

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Γραμμική εξίσωση 2 αγνώστων

Ορισμός. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, καλείται *γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους*.

Πρόταση. Η εξίσωση $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή.

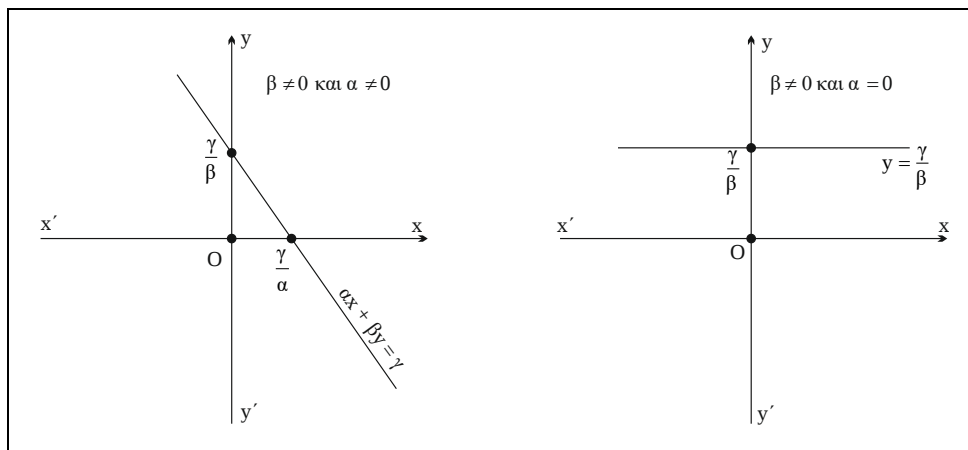
Απόδειξη. Πράγματι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

♦ $b \neq 0$, τότε:

$$ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$$

Δηλαδή η εξίσωση παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$, η οποία τέμνει

τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, \frac{\gamma}{b}\right)$.

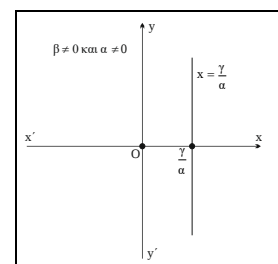


(Στην περίπτωση που $a \neq 0$ η ευθεία λέγεται *πλάγια*, ενώ όταν $a = 0$ λέγεται *οριζόντια*).

♦ $b = 0$. Τότε είναι αναγκαστικά $a \neq 0$.

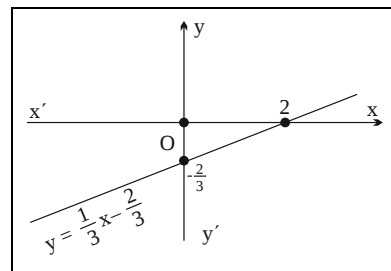
Η εξίσωση παίρνει την μορφή $x = \frac{\gamma}{a}$ και παριστάνει κατα-

κόρυφη ευθεία, που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{\gamma}{a}, 0\right)$.

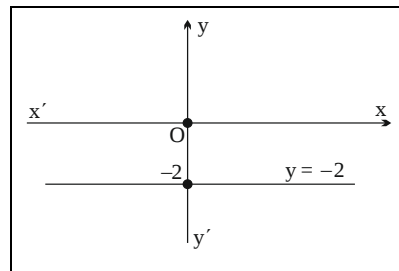


Παραδείγματα.

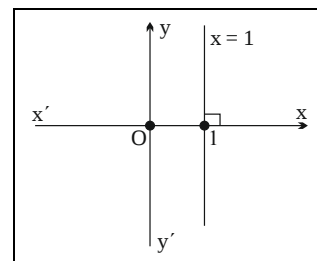
(1) Η εξίσωση $x - 3y = 2$ γράφεται $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ και παριστάνει ευθεία, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{3}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ και τον $x'x$ στο $A(2, 0)$.



(2) Η εξίσωση $y = -2$ παριστάνει μία οριζόντια (παράλληλη με τον ορίζοντα, δηλ. τον άξονα $x'x$) ευθεία, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -2)$. Όλες οι οριζόντιες ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$.



(3) Η εξίσωση $x = 1$ παριστάνει κατακόρυφη (παράλληλη με τον $y'y$, δηλαδή κάθετη στον $x'x$), που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με συντεταγμένες $(1, 0)$. Για τις κατακόρυφες ευθείες δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.



Λύσεις της εξίσωσης $ax + by = \gamma$

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$, έχει ως λύση κάθε ζεύγος (κ, λ) πραγματικών αριθμών, που την επαληθεύει. Αν η εξίσωση $ax + by = \gamma$ παριστάνει ευθεία, τότε οι συντεταγμένες (κ, λ) κάθε σημείου της ευθείας είναι λύση της εξίσωσης. Άρα, μία εξίσωση που παριστάνει ευθεία έχει άπειρες λύσεις. Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε ζεύγος (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών είναι λύση της εξίσωσης. Μόνον οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας ικανοποιούν την εξίσωση. Αλλά και αντιστρόφως, αν ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία $ax + by = \gamma$, τότε οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση $ax + by = \gamma$. Δηλαδή είναι $ax_0 + by_0 = \gamma$.

Εύρεση σημείων ευθείας

Για να βρούμε σημεία της ευθείας $ax + by = \gamma$ δίνουμε αυθαίρετα τιμή σε μία από τις δύο μεταβλητές και υπολογίζουμε την άλλη. Αν είναι $\beta \neq 0$, τότε τα σημεία της ευθείας $ax + by = \gamma$, έ-

χουν μορφή $\left(\kappa, -\frac{a}{\beta}\kappa + \frac{\gamma}{\beta}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα.

Θεωρούμε την εξίσωση $3x - 2y = 1$. Για $x = 2$ έχουμε:

$$3 \cdot 2 - 2y = 1 \Leftrightarrow -2y = -5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Άρα, ένα σημείο της ευθείας $3x - 2y = 1$, είναι το $A\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Για $y = 0$ βρίσκουμε

$$3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Δηλαδή η ευθεία $3x - 2y = 1$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Επίσης αν $M(\kappa, \lambda)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $3x - 2y = 1$, τότε για τις συντεταγμένες του ισχύει:

$$3\kappa - 2\lambda = 1 \Leftrightarrow -2\lambda = -3\kappa + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}\kappa - \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή, οι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας $3x - 2y = 1$, έχουν την μορφή

$$M\left(\kappa, \frac{3}{2}\kappa - \frac{1}{2}\right), \kappa \in \mathbb{R}.$$

Γραμμικό σύστημα 2×2

Ορισμός. Όταν έχουμε δύο εξισώσεις $ax + by = \gamma$, $a'x + b'y = \gamma'$ και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα *γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους* ή ένα *γραμμικό σύστημα 2×2* .

Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 γράφεται στην μορφή:

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

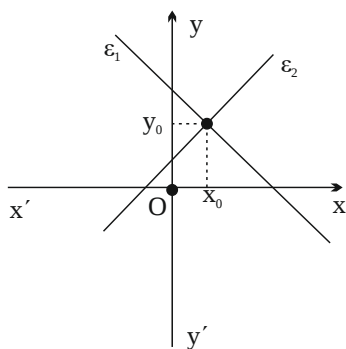
Οι συντελεστές a , b , a' και b' λέγονται *συντελεστές του συστήματος* και οι γ , γ' λέγονται *σταθεροί όροι του συστήματος*.

Κάθε ζεύγος (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος καλείται *λύση του συστήματος*. Ένα σύστημα μπορεί να είναι *αδύνατο*, αν δεν έχει λύση, ή να είναι *συμβιβαστό*, αν έχει τουλάχιστον μία λύση. Τα συμβιβαστά συστήματα μπορεί να έχουν

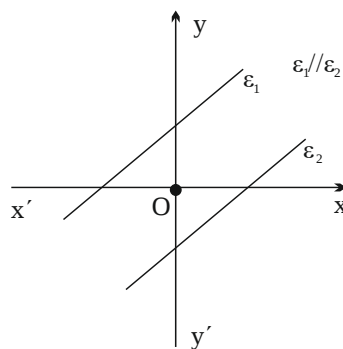
μοναδική ή άπειρες το πλήθος λύσεις. Αν ένα σύστημα έχει άπειρες το πλήθος λύσεις, τότε καλείται *αόριστο*. Δύο συστήματα με τις ίδιες λύσεις καλούνται *ισοδύναμα*.

Γεωμετρική ερμηνεία της κατάστασης ενός συστήματος 2×2

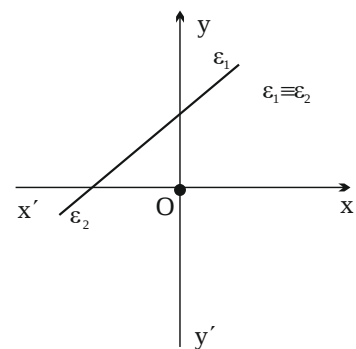
Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου είτε τέμνονται, είτε είναι παράλληλες, είτε ταυτίζονται. Συνεπώς αν οι δύο εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν ευθείες, τότε αν τέμνονται έχουμε μοναδική λύση. Αν είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο και αν ταυτίζονται, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.



Το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)



Το σύστημα είναι αδύνατο



Το σύστημα είναι αόριστο

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

Από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε να επιλύουμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα, με την *μέθοδο της αντικατάστασης* και με την *μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών* (*μέθοδος απαλοιφής*). Υπενθυμίζουμε τις μεθόδους μέσω του επομένου παραδείγματος.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$(\Sigma): \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 9y = 1 \end{cases}$$

Μέθοδος αντικατάστασης

$$(\Sigma): \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ 4x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ 4\left(\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}\right) - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ 6y + 6 - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ -3y = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(4, \frac{5}{3}\right)$.

Μέθοδος αντιθέτων συντελεστών (απαλοιφής)

$$(\Sigma): \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 9y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4x + 6y = -6 \\ 4x - 9y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 0x - 3y = -5 \\ 4x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Αντικαθιστούμε σε όποια εξίσωση θέλουμε (συνήθως την πιο απλή) και έχουμε:

$$4x - 9 \cdot \frac{5}{3} = 1 \Rightarrow 4x - 15 = 1 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = \left(4, \frac{5}{3}\right)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x-y(2x-1) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Φέρνουμε κάθε εξίσωση του συστήματος στη μορφή $ax + by = \gamma$:

$$\blacklozenge \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \Leftrightarrow 2(x-2y) - (3y-1) = -4x+20$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y - 3y + 1 = -4x + 20$$

$$\Leftrightarrow 6x - 7y = 19 \quad (\text{I})$$

$$\blacklozenge 1 - 2x(y-1) = 3x - y(2x-1) \Leftrightarrow 1 - 2xy + 2x = 3x - 2xy + y$$

$$\Leftrightarrow -x - y = -1$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1 \quad (\text{II})$$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα των εξισώσεων (I) και (II):

$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(1-y) - 7y = 19 \\ x = 1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 6y - 7y = 19 \\ x = 1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13y = 13 \\ x = 1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (2, -1)$.

(2) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε το σύστημα

$$(\Sigma): \begin{cases} (\alpha - \beta)x + \beta y = \alpha + 1 \\ \beta x - (\alpha - \beta)y = \beta \end{cases},$$

να έχει λύση το ζεύγος $(2,1)$.

ΛΥΣΗ

Εφόσον το (Σ) έχει λύση το ζεύγος $(2,1)$, τότε οι τιμές $x = 2$ και $y = 1$ επαληθεύουν το (Σ) . Ο-
πότε:

$$\begin{cases} (\alpha - \beta) \cdot 2 + \beta \cdot 1 = \alpha + 1 \\ \beta \cdot 2 - (\alpha - \beta) \cdot 1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \beta = \alpha + 1 \\ 2\beta - \alpha + \beta = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta - \beta = 1 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}.$$

Άρα $\alpha = 2$ και $\beta = 1$.

(3) Μία μάνα και μία κόρη έχουν ηλικίες που σήμερα διαφέρουν κατά 35 χρόνια. Αν μετά από 5 χρόνια η ηλικία της μάνας είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης, να βρείτε τις σημερινές ηλικίες της μάνας και της κόρης.

ΛΥΣΗ

Έστω x η ηλικία της μάνας και y η ηλικία της κόρης. Μετά από 5 χρόνια η ηλικία της μάνας θα είναι $x + 5$ και της κόρης θα είναι $y + 5$. Οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 35 \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$$

Είναι

$$\begin{cases} x - y = 35 \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 35 \\ x = 2y + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 5 - y = 35 \\ x = 2y + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 65 \end{cases}$$

Άρα η μάνα είναι σήμερα 65 ετών και η κόρη 30.