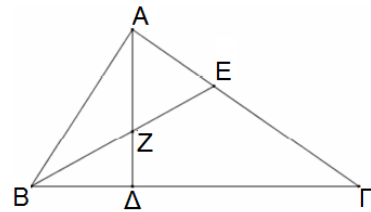
37082. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$.

ii. $AD = \frac{3}{2} BZ$.

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

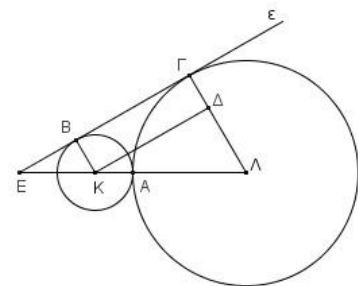


37088. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ϵ εφάπτεται εξωτερικά και στους δυο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ϵ που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $E\Lambda = 6\rho$.



1737. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$, ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N είναι το σημείο τομής του HE με την πλευρά $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

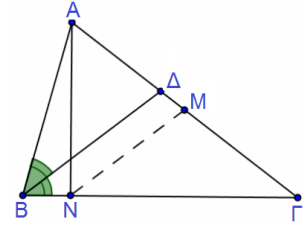
α) $AH = A\Delta = AE$.

β) Η γωνία $\hat{EHD}$ είναι ορθή.

γ) Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

1738. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος BD της γωνίας B . Από το μέσο M της AG φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο BD που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $BD\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ) $AN \perp B\Gamma$.

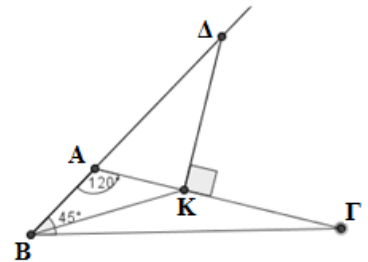


1759. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB=2AD$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.
- β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.
- γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $ZH\Gamma$.

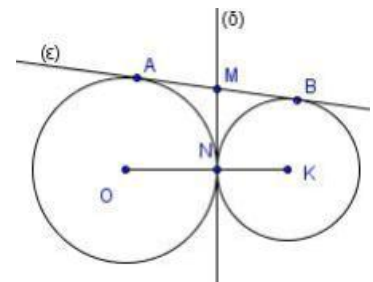
1761. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $A=120^\circ$ και γωνία $B=45^\circ$. Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $AD=2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην AG που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία ΔK είναι ίση με 30° .
- β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.
- γ) Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $ZKB=90^\circ$.
- δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$.



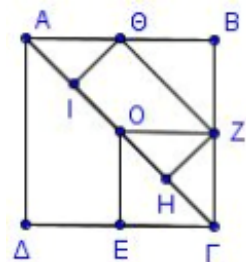
1771. Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία ϵ εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ϵ στο M . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το M είναι μέσο του AB .
- β) $\hat{OMK} = 90^\circ$.
- γ) $\hat{ANB} = 90^\circ$.



1781. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο AG θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI=IO=OH=HG$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.
- β) $ZH = \frac{AG}{4}$.
- γ) Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2OI$.



1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B}\hat{A}M$.

β) $\hat{A}\hat{\Delta}H = \hat{\Delta}\hat{A}H$.

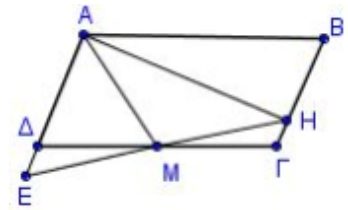
γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB .

β) Τα τμήματα EH , $\Delta\Gamma$ διχοτομούνται.

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta}\hat{M}A$.

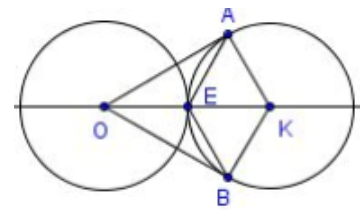


1796. Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

α) $AE=BE$.

β) $\hat{A}\hat{O}K = 30^\circ$.

γ) Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος.



1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda=AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K=A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Delta=\Lambda E$.

β) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.

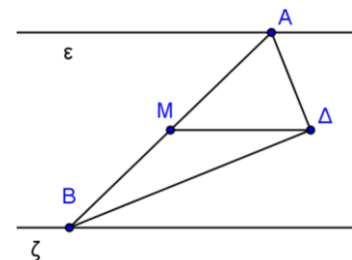
γ) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

1811. Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ) , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ . Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}\hat{\Delta}A = 90^\circ$.

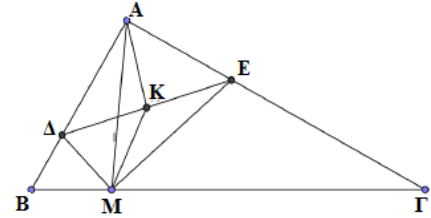
β) $\hat{B}\hat{M}\Delta = 2 \cdot \hat{M}\hat{\Delta}A$.

γ) $M\Delta \parallel \epsilon$.



1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

- α)** Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.
β) Αν K το μέσον του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK=KA$.

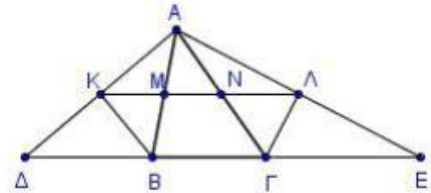


1824. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta=AB$, ενώ στη προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ , θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E=A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$.

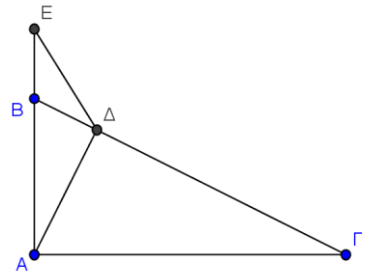


37100. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE=B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$. **ii.** $AE = \Gamma\Delta$.



37101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με τις γωνίες B και Γ οξείες και Δ , M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε

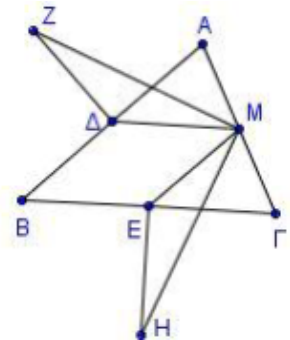
σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

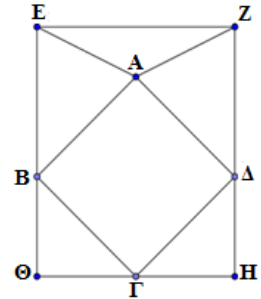
i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Z , Δ , E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $\hat{A}=90^\circ$.



37126. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘΗ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘΗ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .



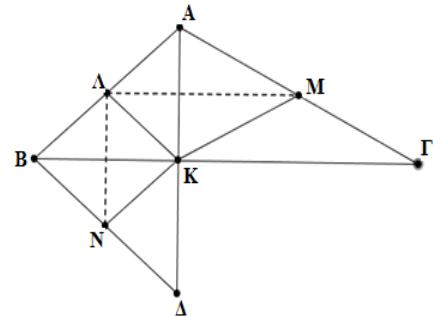
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο.
- ii. Το σημείο Α ισαπέχει από τα τις κορυφές Ε και Ζ του μπιλιάρδου.

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

37132. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK=KΔ$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

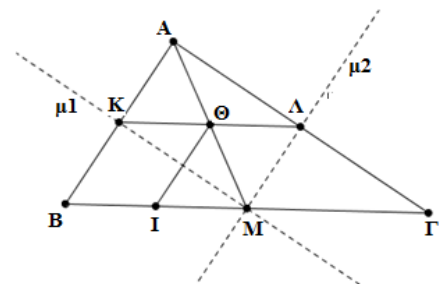
- α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος.
- γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$.



37133. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$.
- ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

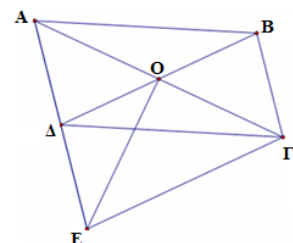


β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να

αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

37136. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΔΕ=ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.



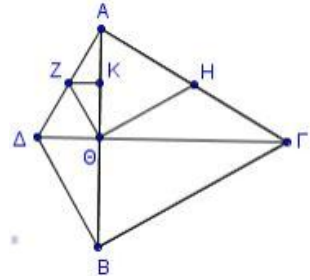
37138. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΔB , εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με γωνία $\hat{A}=120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .

β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.

γ) Αν ZK είναι η κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε

$$\text{ότι } ZK = \frac{A\Delta}{4}.$$



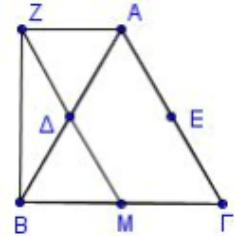
37140. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA .



37142. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα $A\epsilon$ κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = A\epsilon$. Θεωρούμε τα μέσα Z , H και M τα μέσα των ΔB , $\epsilon\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές.

iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon\Gamma$ έγραψε τα εξής:

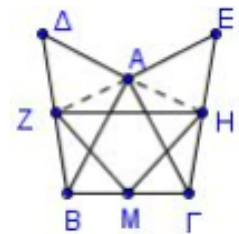
« 1. $A\Delta = A\epsilon$ από υπόθεση.

2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελές τριγώνου.

3. $\hat{\Delta A B} = \hat{\epsilon A \Gamma}$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δυο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;



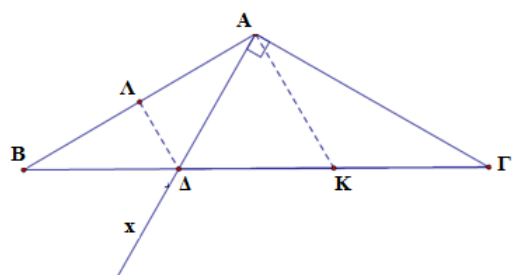
1871. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$.

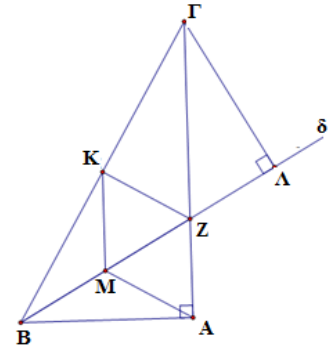
γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$.

δ) $AK = 2\Lambda\Delta$.



1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:

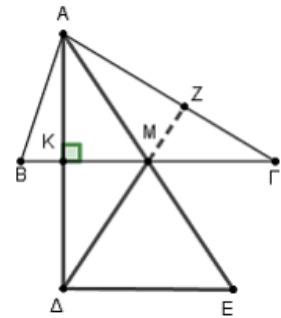
- α) Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.
- γ) $\Gamma Z=2ZA$.
- δ) $BA=\Lambda\Gamma$.



37157. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM=AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta=AK$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME=AM$. Να αποδείξετε ότι:

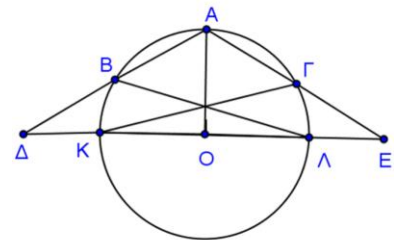
- α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E=2KM$.
- β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.
- δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσον του Z .



1874. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $K\Lambda$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $K\Lambda$. Φέρουμε τις χορδές $AB=A\Gamma=r$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $K\Lambda$.

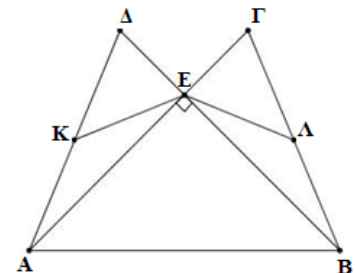
Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία $BA\Gamma$ είναι 120° .
- β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
- γ) $K\Gamma=\Lambda B$.



1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($AB=A\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να είναι κάθετες. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $E\Delta=E\Gamma$.
- β) $\Delta\Gamma \parallel AB$.
- γ) Το τρίγωνο $E\Lambda\Delta$ είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.

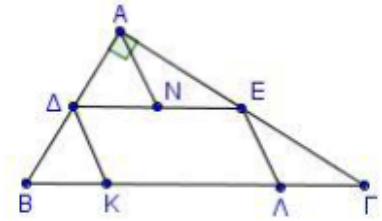


37158. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και Δ, E και N τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K=KB$ και $E\Lambda=A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

β) Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E=2\Delta K$.

γ) $AN=\Delta K=\frac{B\Gamma}{4}$.

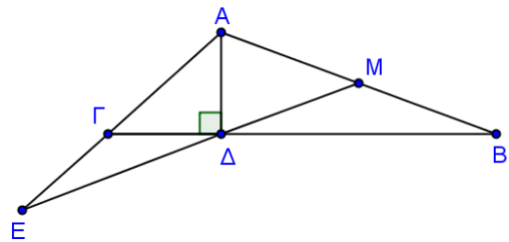


37159. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB>A\Gamma$), $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}=\hat{E}$.

β) $\hat{\Gamma}=2\hat{B}=A\hat{M}\Delta$.

γ) $\Gamma E<A\Gamma$.



1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma B$ ($A\Gamma=\Gamma B$). Φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$ και $\Gamma\Lambda$. Αν E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο KEL είναι ισοσκελές.

β) Η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

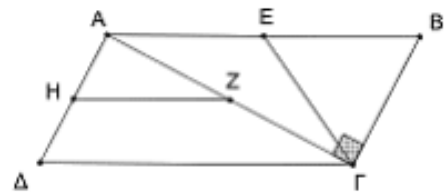
13540. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma E=ZH$.

ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$.

β) Αν $\Delta H=\frac{AB}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

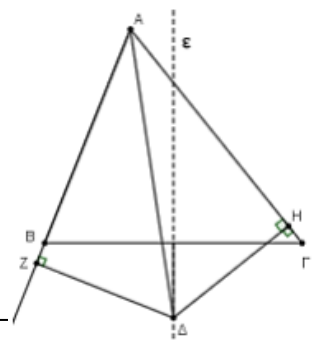


13522. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB<A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $BZ=H\Gamma$.

γ) Αν η γωνία $\hat{A}=60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM=Z\Delta$.



13520. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο

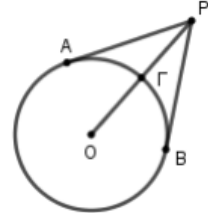
Γ και $\hat{APB} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$.

β) $\hat{A\Gamma B} = 120^\circ$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

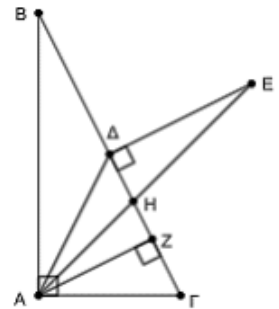


13672. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας A στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$.

β) $A\Delta = \Delta E$.

γ) $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

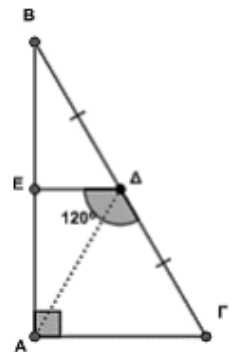


13855. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E\Gamma\Delta} = 120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta\Gamma A}$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{H}Z} = 90^\circ$.

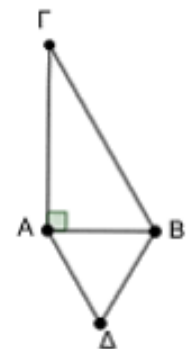


13853. Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

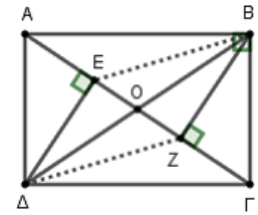
β) Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.

γ) Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



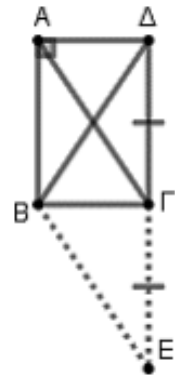
13852. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο $A\Gamma$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα.
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Αν $\hat{\Delta AE} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$.



13851. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma EB$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.
 γ) Αν $\hat{\Delta BE} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$.



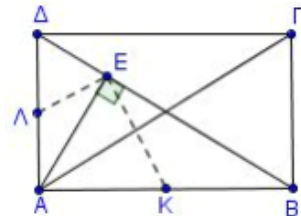
14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντιστοίχως, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{K\Lambda E} = 90^\circ$.

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

β) Αν $\hat{B\Lambda\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.



14886. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Έστω Θ είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE .

α) Να αποδείξετε ότι:

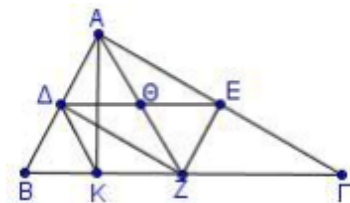
i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$.

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$:

i. να βρείτε τη γωνία AZB .

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.



14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσος του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην AG . Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{N}\hat{K}M = \hat{N}\hat{M}K$.

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA .

γ) $AM = KN + LP$.

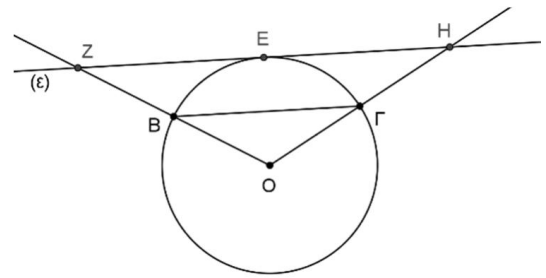
34318. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και E το μέσο του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των OB, OG (προς το B και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \parallel (\varepsilon)$

ii. $OZ = OH$

β) Αν το σημείο B είναι το μέσο του OZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .



34334. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών $AB, AG, B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = EG$ και $HZ = Z\Gamma$.

β) το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\hat{Z}\hat{\Delta}E = \hat{Z}\hat{H}E$.

37104. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την AG στο σημείο E .

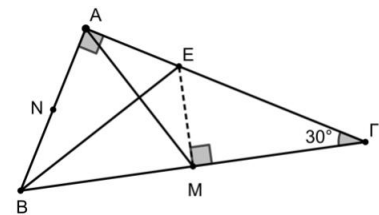
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B .

ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$.

iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M, H και N είναι συνευθειακά.



12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .

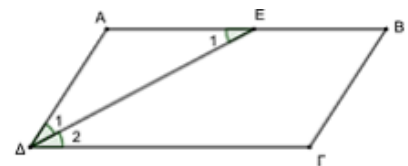
α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2 \cdot AD$.

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο E στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι

$\frac{\Delta E}{HE} = 2$.

γ) Αν M είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.



ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1706. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta=\gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

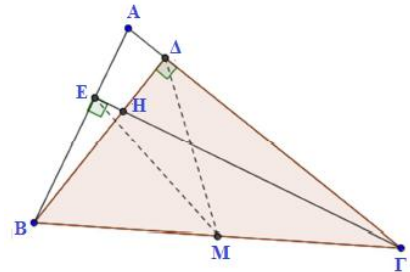
37085. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MD=ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{A}H\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να βρείτε το ορθόκентρο του τριγώνου ABH .



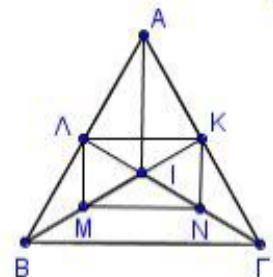
37087. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν τα σημεία M και N είναι τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα.

γ) Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

δ) Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



1728. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$.

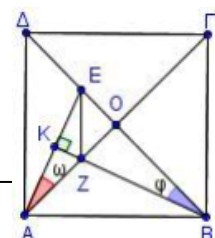
γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

1748. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

β) $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

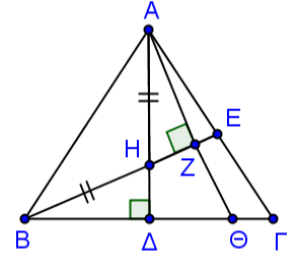


1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, ($AB=AG$) και το ύψος του AD . Στο AD θεωρούμε σημείο H τέτοιο, ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την AG . Φέρνουμε την AZ κάθετη στη BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

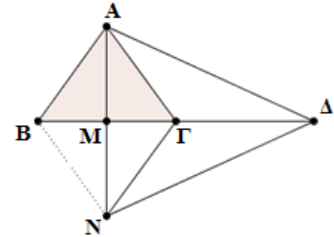
- i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
- ii. $\Delta\Theta=\Theta Z$.
- iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



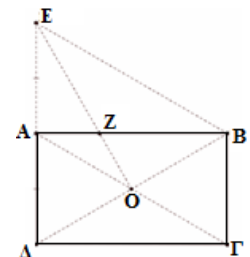
1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, ($AB=AG$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.
- β)** Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.
- γ)** Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.



1764. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $AB>B\Gamma$, $AG=2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A=AE$.

- α)** Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - ii. Το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- β)** Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

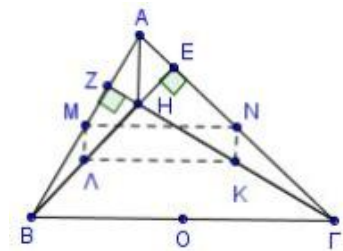


1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ , τα ύψη από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , AG , ΓH , BH αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $MN=\Lambda K$
- ii. $NK=ML=\frac{AH}{2}$.
- iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.

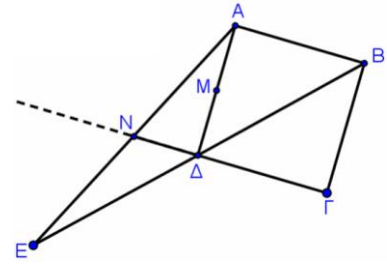
β) Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\hat{MOK}=90^\circ$.



1780. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των AE και $\Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.
 β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου NMA .
 γ) Να αποδείξετε ότι:

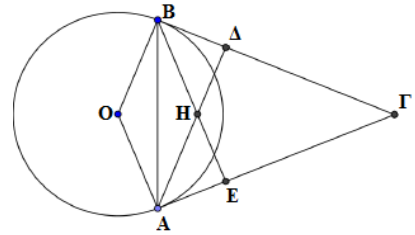
- i. $MN \perp A\Gamma$.
 ii. $\Gamma M \perp AN$



1823. Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H .

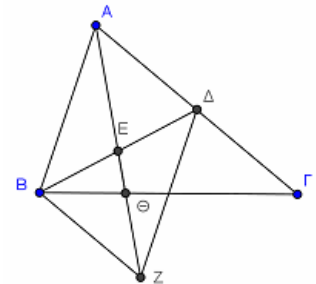
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.
 β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.
 γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.



1827. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου $B\Delta$. Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

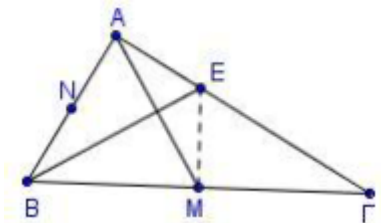


1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B .
 ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$.
 iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M, H και N είναι συνευθειακά.

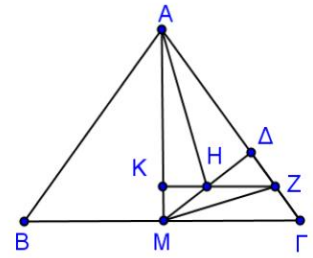


37116. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και το ύψος του AM . Φέρουμε τη $M\Delta$ κάθετη στην AG και θεωρούμε σημείο H το μέσο του $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και AG στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$.

β) $MZ \parallel B\Delta$.

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.



37137. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($\hat{A}=90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

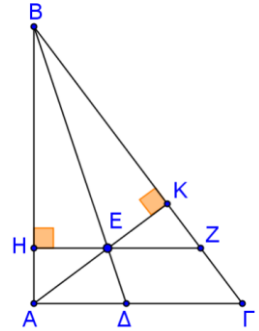
α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.

ii) Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

iii) Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

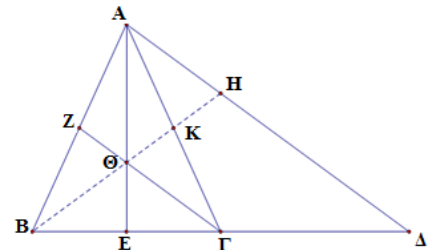


1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το AG στο K και το $A\Delta$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $AH=O\Gamma$.

γ) $AH=2Z\Theta$.

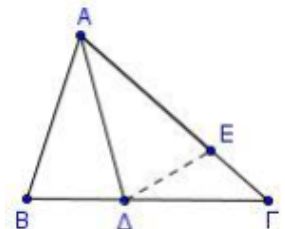


37163. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά AG θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE=AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE .

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .



2841. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$

β) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

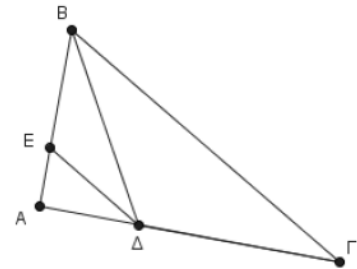
γ) $\Delta E = \frac{AG}{2}$.

5059. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $A\Delta B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Αν $A\Delta B=60^\circ$, τότε:

- i.** να υπολογίσετε τη γωνία Γ .
- ii.** να αποδείξετε ότι $B\Gamma=2AB$.

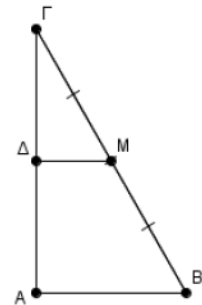


5096. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ .

α) Να υπολογίσετε:

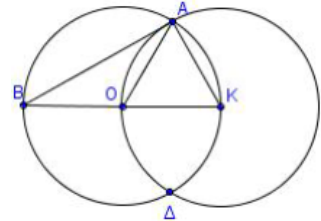
- i.** τις γωνίες και του τριγώνου $AB\Gamma$.
- ii.** τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.



5626. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK=\rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

- α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
- β)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK . μ 15



3735. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A .

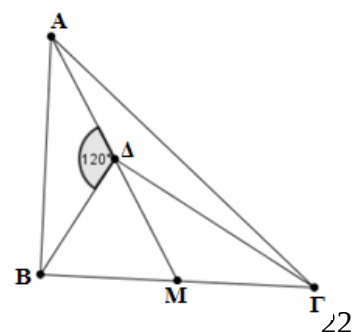
α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** $\frac{\hat{A}_{εξ}}{2} + \hat{B}_{εξ} = 180^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_{εξ}$ και $\hat{B}_{εξ}$ παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των A και B αντίστοιχα.
- ii.** Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓB (προς το μέρος του B) σε σημείο Z .

β) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και $AZB=15^\circ$, να αποδείξετε ότι $B\Gamma=2AB$.

3751. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Έστω ότι Δ είναι το μέσο της AM τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και $A\Delta B=120^\circ$.

- α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta M$.
- β)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- γ)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Delta M\Gamma$ είναι ίσα.
- δ)** Αν το σημείο K είναι η προβολή του Δ στην $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $2MK=A\Delta$.



41. Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB (προς το B)

θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔE

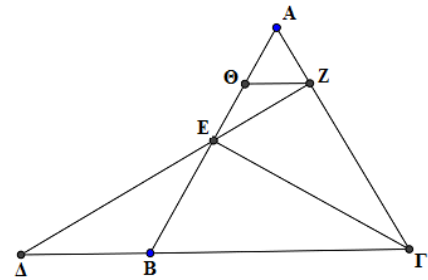
τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισοπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ .

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

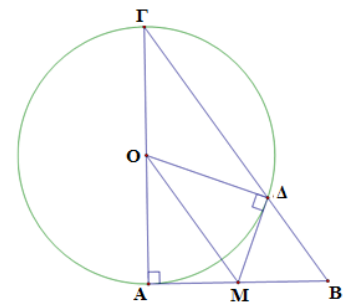


52. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma\Delta A} = \hat{B}$.

β) Το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) Το M είναι το μέσο του AB .



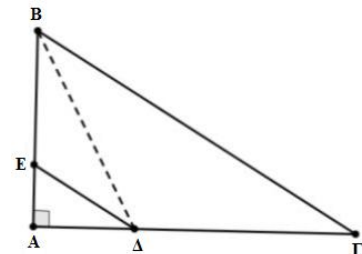
53. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας ΔAB να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\Delta AB = 60^\circ$:

i) να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

ii) να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$.



29. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AM = M\Delta$.

β) Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

γ) $\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma \hat{A} \Delta}$.

