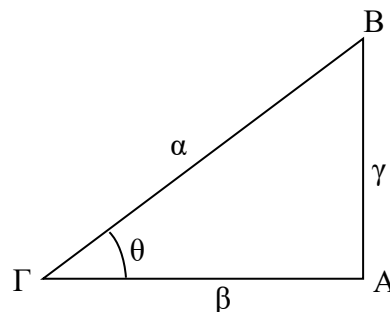


ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

□ Τριγωνομετρικοί αριθμοί

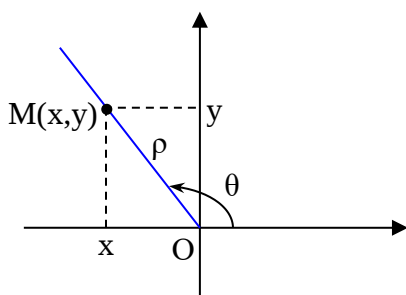
- Για γωνίες θ με $0 < \theta < 90^\circ$:

$$\eta\mu\theta = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{\beta}{\gamma}$$



- Για γωνίες θ με $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ (οι οποίες παράγονται αν σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy , στραφεί ο ημιάξονας Ox κατά τη θετική ή αρνητική φορά)

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \text{ με } x \neq 0, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} \text{ με } y \neq 0$$

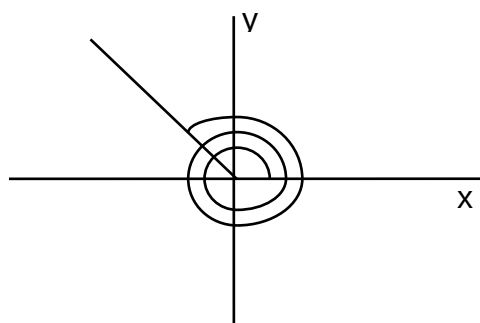


Όπου $M(x,y)$ είναι οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου της τελικής πλευράς της γωνίας θ και

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Αν ο ημιάξονας Ox διαγράψει κ ($\kappa \in \mathbb{Z}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία θ , τότε έχει διαγράψει γωνία $360^\circ \cdot \kappa + \theta$. Δηλαδή αν μια γωνία είναι μεγαλύτερη από 360° σημαίνει ότι έχει διαγράψει μία ή περισσότερες πλήρεις περιστροφές και η τελική πλευρά συμπίπτει με την τελική πλευρά μιας γωνίας μικρότερης των 360° .

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών αυτών ορίζονται όπως οι προηγούμενοι και ισχύει:



$$\eta\mu(360^\circ \cdot \kappa + \theta) = \eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \eta\mu\theta,$$

$$\sigma\upsilon\nu(360^\circ \cdot \kappa + \theta) = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\epsilon\varphi(360^\circ \cdot \kappa + \theta) = \epsilon\varphi(2\kappa\pi + \theta) = \epsilon\varphi\theta,$$

$$\sigma\varphi(360^\circ \cdot \kappa + \theta) = \sigma\varphi(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\varphi\theta$$

□ **Τριγωνομετρικός κύκλος**

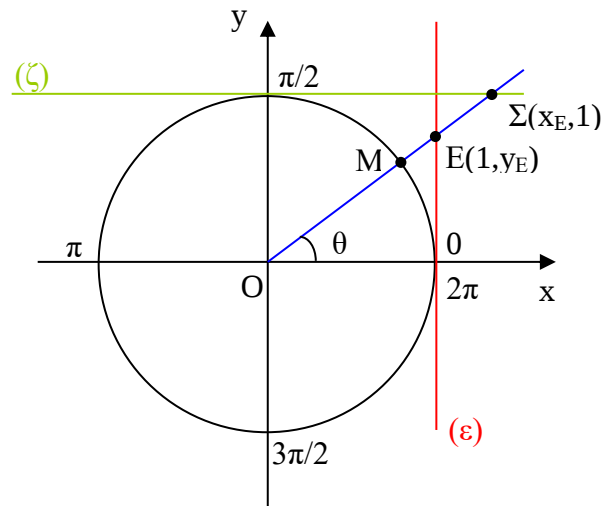
Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy με κέντρο την αρχή των αξόνων O γράφουμε κύκλο ακτίνας $\rho = 1$. Έστω ένα σημείο του κύκλου $M(x,y)$ για το οποίο ισχύει $MOx = \theta$.

Εφόσον $\rho = 1$, έχουμε:

$\sin\theta = x$ (τετμημένη του M),

$\eta\mu\theta = y$ (τεταγμένη του M) και

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} = \frac{y}{x} \quad (\text{συντελεστής διεύθυνσης της } OM)$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το $\sin\theta$ ακολουθεί το πρόσημο των x (θετικό στο 1° και 4° τεταρτημόριο) ενώ το $\eta\mu\theta$ ακολουθεί το πρόσημο των y (θετικό στο 1° και 2° τεταρτημόριο). Συνοπτικά:

	1°	2°	3°	4°
$\eta\mu\theta$	+	+	-	-
$\sin\theta$	+	-	-	+
$\epsilon\phi\theta$	+	-	+	-
$\sigma\phi\theta$	+	-	+	-

Επίσης για τις τιμές του $\eta\mu\theta$ και $\sin\theta$ έχουμε: $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$ και $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.

- Η ευθεία (ϵ) : $x = 1$ λέγεται **άξονας των εφαπτομένων** και ισχύει: $\epsilon\phi\theta = y_E$ (τεταγμένη του E)
- Η ευθεία (ζ) : $y = 1$ λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων** και ισχύει $\sigma\phi\theta = x_E$ (τετμημένη του Σ) {βλ. παραπάνω σχήμα}.

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Μνημονικός κανόνας

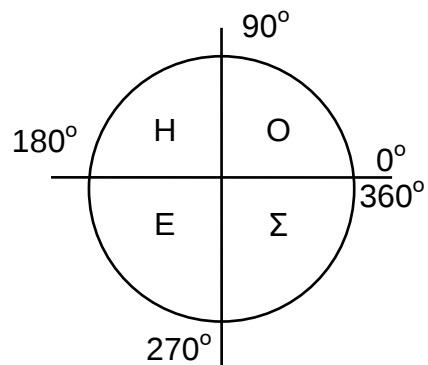
Σε κάθε τεταρτημόριο ισχύουν:

Ο: όλα θετικά ($\eta\mu$, $\sin$, $\epsilon\phi$, $\sigma\phi$)

Η: μόνο το ημίτονο θετικό

Ε: μόνο εφαπτομένη (και $\sigma\phi$) θετικές

Σ: μόνο συνημίτονο θετικό .



ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$\blacktriangleright \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\blacktriangleright \epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\blacktriangleright \sigma\phi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

$$\blacktriangleright \epsilon\phi\theta = \frac{1}{\sigma\phi\theta}$$

$$\blacktriangleright 1 + \epsilon\phi^2\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$\blacktriangleright 1 + \sigma\phi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Γωνίες αντίθετες

$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$
$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$	$\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$

Οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γωνίες παραπληρωματικές ($\pi - \omega$)

$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$
$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γωνίες με διαφορά 180° ($\pi + \omega$)

$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$
$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$

Οι γωνίες με διαφορά 180° έχουν αντίθετα ημίτονο και συνημίτονο και ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Γωνίες συμπληρωματικές $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$

$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\epsilon\phi(90^\circ - \omega) = \sigma\phi\omega$
$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\phi(90^\circ - \omega) = \epsilon\phi\omega$

Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο της μιας είναι συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας συνεφαπτομένη της άλλης.

Παρατήρηση:

Αντί των αριθμών $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ μπορεί να έχουμε αντίστοιχα $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Μνημονικός κανόνας

- Για αντίθετες γωνίες το μείον στη γωνία γίνεται μείον στον τριγωνομετρικό αριθμό, εκτός του συνημιτόνου.
- Γωνίες με άθροισμα ή διαφορά 90° ή 270° . $\left(\frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{3\pi}{2}\right)$

Το ημ γίνεται συν

Το συν γίνεται ημ

Η εφ γίνεται σφ

Η σφ γίνεται εφ.

- Γωνίες με άθροισμα ή διαφορά 180° ή 360° . $(\pi \text{ ή } 2\pi)$

Ο τριγωνομετρικός αριθμός δεν αλλάζει.

- Το πρόσημο βρίσκεται από το πρόσημο που έχει ο τριγωνομετρικός αριθμός στο τεταρτημόριο που βρίσκεται.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

	$\omega=0^\circ$	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^\circ (\pi)$	$270^\circ \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$360^\circ (2\pi)$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
σφω	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Τριγωνομετρική λέγεται κάθε συνάρτηση, που στον τύπο της περιέχει κάποιο τριγωνομετρικό αριθμό οποιουδήποτε τόξου.

□ Περιοδικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός

$T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$, να είναι:

i) $x + T \in A, x - T \in A$

ii) $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της f .

□ Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1) $f(x) = \eta\mu x$ Π.Ο. = $\mathbb{R}$ $T = 2\pi$

2) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ Π.Ο. = $\mathbb{R}$ $T = 2\pi$

3) $f(x) = \epsilon\phi x$ Π.Ο. = $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ $T = \pi$

4) $f(x) = \sigma\phi x$ Π.Ο. = $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $T = \pi$.

□ Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$

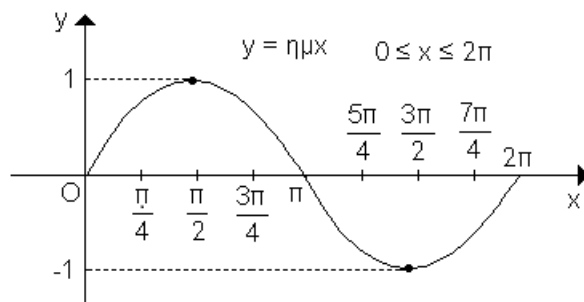
Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

Άρα θα την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Ο πίνακας μεταβολής είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
		μέγιστο		ελάχιστο	

Η γραφική της παράσταση θα είναι:



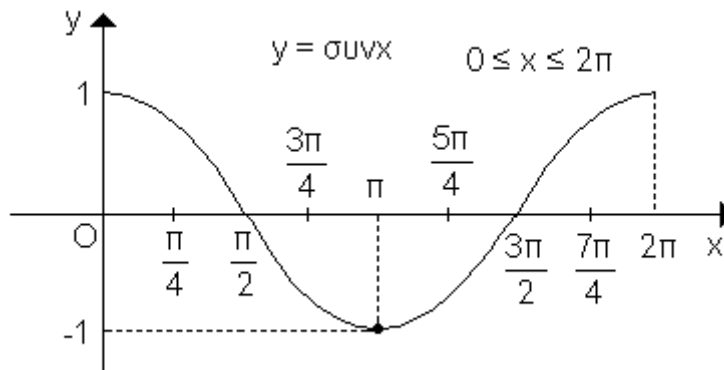
□ **Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$**

$T = 2\pi$, άρα θα την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Ο πίνακας μεταβολής είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)	1 μέγιστο	0 ↘	-1 ↗ ελάχιστο	0 ↗	1

Η γραφική της παράσταση θα είναι:



□ **Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\phi x$**

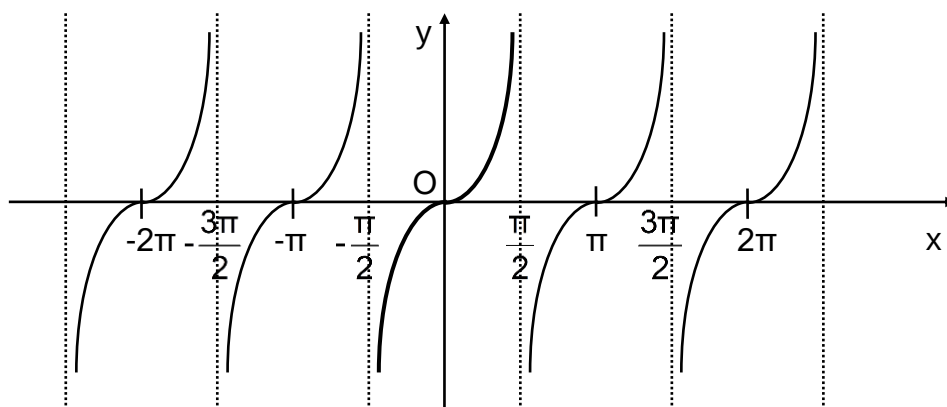
Έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ και περίοδο $T = \pi$. Άρα θα

την μελετήσουμε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ο πίνακας μεταβολής είναι:

X	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
F(x)	Δεν ορίζεται ↗	0 ↗	δεν ορίζεται

Η $\epsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η γραφική της παράσταση θα είναι:



Σχόλιο

Όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ η $\epsilon\phi x$ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Λέμε τότε

ότι η $\epsilon\phi x$ τείνει στο $+\infty$, ενώ για τιμές του x κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$ η $\epsilon\phi x$ τείνει στο $-\infty$. Οι

γραμμές $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, λέγονται **κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

□ Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sigma\phi x$

Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R} - \{k\pi\}$

Περίοδος: $T = \pi$.

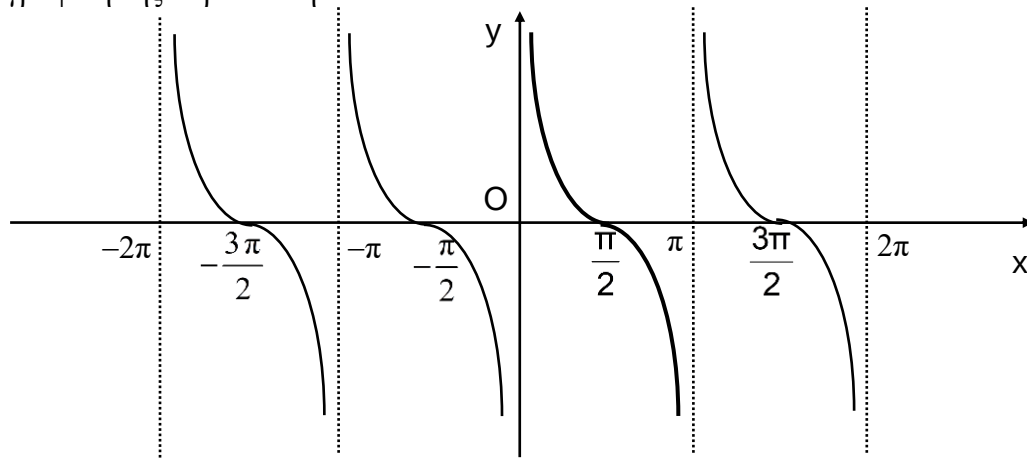
Άρα θα την μελετήσουμε στο διάστημα $(0, \pi)$.

Ο πίνακας μεταβολής είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
F(x)	δεν ορίζεται	0	δεν ορίζεται

Η $\sigma\phi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$

Η γραφική της παράσταση θα είναι:



Σχόλιο

Όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 0 η $\sigma\phi x$ τείνει στο $+\infty$, ενώ για τιμές του x κοντά στο π η $\sigma\phi x$ τείνει στο $-\infty$. Οι ευθείες $x = 0, x = \pi, x = -\pi, \dots$ λέγονται κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Για μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, το ρ καθορίζει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, $\max f = |\rho|$ και $\min f = -|\rho|$ αντίστοιχα, ενώ το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Τα ίδια ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, με $\rho, \omega > 0$.
- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \epsilon\phi(\omega x)$, $g(x) = \sigma\phi(\omega x)$ με $\omega > 0$ έχουν περίοδο

$$T = \frac{\pi}{\omega}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

□ Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$

$$\text{Αν } \alpha = \eta\mu\theta \text{ τότε } \eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

□ Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

□ Η εξίσωση $\epsilon\phi x = \alpha$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

□ Η εξίσωση $\sigma\phi x = \alpha$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

$\eta\mu x = 0 \Rightarrow x = \kappa\pi$	$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu x = 1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi$
$\eta\mu x = -1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$

με $\kappa \in \mathbb{Z}$.