

Η έννοια του πολυωνύμου

Αν x είναι μια **μεταβλητή** που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, τότε:

- **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής $a_n x^n$ όπου a είναι πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος. Κάθε πραγματικός αριθμός ονομάζεται επίσης μονώνυμο του x .
- **Πολυώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος και $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρήσεις:

1. Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι πραγματικοί αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου. Ειδικά ο a_0 λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου.
2. Κάθε πολυώνυμο της μορφής a_0 λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**.
3. Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.
4. Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με $P(x), Q(x), f(x)$ κτλ., δηλαδή γράφουμε:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

5. Ένα πολυώνυμο λέγεται **πλήρες** όταν έχει όλους τους συντελεστές του διαφορετικούς από το μηδέν, ενώ διαφορετικά λέγεται **ελλιπές**.
- Τα πολυώνυμα $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + b_1 x + b_0$ με $\mu \geq n$ θα λέμε ότι είναι **ίσα**, όταν:

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n \text{ και } b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = b_\mu = 0.$$

- Ονομάζουμε **βαθμό** ενός πολυωνύμου $P(x)$, τον εκθέτη της μεγαλύτερης δύναμης του x με συντελεστή διάφορο του 0.

Παρατηρήσεις:

1. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι n βαθμού, τότε είναι $a_n \neq 0$ και το πολυώνυμο παίρνει τη μορφή $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
2. Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
3. Στο μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- Το πολυώνυμο $P(x) = -x^{2000} + 1996x + 2004$ είναι βαθμού 2000.
- Το πολυώνυμο $Q(x) = 2004$ είναι μηδενικού βαθμού.

- Το πολυώνυμο $P(x) = ax + b$ είναι πρώτου βαθμού.
- Το πολυώνυμο $K(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, και $b, c \in \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (τριώνυμο).

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Ονομάζουμε **αριθμητική τιμή** του πολυωνύμου για $x = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, τον πραγματικό αριθμό

$$P(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0.$$

- Ο πραγματικός αριθμός ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου $P(x)$, αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.
- Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα.
- Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:
- Το άθροισμα (διαφορά) δύο μη μηδενικών πολυωνύμων έχει βαθμό ίσο ή μικρότερο από το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων. Δηλαδή:

$$\text{βαθμός } [P(x) + Q(x)] \leq \max \{ \text{βαθμός } P(x), \text{ βαθμός } Q(x) \}$$

- Το γινόμενο δύο μη μηδενικών πολυωνύμων έχει βαθμό ίσο με το άθροισμα των βαθμών τους.

$$\text{βαθμός } [P(x) \cdot Q(x)] = \text{βαθμός } P(x) + \text{βαθμός } Q(x)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (\mu^2 - 4)x^3 + (\mu^2 - 5x + 6)x + \mu - 2$ είναι μηδενικό.

Λύση:

Για να είναι το πολυώνυμο $P(x)$ μηδενικό, θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\left. \begin{array}{l} \mu^2 - 4 = 0 \\ \mu^2 - 5x + 6 = 0 \\ \mu - 2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mu - 2)(\mu + 2) = 0 \\ (\mu - 3)(\mu - 2) = 0 \\ \mu = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 2 \text{ ή } \mu = -2 \\ \mu = 2 \text{ ή } \mu = 3 \\ \mu = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu = 2.$$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\mu^3 - 1)x^3 + (\mu^2 + 2)x + \mu$ και $Q(x) = (\mu^3 - \mu)x^2 + 3\mu x + 1$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες τα δύο πολυώνυμα κλάσματα είναι ίσα.

Λύση:

Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα θα πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές των x^3 , x^2 , x και οι

σταθεροί όροι να είναι ίσοι.

$$\left. \begin{array}{l} \mu^3 - 1 = 0 \\ \mu^3 - \mu = 0 \\ \mu^2 + 2 = 3\mu \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mu - 1)(\mu^2 + \mu + 1) = 0 \\ \mu(\mu + 1)(\mu - 1) = 0 \\ \mu^2 - 3\mu + 2 = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \\ \mu = 0 \text{ ή } \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1 \\ \mu = 1 \text{ ή } \mu = 2 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu = 1.$$

3. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2\beta - \alpha)x^2 + 16x - 12$, εάν είναι γνωστό ότι: $P(1) = 0$, και $P(-1) = -24$.

Λύση:

$$\text{Είναι: } P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^4 - (\alpha + \beta) \cdot 1^3 + (2\beta - \alpha) \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 1 - (\alpha + \beta) + (2\beta - \alpha) + 16 - 12 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - \beta + 2\beta - \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Και: } P(-1) = -24 \Leftrightarrow (-1)^4 - (\alpha + \beta)(-1)^3 + (2\beta - \alpha)(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -24 \Leftrightarrow 1 - (\alpha + \beta)(-1) + (2\beta - \alpha) \cdot 1 - 16 - 12 = -24$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\alpha + \beta) + 2\beta - \alpha - 28 = -24 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + 2\beta - \alpha = 4 \Leftrightarrow 3\beta + 1 = 4 \Leftrightarrow 3\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

$$\text{Τώρα έχουμε: } \beta = 1 \text{ και } -2\alpha + 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$$\text{Επομένως: } P(x) = x^4 - (3 + 1)x^3 + (2 \cdot 1 - 3)x^2 + 16x - 12 \Leftrightarrow P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12.$$

4. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\lambda + 2)x^2 - (1 - \lambda)x + 8$ έχει ρίζα το 2;

Λύση:

Πρέπει:

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - (\lambda + 2) \cdot 2^2 - (1 - \lambda) \cdot 2 + 8 = 8 - 4(\lambda + 2) - 2(1 - \lambda) + 8 = 0 \Leftrightarrow 8 - 4\lambda - 8 - 2 + 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

5. Υπολογίστε τα α, β έτσι ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x - (\beta + 5)$ και

$Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 6)x - 4$ να έχουν ταυτόχρονα ρίζα το 2.

Λύση:

$$\text{Πρέπει: } P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 + (\alpha - 1) \cdot 2 - (\beta + 5) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2\alpha - 2 - \beta - 5 = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 3 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης: } Q(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 + \beta \cdot 2^2 + (\alpha - 6) \cdot 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 8 + 4\beta + 2\alpha - 12 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\beta + 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(2\alpha - 3) + 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow 8\alpha - 12 + 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow 10\alpha - 20 = 0 \Leftrightarrow 10\alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\text{Και από (1)} \Rightarrow \beta = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

6. Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε να ισχύει: $(2x + 3)P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 3x + 36$.

Λύση:

Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού, επειδή το $P(x)$ πολλαπλασιάζεται με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και προκύπτει πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

Έστω λοιπόν ότι: $P(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, όπου ζητούμε να προσδιορίσουμε τους πραγματικούς α-ριθμούς α, β, γ. Έτσι:

$$(2x+3) P(x)=2x^3+3x+36 \Leftrightarrow (2x+3)(ax^2+\beta x+\gamma)=2x^3-11x^2+3x+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax^3+2\beta x^2+2\gamma x+3ax^2+3\beta x+3\gamma=2x^3-11x^2+3x+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ax^3+(3\alpha+2\beta)x^2+(3\beta+2\gamma)x+3\gamma=2x^3-11x^2+3x+36 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{ορισμός ίσων} \\ \text{πολυωνύμων} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha=2 \\ 3\alpha+2\beta=-11 \\ 3\beta+2\gamma=3 \\ 3\gamma=36 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=1 \\ 3 \cdot 1+2\beta=-11 \\ 3\beta+2 \cdot 12=3 \\ \gamma=12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=1 \\ 2\beta=-14 \\ 3\beta=-21 \\ \gamma=12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=-7 \\ \gamma=12 \end{array} \right.$$

Επομένως: $P(x)=x^2-7x+12$.

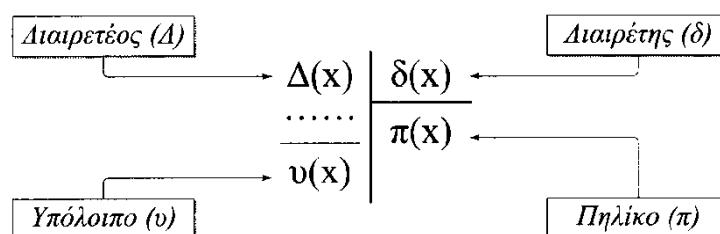
Διαίρεση πολυωνύμων - Σχήμα Horner

Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης): Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$, υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x),$$

όπου το $\upsilon(x) = 0$ ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Δηλαδή:



Παρατηρήσεις:

1. Το πολυώνυμο $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης $\Delta(x):\delta(x)$.
2. Η ισότητα $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ ονομάζεται **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης** του $\Delta(x)$ δια του $\delta(x)$.
3. Ο βαθμός του πηλίκου $\pi(x)$ στη διαίρεση $\Delta(x):\delta(x)$ ισούται με τη διαφορά των βαθμών του διαιρετέου $\Delta(x)$ και του διαιρέτη $\delta(x)$.
4. Αν στη διαίρεση $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$ είναι $\upsilon(x)=0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$. Στην περίπτωση αυτή λεμε ότι το $\delta(x)$ **δι-**

αιρεί το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$ ή ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$.

□ Η τεχνική της διαίρεσης δύο πολυωνύμων

Για να βρούμε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $\Delta(x)$ με ένα πολυώνυμο $\delta(x)$, ακολουθούμε μια διαδικασία, ανάλογη με εκείνη της διαίρεσης των θετικών ακεραίων. Για να γίνει η διαίρεση ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Διατάσσουμε το διαιρετέο και το διαιρέτη κατά τις κατιούσες δυνάμεις της μεταβλητής.
2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο $\pi_1(x)$ του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη.
3. Βρίσκουμε το πρώτο υπόλοιπο $\upsilon_1(x)$, αφού πολλαπλασιάσουμε το $\pi_1(x)$ επί το διαιρετέο και το γινόμενο το αφαιρέσουμε από το διαιρετέο.
4. Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε το δεύτερο όρο $\pi_2(x)$ του πηλίκου και το δεύτερο υπόλοιπο $\upsilon_2(x)$, κλπ.
5. Η διαίρεση τελειώνει όταν το υπόλοιπο γίνει μηδέν ή ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω $P(x) = x^3 + 2x + 12$ και $Q(x) = x - 2$, τότε η διαίρεση $P(x):Q(x)$ γίνεται ως εξής:

Συμπληρώνουμε τον όρο $0x^2$ που λείπει

$x^3 + 0x^2 + 2x + 12$	$x - 2$	
$-x^3 + 2x^2$	$x^2 + 2x + 6$	
$2x^2 + 2x + 12$		
$-2x^2 + 4x$		
$6x + 12$		
$-6x + 12$		
24		

$\frac{x^3}{x} = x^2$

$\frac{2x^2}{x} = 2x$

$\frac{6x}{x} = 6$

□ Διαίρεση πολυωνύμου με το $x - \rho$

Θεώρημα: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ (πολυνόμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{100} - 6x^{50} + 4x^{30} - 2) : (x + 1)$ είναι:

$$v = 18(-1)^{100} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{30} - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$$

- Στην περίπτωση που το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$ είναι 0 ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ μόνο αν, το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Παρατηρήσεις:

1. Από τα παραπάνω θεωρήματα έχουμε : $(x-\rho) = \text{παράγοντας του } P(x) \Leftrightarrow$
 $(x-\rho) \text{ διαιρεί το } P(x) \Leftrightarrow$
 $\text{υπόλοιπο}[P(x):(x-\rho)] = 0 \Leftrightarrow$
 $\rho = \text{ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow$
 $P(\rho) = 0.$
2. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ μόνο όταν το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και του $\pi(x)$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$, δηλαδή μόνο όταν $P(\rho) = \pi(\rho) = 0$.
3. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\alpha)(x-\beta)$ όταν το $x-\alpha$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το $x-\beta$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\alpha$, δηλαδή $P(\alpha) = \pi(\beta) = 0$. Είναι επίσης φανερό ότι αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\alpha$ και το $x-\beta$, τότε θα έχει παράγοντα και το γινόμενό τους, δηλαδή το $(x-\alpha)(x-\beta)$.
4. Αν το $(x-\rho)^k$, k θετικός ακέραιος είναι παράγοντας ενός πολυωνύμου $P(x)$ και το $(x-\rho)^{k+1}$ δεν είναι, λέμε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό ρ με βαθμό πολλαπλότητας k .

□ Σχήμα Horner

Όταν θέλουμε να βρούμε την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$, δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$ ή και το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$, πολλές φορές ακολουθούμε μια διαδικασία που παρουσιάζεται εποπτικά με τον παρακάτω πίνακα. Ο πίνακας αυτός είναι γνωστός ως **Σχήμα του Horner**.

α_n	α_{n-1}	α_{n-2}	...	α_1	$x = \rho$
	$\rho \cdot \alpha_n$	$\rho \cdot (\alpha_{n-1} + \rho \cdot \alpha_n)$	...		
α_n	$\alpha_{n-1} + \rho \cdot \alpha_n$	$\rho \cdot (\alpha_{n-1} + \rho \cdot \alpha_n) + \alpha_{n-2}$	...	$v = P(\rho)$	
Συντελεστές πηλίκου				Υπόλοιπο	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-4)$

όπου $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$.

Το σχήμα Horner έχει ως εξής:

1	-3	6	-10	16	4
↓					
1	4	4	40	120	
	1	10	30	136	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι: $x^3 + x^2 + 10x + 30$ και το υπόλοιπο $P(4) = 136$.

Λυμένες ασκήσεις

1. Εκτελέστε τις παρακάτω διαιρέσεις:

i) $(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4) : (x - 3)$

ii) $(x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 8x + 3) : (x + 3)$

και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση:

i)

$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 0x - 4$	$x - 3$
$-x^4 + 3x^3$	$x^3 + 4x + 12$
$+4x^2 + 0x - 4$	
$-4x^2 + 12x$	
$12x - 4$	
$-12x + 36$	
32	

Επομένως: $(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4) = (x - 3)(x^3 + 4x + 12) + 32$.

ii)

$x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 8x + 3$	$x + 3$
$-x^5 - 3x^4$	$x^4 - x^3 - 8$
$-x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 8x + 3$	
$x^4 + 3x^3$	
$-8x + 3$	
$8x + 24$	

27

Επομένως: $(x^5+2x^4-3x^3-8x+3) = (x+3)(x^4-x^3-8)+27$.

2. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, εκτελέστε τις παρακάτω διαιρέσεις και γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(2x^3-3x^2+4x+5):(x-3)$ ii) $(3x^3+2x^2+x+1):(x+2)$.

Λύση:

i)

2	-3	4	5	3
	6	9	39	
2	3	13	44	

Επομένως: $(2x^3-3x^2+4x+5) = (2x^2+3x+13)(x-3)+44$.

ii)

3	2	1	1	-2
	-6	8	18	
3	-4	9	-17	

Επομένως: $(3x^3+2x^2+x+1) = (3x^2-4x+9)(x+2)-17$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=5x^3+20x^2-220x+4700$. Υπολογίστε το $P(-13)$.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

5	20	-220	4700	-13
	-65	585	-4745	
5	-45	365	-45	

Επομένως: $P(-13)=-45$.

4. Δείξτε ότι:

i) το πολυώνυμο $P(x)=x^4+3x^3+3x^2+3x+2$ διαιρείται με το $x+2$

ii) το πολυώνυμο $Q(x)=x^5-3x^4+x^2-2x-3$ διαιρείται με το $x-3$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{i) Υπολογίζουμε το } P(-2) &= (-2)^4 + 3(-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 = \\ &= 16 + 3(-8) + 3 \cdot 4 - 6 + 2 = \\ &= 16 - 24 + 12 - 6 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης

$P(x):(x-(-2)) = (x^4+3x^3+3x^2+3x+2):(x+2)$ είναι μηδέν, και άρα το $P(x)$ διαιρείται με το $x+2$.

ii) Όμοια: $Q(3)=3^5-3 \cdot 3^4+3^2-2 \cdot 3-3 = 9-6-3 = 0$, οπότε και πάλι το πηλίκο της διαίρεσης $Q(x):(x-3)$ είναι μηδέν, και άρα το $Q(x)$ διαιρείται με το $x-3$.

5. Προσδιορίστε τις τιμές του λ για τις οποίες το πολυώνυμο $x-\lambda$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x) = x^3+2x^2-3x$.

Λύση:

Για να είναι το $x-\lambda$ παράγοντας του $P(x)$, πρέπει

$$\begin{aligned} P(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - \lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda[\lambda(\lambda + 3) - (\lambda + 3)] = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 1. \end{aligned}$$

6. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=(\kappa^3-\kappa+1)x^3-(\kappa^3-2\kappa^2-3\kappa)x^2-(\kappa^3+\kappa^2-2)x-(\kappa^3+\kappa^2+2\kappa+8).$$

Προσδιορίστε το $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-2$ να είναι 12.

Λύση:

Αρκεί:

$$\begin{aligned} P(2) = 12 &\Leftrightarrow (\kappa^3 - \kappa + 1) \cdot 2^3 - (\kappa^3 - 2\kappa^2 - 3\kappa)2^2 - (\kappa^3 + \kappa^2 - 2) \cdot 2 - (\kappa^3 + \kappa^2 + 2\kappa + 8) = 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8(\kappa^3 - \kappa + 1) - 4(\kappa^3 - 2\kappa^2 - 3\kappa) - 2(\kappa^3 + \kappa^2 - 2) - \kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa - 8 = 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8\kappa^3 - 8\kappa + 8 - 4\kappa^3 + 8\kappa^2 + 12\kappa - 2\kappa^3 - 2\kappa^2 + 4 - \kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa - 8 - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \kappa^3 + 5\kappa^2 + 2\kappa - 8 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Έστω $R(\kappa)=\kappa^3+5\kappa^2+2\kappa-8$. Παρατηρούμε ότι $R(1)=1^3+5 \cdot 1^2+2 \cdot 1-8 = 1+5+2-8 = 0$ και επομένως το πολυώνυμο $\kappa-1$ διαιρεί το $R(\kappa)$. Προσδιορίζουμε το πηλίκο της διαίρεσης $R(\kappa):(\kappa-1)$ με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & -8 & 1 \\ & 1 & 6 & 8 & \\ \hline 1 & 6 & 8 & 0 & \end{array}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} R(\kappa) &= \kappa^3 + 5\kappa^2 + 2\kappa - 8 = (\kappa^2 + 6\kappa + 8)(\kappa - 1) = (\kappa^2 + 4\kappa + 2\kappa + 8)(\kappa - 1) = \\ &= [\kappa(\kappa + 4) + 2(\kappa + 4)](\kappa - 1) \Leftrightarrow R(\kappa) = (\kappa + 2)(\kappa + 4)(\kappa - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow \kappa^3 + 5\kappa^2 + 2\kappa - 8 = 0 \Leftrightarrow (\kappa + 2)(\kappa + 4)(\kappa - 1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2, \kappa = -4, \kappa = 1.$$

7. Χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Λύση:

Το πολυώνυμο $x^2 - 5x + 6$, γράφεται: $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$.

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$, διαιρείται με καθένα από τα πολυώνυμα $x - 3$, $x - 2$. Με το σχήμα Horner υπολογίζουμε τα $P(3)$, $P(2)$ και είναι $P(3) = P(2) = 0$, και άρα το $P(x)$ διαιρείται με καθένα από τα πολυώνυμα $x - 3$, $x - 2$, και άρα και με το γινόμενο του $(x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$.

8. Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, προσδιορίστε τα α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - x^2 + \beta^2$ να διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = \alpha x + \beta$.

Λύση:

Είναι:

$$\begin{aligned} P(x):Q(x) &= (\alpha x^4 + \beta x^3 - x^2 + \beta^2):(\alpha x + \beta) = \left(\alpha x^4 + \beta x^3 - x^2 + \beta^2 \right): \alpha \left(x + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha} (\alpha x^4 + \beta x^3 - x^2 + \beta^2): \left(x + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \left(x^4 + \frac{\beta}{\alpha} x^3 - \frac{1}{\alpha} x^2 + \frac{\beta^2}{\alpha} \right): \left(x + \frac{\beta}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο Horner, προσδιορίζουμε το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης και το βρίσκουμε 0.

10. Δίνονται τα πολυώνυμα $Q(x) = x^3 - 2\beta x^2 - (2\beta + 5\alpha)x + 9\alpha + 3$ και $P(x) = (\beta - 2\alpha)x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + \beta)x$. Υπολογίστε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $Q(x)$ με το πολυώνυμο $x - 1$ να είναι -4 , ενώ το πολυώνυμο $x - 1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.

Λύση:

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 θα είναι $Q(1) = -4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1^3 - 2\beta \cdot 1^2 - (2\beta + 5\alpha) \cdot 1 + 9\alpha + 3 = -4 \Leftrightarrow 1 - 2\beta - 2\beta - 5\alpha + 9\alpha + 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow -4\beta + 4\alpha + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2 = 0 \quad (1)$$

Αφού το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ θα είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\beta - 2\alpha) \cdot 1^3 - \alpha \cdot 1^2 - (\alpha + \beta) \cdot 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow \beta - 2\alpha - \alpha - \alpha - \beta + 4 = 0 \Leftrightarrow -4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Συνεπώς η σχέση (1) δίνει $1 - \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

- Κάθε εξίσωση που έχει τη μορφή $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με $a_n \neq 0$ λέγεται **πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** .
- **Ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ λέγεται κάθε αριθμός ρ για τον οποίο ισχύει $a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0 = 0$. Δηλαδή ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, αν και μόνο αν είναι ρίζα του πολυνύμου. Δηλαδή, αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$

Τρόπος επίλυσης:

Ένας τρόπος για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ με

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

είναι να μετασχηματίσουμε το πολυώνυμο $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων. Η επίλυση μιας εξίσωσης $P(x)=0$ με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } P_3(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0$$

Δηλαδή, για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x)=0$, αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων το $P(x)$ και αναγόμεναι έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

- **Θεώρημα των ακέραιων ριζών:**

Αν η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα το $\rho \neq 0$, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

π.χ. η εξίσωση $x^3 + x^2 - 2 = 0$ έχει ως πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου 2. Από αυτούς ο 1 είναι ρίζα αφού $1^3 + 1^2 - 2 = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Δεν ισχύει το αντίστροφο στο παραπάνω θεώρημα. Δηλαδή μπορεί ένας ακέραιος p να είναι διαιρέτης του a_0 , χωρίς αυτός να είναι κατ' ανάγκη ρίζα της εξίσωσης.

π.χ. Έστω η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$. Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης του 2, αλλά:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 1 - 3 + 1 + 2 = 1 \neq 0$$

2. Για να εφαρμόζεται το παραπάνω θεώρημα θα πρέπει οι συντελεστές του πολωνύμου να είναι ακέραιοι. Αν οι συντελεστές είναι ρητοί, τότε προηγείται απαλοιφή παρανομαστών.
3. Αν κανένας από τους διαιρέτες του σταθερού όρου a_0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.
4. Κάθε πολωνυμική εξίσωση με ομόσημους συντελεστές δεν έχει θετικές ρίζες.
5. Κάθε πολωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει το πολύ n ρίζες.
6. Κάθε πολωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

□ Πολωνυμικές ανισώσεις

Για να επιλύσουμε πολωνυμικές ανισώσεις της μορφής $P(x) > 0$ (ή < 0 , ή ≥ 0 , ή ≤ 0), παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ και αναγώμαστε στη λύση της ανίσωσης..

π.χ.

Έστω η ανίσωση $x^3 + x^2 - 2 > 0$. Η εξίσωση $x^3 + x^2 - 2 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

1	1	0	-2	1
	1	2	2	
1	2	2	0	

άρα $\pi(x) = x^2 + 2x + 2$ και $v = 0$. Επομένως το πολυώνυμο $x^3 + x^2 - 2$ γράφεται:

$(x^2 + 2x + 2)(x - 1)$ και η ανισότητα γίνεται $(x^2 + 2x + 2)(x - 1) > 0$.

Ο όρος $x^2 + 2x + 2$ είναι πάντοτε θετικός γιατί $\Delta = -4 < 0$, άρα $x - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 1}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Λύση:

$$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1=0 \\ \text{ή } x-1=0 \\ \text{ή } 2x-1=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ \text{ή } x=1 \\ \text{ή } x=\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι: $A = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $(3x+2)(x^2-1)=(4x+3)(x^2-1)$.

Λύση:

$$(3x+2)(x^2-1) = (4x+3)(x^2-1) \Leftrightarrow (3x+2)(x^2-1) - (4x+3)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(3x+2-4x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(-x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2=0 \text{ ή } x-1=0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (διπλή ρίζα) ή } x = 1.$$

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι: $A = \{-1, 1\}$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-2x^2+x+5=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση:

Αν έχει η παραπάνω εξίσωση ακέραιες λύσεις, θα πρέπει να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου 5. Οι διαιρέτες του 5 είναι οι: $\pm 1, \pm 5$.

Όμως:

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 5 = 1 - 2 + 1 + 5 = 5.$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 5 = -1 - 2 - 1 + 5 = 1.$$

$$P(5) = 5^3 - 2 \cdot 5^2 + 5 + 5 = 125 - 50 + 10 = 85.$$

$$P(-5) = (-5)^3 - 2(-5)^2 - 5 + 5 = -125 - 50 = -175.$$

Βλέπουμε ότι από τους διαιρέτες του σταθερού όρου δεν υπάρχει ακέραια ρίζα. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραια ρίζα.

4. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda-1)x^4-(2\lambda+1)x^3+5\lambda x^2-(7\lambda+1)x+5\lambda-1=0$. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα το 1. Στη συνέχεια να αντικαταστήσετε την τιμή αυτού του λ και να λύσετε την εξίσωση που θα προκύψει.

Λύση:

Για να είναι το 1 ρίζα της εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει:

$$(\lambda-1)1^4-(2\lambda+1)1^3+5\lambda\cdot 1^2-(7\lambda+1)1+5\lambda-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda-1-2\lambda-1+5\lambda-7\lambda-1=0 \Leftrightarrow 2\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

Για $\lambda=2$, η εξίσωση γίνεται: $x^4-5x^3+10x^2-15x+9=0$.

Επειδή το 1 είναι ρίζα, το πολυώνυμο διαιρείται με $x-1$. Από τη διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο x^3-4x^2+6x-9 .

Άρα θα έχουμε: $x^4-5x^3+10x^2-15x+9=0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(x^3-4x^2+6x-9)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^3-4x^2+6x-9=0 \quad (1).$$

Λύνουμε την (1): $x^3-4x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-x^2+3x+3x-9=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3)-x(x-3)+3(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x^2-x+3=0.$$

Η τελευταία δεν έχει πραγματικές ρίζες γιατί $\Delta < 0$. Άρα το σύνολο λύσεων είναι: $A=\{1, 3\}$.

5. Να λυθεί με το σχήμα Horner η εξίσωση: $x^3+2x^2-x-2=0$ (1).

Λύση:

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι: $\pm 1, \pm 2$.

Εξετάζουμε αν είναι ρίζα το 1.

Επειδή το υπόλοιπο είναι 0 η $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως έχουμε: $x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=-2.$$

Το σύνολο λύσεων θα είναι $A=\{-2, -1, 1\}$.

6. Να λυθεί η ανίσωση $x^3-7x+6 < 0$

Λύση:

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3-7x+6$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους αριθμούς: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Επειδή $P(1) = 0$, το 1 είναι ρίζα του πολωνύμου. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

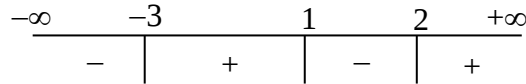
1	0	-7	6	1
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Άρα $P(x) = (x^2+x-6)(x-1)$. Επίσης, για το x^2+x-6 έχουμε:

$$\Delta = 25 \quad \text{και} \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -3 \end{matrix}. \text{ Δηλαδή } x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Επομένως $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$. Αρκεί, λοιπόν, να επιλύσουμε την ανίσωση:

$$(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) < 0.$$



Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.

□ Επίλυση ρητών εξισώσεων.

- ☞ Στις εξισώσεις αυτές με την απαλοιφή παρονομαστών και την εκτέλεση των πράξεων καταλήγουμε σε μια πολυωνυμική εξίσωση.
- ☞ Στις ρητές εξισώσεις πρέπει να θέτουμε περιορισμούς για τους παρονομαστές, οι οποίοι πρέπει να είναι διάφοροι από το μηδέν.

□ Επίλυση άρρητων εξισώσεων

Μια εξίσωση λέγεται άρρητη όταν ο άγνωστος ή μια παράσταση του αγνώστου βρίσκεται κάτω από το ριζικό.

- ☞ Για να λύσουμε μια άρρητη εξίσωση, αφού την υψώσουμε μία ή περισσότερες φορές σε κατάλληλη δύναμη, προσπαθούμε να τη φέρουμε σε μια μορφή πολυωνυμική ή ρητή.
- ☞ Από τις ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, που προκύπτει από μια άρρητη εξίσωση, δεχόμαστε μόνο αυτές που βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της δοσμένης εξίσωσης και συγχρόνως ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς, οι οποίοι έχουν τεθεί κατά την επίλυση της εξίσωσης.

Μορφές άρρητων εξισώσεων.

$$1. \boxed{\sqrt[n]{A} = B} \Leftrightarrow \{A = B^n, A \geq 0, B \geq 0\}$$

$$2. \boxed{\sqrt{A} + \sqrt{B} = \Gamma} \Leftrightarrow \left\{ (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = \Gamma^2, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 2\sqrt{AB} = \Gamma^2 - A - B, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\}$$

$$3. \boxed{\sqrt{A} - \sqrt{B} = \Gamma} \Leftrightarrow \left\{ (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 = \Gamma^2, A \geq 0, B \geq 0, (A - B)\Gamma \geq 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 2\sqrt{AB} = \Gamma^2 - A - B, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\}$$

$$4. \boxed{\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{\Gamma}} \Leftrightarrow \left\{ (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = (\sqrt{\Gamma})^2, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 2\sqrt{AB} = \Gamma - A + B, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 4AB = (\Gamma - A + B)^2, \Gamma - A + B, A \geq 0, B \geq 0, \Gamma \geq 0 \right\}$$

$$5. \boxed{\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{\Gamma}} \Leftrightarrow \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} = \sqrt{A}, \text{ δηλαδή καταλήγουμε στην προηγούμενη μορφή.}$$

□ Επίλυση εξισώσεων με τη χρήση βοηθητικού αγνώστου

Αρκετές φορές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε από την αρχή βοηθητικό άγνωστο και να καταλήξουμε σε απλούστερη μορφή.

π.χ. : η εξίσωση $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ μπορεί να λυθεί θέτοντας $y = \sqrt{x}$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, οπότε είναι $y^2 = x$. Άρα η αρχική εξίσωση γίνεται η πολυωνυμική: $y^2 + 3y - 10 = 0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς -5 και 2 . Η ρίζα -5 απορρίπτεται από τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2}{(1+x)^2} = \frac{2}{1+x^3}$.

Λύση:

$$\text{Θα πρέπει να ισχύουν: } \left. \begin{array}{l} (1+x)^2 \neq 0 \\ 1+x^3 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \neq -1.$$

Τώρα έχουμε:

$$\frac{2}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^3} \Leftrightarrow 2(1+x^3) = (1+x)^2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ή } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

Η λύση $x = -1$ απορρίπτεται.

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι: $A = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2 x = \frac{3}{(2 - \eta\mu x)(2 + \eta\mu x)}$.

Λύση:

Ισχύει $\eta\mu x \neq \pm 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας όπου $\eta\mu x = \psi$, θα έχουμε:

$$\psi^2 = \frac{3}{4 - \psi^2} \Leftrightarrow \psi^2(4 - \psi^2) = 3 \Leftrightarrow 4\psi^2 - \psi^4 = 3 \Leftrightarrow \psi^4 - 4\psi^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \psi^2 = 1 \text{ ή } \psi^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\psi = \pm 1.$$

Η $\psi = \pm\sqrt{3}$ απορρίπτεται επειδή πρέπει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.

Για $\psi = 1$ έχουμε: $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Για } \psi = -1 \text{ έχουμε: } \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = (2\kappa + 1)\pi - \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άρα το σύνολο λύσεων θα είναι: $A = \left\{ \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$.

Λύση:

$$\text{Έχουμε: } x - \sqrt{25 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = x - 1.$$

$$\text{Θα πρέπει να ισχύουν: } \left. \begin{array}{l} 25 - x^2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \quad (1).$$

Με την προϋπόθεση ότι ισχύει η (1) υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$\left(\sqrt{25 - x^2} \right)^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 25 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 4.$$

Δεχόμαστε μόνο τη $x = 4$, λόγω περιορισμών, άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το $A = \{4\}$.

4. Να λύσετε την εξίσωση: $4x + 2\sqrt{5 - 4x} = 5$.

Λύση:

Έχουμε $4x + 2\sqrt{5 - 4x} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{5 - 4x} = 5 - 4x$.

Θα πρέπει να ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} 5 - 4x \geq 0 \\ 5 - 4x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4} \quad (1).$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{5 - 4x})^2 &= (5 - 4x)^2 \Leftrightarrow 4(5 - 4x) = 25 + 16x^2 - 40x \Leftrightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16x^2 - 24x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ ή } x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο λύσεων είναι: $A = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right\}$.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$.

Λύση:

Θα πρέπει να ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} x - 5 \geq 0 \\ 13 - x \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq 13 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 13 \quad (1).$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$(\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}})^2 = (\sqrt{13 - x})^2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x - 5} = 13 - x \Leftrightarrow \sqrt{x - 5} = 11 - x.$$

Θα πρέπει: $11 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 11$.

Η (1) γίνεται τώρα $5 \leq x \leq 11$ και αν υψώσουμε πάλι στο τετράγωνο θα έχουμε:

$$(\sqrt{x - 5})^2 = (11 - x)^2 \Leftrightarrow x - 5 = 121 + x^2 - 22x \Leftrightarrow x^2 - 23x + 126 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ ή } x = 14.$$

Δεχόμαστε την $x = 9$. Άρα, το σύνολο λύσεων είναι: $A = \{9\}$.

6. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{2x - 3} < 1$.

Λύση:

$$\text{Θα πρέπει να ισχύει: } 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \quad (1).$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη της ανίσωσης και έχουμε:

$$\sqrt{2x-3} > 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-3})^2 > 1^2 \Leftrightarrow 2x-3 > 1 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2 \quad (2).$$

Οι ανισώσεις (1), (2) μας δίνουν $x > 2$.

7. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{x-5} > \sqrt{3x+1}$.

Λύση:

Θα πρέπει να ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} x-5 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 5 \quad (1)$$

Τώρα έχουμε:

$$\sqrt{x-5} \geq \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x-5})^2 \geq (\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow x-5 \geq 3x+1 \Leftrightarrow -2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad (2).$$

Συναληθεύουμε τις ανισώσεις (1), (2) και βλέπουμε ότι δεν έχει λύση η αρχική ανίσωση.

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{x-1} > x-2$.

Λύση:

Θα πρέπει: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (1)$

Για την παράσταση $x-2$ παίρνουμε περιπτώσεις.

- Αν $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, τότε από την (1) έχουμε ότι για $1 \leq x < 2$ αληθεύει η ανίσωση.
- Αν $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, τότε από την (1) έχουμε για:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 2 \quad (2)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$\sqrt{x-1} > x-2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 > (x-2)^2 \Leftrightarrow x-1 > x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+5 < 0.$$

Επειδή $\Delta=25-4 \cdot 5 = 5$ και $a = 1 > 0$, θα αληθεύει για τις τιμές εντός των ριζών $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

Δηλαδή θα έχουμε $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Η προηγούμενη ανίσωση με τη (2) μας δίνει $2 \leq x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Επομένως το σύνολο των λύσεων θα είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$