

1) Να αποδείξετε ότι το $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$ και να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - x - 6)$.

2) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 - \beta x^2 - x + \alpha + 1$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.

3) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

4) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 - 5\alpha x^2 - (\alpha + \beta - 1)x - 2\alpha - 3$$

να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

5) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - 1)x^3 + 2(\lambda + 3)x^2 - (2\lambda + 3)x - 7$ να έχει παράγοντα το $x + 1$. Στη συνέχεια να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$.

6) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 2x^4 + \alpha x^3 - x^2 + \beta x - 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : x + 1$ είναι -7 . Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : x - 2$ είναι 32 . Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : x - 1$.

7) Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

$$\alpha) (x^{40} - 3x^{30} + 5x^{15} - 5) : (x + 1) \quad \beta) ((x - 2)^{17} - 5(2x - 3)^8 + 3x^2 - 10) : (x - 2)$$

8) Αν το πολυώνυμο $P(x) = (x + 3)^v + (x + 1)^v - 272$ διαιρείται με το $x - 1$, να αποδειχθεί ότι $v = 4$.

9) Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (\lambda - 1)x^2 - x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{και} \quad Q(x) = P(1 - x) + 2x \cdot P(x + 1).$$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x - 2)$ είναι 8 , να βρεθεί το λ .

10) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, διαιρούμενα με το $x + 2$, δίνουν υπόλοιπα 3 και -4 αντιστοίχως. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο:

$$\Sigma(x) = (x^2 + 1) \cdot P(x) + \lambda x \cdot Q(x) \text{ να διαιρείται με το } x + 2.$$

11) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x + 1)^{2v} - x^{2v} - 1, v \neq 0$, έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$.

12) Έστω $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα τέτοια, ώστε $P(x - 3) = Q(x + 1) \cdot (x^2 - x + 2)$.

α) Αν ο αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$, είναι ρίζα του $P(x)$ να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho + 4$.

β) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x - 2)$ είναι 10 , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.